

# 경사면을 주행하는 차륜형 역진자를 위한 선형행렬부등식 기반 혼합 $H_2/H_\infty$ 상태피드백 제어기 설계

## A Mixed $H_2/H_\infty$ State Feedback Controller Based on LMI Scheme for a Wheeled Inverted Pendulum running on the Inclined Road

이세한\* · 이상용\*\*

Se-Han Lee and Sang-Yong Rhee

\* 경남대학교 기계자동화공학부

\*\* 경남대학교 컴퓨터공학부

### 요 약

본 논문에서는 차륜형 역진자에 적용되는 LMI 제어기 설계와 그 수치 시뮬레이션이 수행되었다. 차륜형 역진자는 2개의 평형점을 갖고 있는 역진자의 일종이다. 불안정한 평형점에 대하여 평형을 유지하기 위하여 차륜형 역진자는 지속적으로 제어되어야 한다. 경사면을 고려하여 차륜형 역진자의 동역학 방정식이 유도되었다. 경사면을 적극적으로 고려하여 차륜형 역진자를 안정화 시킬 수 있는 제어기를 구성하는데 선형행렬부등식 기법이 적용되었다. LMI 기반 제어기가 평면과 경사면에 대해서 유효함을 보이기 위해서 다양한 수치 시뮬레이션이 수행되었다.

**키워드 :** 차륜형 역진자, 선형행렬부등식, 상태피드백, 경사면

### Abstract

In this research an LMI based mixed  $H_2/H_\infty$  controller for a Wheeled Inverted Pendulum is designed and a numerical simulation of that is carried out. The Wheeled Inverted Pendulum is a kind of an inverted pendulum that has two equivalent points. To keep that the naturally unstable equivalent point, a controller should control the wheels persistently. Dynamic equations of the Wheeled Inverted Pendulum are derived with considering inclined road that is one of the representative road conditions. A Linear Matrix Inequality method is used to construct a controller that is able to stabilize the Wheeled Inverted Pendulum with considering the inclined road condition aggressively. Various numerical simulations show that the LMI based controller is doing well on not only flat road but also inclined road condition.

**Key Words :** Wheeled inverted pendulum, Linear Matrix Inequality. State feedback, Inclined road

## 1. 서 론

본 연구는 진행 방향에 대하여 직각방향으로 회전축을 갖는 2개의 바퀴로 구동 되는 차륜형(Wheeled) 역진자(Inverted Pendulum)의 제어 문제를 다루고 있다. 차륜형 역진자 문제는 구동바퀴에 대한 적절한 제어를 통해서 역진자의 자세를 상위 수직방향 평형점으로 안정화 시키면서 원하는 위치로 역진자를 이동 시키는 것이다.

학술연구에 주로 사용되는 전형적인 역진자 시스템은 1965년경에 Kapitza[1]에 의해 처음으로 제작되었다. 역진자는 여러 가지 다양한 형태로 존재하는데, 진자가 불안정한 수직방향 평형상태에서 멀리 벗어날수록 비선형성이 급

속히 증가되는 공통적인 특성을 가지므로 제어기 성능의 유효성을 입증하는 다양한 연구[2,3]의 수단으로 널리 사용되어 왔다.

역진자의 대표적인 응용 분야로써 중력의 반대 방향으로 진행되는 항공용 로켓의 자세 안정화 제어를 들 수 있으며, 민수용으로는 2001년에 상업용으로 개발되어 판매되고 있는 개인용 이동 수단인 SEGWAY[4]를 들 수 있다. 최근에는 역진자 관련제품인 Toyota Winglet[5]의 발표도 보고되고 있다. 민수용으로 개발된 개인용 이동수단인 SEGWAY는 전형적인 차륜형 역진자 시스템의 형태를 갖고 있는데, 차륜형 역진자 시스템이 개인용 이동수단의 플랫폼으로 채용된 이유로 그 시스템이 점유하는 공간이 협소하고 유사 전방향 진행이 가능한 점을 들 수 있다. 차륜형 역진자를 개인용 이동수단뿐만 아니라 이동로봇의 플랫폼으로 사용하려는 다양한 연구들이 진행되고 있다.[6,7]

차륜형 역진자 시스템이 전방향 진행이 가능한 이동로봇의 플랫폼으로 사용되기 위해서는 평지뿐만 아니라 경사진 지형에 대해서도 안정된 주행 성능을 가질 필요가 있다. 자

접수일자 : 2010년 3월 3일

완료일자 : 2010년 7월 24일

\*\* 교신저자

본 연구는 2009학년도 경남대학교 학술연구 장려금 지원으로 이루어졌음.

유로운 이동이 제한되는 고정 궤도 위를 이동하는 수레형의 경우 경사면을 고려한 연구[8]가 있으며, 차륜형 역진자의 경우 평면에 대하여 매우 상세하게 모델링한 연구[9]가 있고, 경사면을 고려한 연구[10]는 주행 노면의 경사 검출에 주로 관심을 두고 있으며, 그 결과를 제어기에 적극적으로 반영하지는 않고 있다.

본 연구에서는 경사면을 고려한 차륜형 역진자의 동역학 방정식을 Newton-Euler법으로 유도하고 경사진 주행면에 따른 평형점 변화를 논의한다. 그 평형점의 변화에 적극적으로 대처할 수 있는 안정화 제어가 선형행렬부등식 기법을 기반으로 설계되며 그 제어기의 유효성이 수치 시뮬레이션을 통하여 제시었다. 2장에 차륜형 역진자 시스템의 모델과 차륜 구동을 통한 평형 유지 원리를 소개하고 3장에 경사면을 고려한 차륜형 역진자 시스템의 동역학 방정식을 유도하고 수레형 역진자와의 차이점을 언급한다. 4장에서는 경사면 보상이 가능한 제어기가 선형행렬부등식 기반으로 설계되며, 5장에서는 수치 시뮬레이션 결과를 통하여 그 제어기의 유효성을 보인다. 마지막으로 6장에서 본 연구의 결론이 제시된다.

## 2. 차륜형 역진자 시스템

그림 1 은 본 연구의 중심이 되는 차륜형 역진자 시스템의 개략적인 외형을 나타내고 있다. 중력에 대하여 역방향으로 배치된 몸체(Chassis)가 진자 역할을 하게 된다. 몸체 좌우의 바퀴는 몸체가 평형을 유지하면서 주어진 위치로 이동할 수 있도록 제어된다.

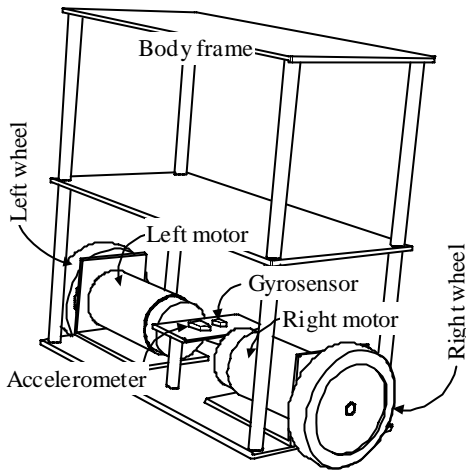


그림 1. 차륜형 역진자  
Fig. 1. A Wheeled Inverted Pendulum

역진자의 몸체는 특성상 불안정한 평형상태에 있으며 제어가 적절히 동작하지 않는다면 작은 외란에 의해서도 넘어지게 된다. 이 때, 제어기는 역진자를 몸체가 넘어지는 방향으로 진행 시켜서 그 반대 방향으로 관성력을 발생시켜서 몸체의 평형을 유지 하도록 한다. 역진자의 동적 모델링을 위해서 그림 2 에 그 모델을 표시하였다.

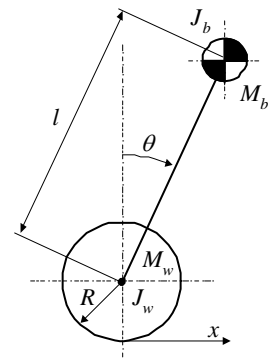


그림 2. 시스템 모델링  
Fig. 2. System modeling

몸체의 동역학적 파라미터는 몸체의 집중질량  $M_b$  와 바퀴의 회전관성  $J_b$  로 표시되며, 그 질량 중심은 구동바퀴의 회전축에서 거리  $l$  만큼 떨어져 있다. 그림 2 에서 역진자 몸체의 기울기 각도는 12시 방향을 기준으로, 시계방향이면  $+\theta$  로 정의된다.

역진자가 평형을 유지하는 원리는 손바닥 위에 올려놓은 막대기의 평형 유지와 유사하다. 실험자는 경험상 막대기가 넘어지려는 방향으로 손바닥을 신속하게 움직여서 막대기의 평형을 유지할 수 있다. 동일하게 역진자는 몸체의 질량중심이 넘어지려는 방향으로 적절히 몸체를 진행 시켜서 몸체의 평형을 유지하게 한다. 예를 들면, 몸체가 넘어지려는 각도가  $\theta > 0$  이라면 바퀴는 시계방향으로 회전하여 바퀴 중심을  $+x$  방향으로 이동될 필요가 있으며, 반대로 각도가  $\theta < 0$  라면 바퀴는 반대로 회전할 필요가 있다. 몸체의 각도  $\pm\theta$  에 대한 적절한 바퀴의 회전력 산출은 차륜형 역진자의 동역학적 특성에 의존하며, 최종적으로 제어기 설계의 목표가 된다.

## 3. 동역학 방정식

동역학 방정식을 유도하기 위해서 역진자의 자유물체도는 차륜(Wheel)과 몸체(Chassis) 부분으로 분리되어 작성될 수 있으며, 차륜과 몸체를 연결하는 변수는 반력으로 처리된다. 방정식 유도에 사용된 변수 종류는 Grasser[9]를 참고하여 선정되었다. 방정식 유도에 사용된 자유물체도를 그림 3 에 표시하였다.

바퀴에 작용하는 변수로는 외력  $f_w$ , 몸체로부터 작용하는 수평 및 수직반력  $H, V$ , 바퀴중력  $M_w g$ , 경사면으로부터 작용하는 수평 및 수직반력  $H_T, V_T$ , 그리고 구동모터의 토크  $\tau$  등이 있다. 한 편, 몸체에 작용하는 변수로는 몸체중력  $M_b g$ , 바퀴로부터 작용하는 반력  $H, V$ , 그리고 구동모터의 반력토크  $\tau$  등이 있다.

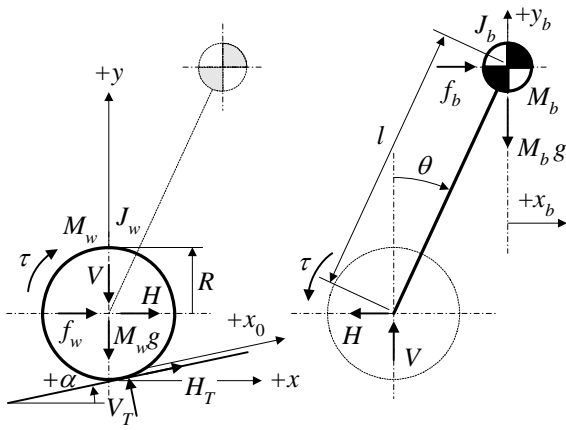


그림 3. 차륜형 역진자의 자유물체도  
Fig. 3. Free body diagram of the Wheeled Inverted Pendulum

### 3.1 바퀴 동역학

역진자는 구동장치(모터)를 사이에 두고 바퀴와 몸체로 분리하여 고찰될 수 있다. 구동장치를 기준으로 상호 작용하는 반력들을 설정한 다음 Newton-Euler 방정식이 각각에 대하여 구성될 필요가 있다.

경사면에 나란한  $x_0$  방향에 대한 바퀴의 힘-모멘트 방정식은 다음과 같다.

$$M_w \ddot{x}_0 = (H + f_w) \cos \alpha - (V + M_w g) \sin \alpha + H_T \quad (1)$$

$$J_w \ddot{\phi} = -RH_T + \tau \quad (2)$$

이 때, 모멘트 방정식 (2)는 바퀴의 회전중심에 대하여 기술되었다. 만일, 바퀴가 지면에 대하여 미끄러짐 없이 회전하여 진행 한다면 바퀴의 각속도  $\dot{\phi}$  와 진행속도  $\dot{x}_0$  사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$R\dot{\phi} = \dot{x}_0 \rightarrow \ddot{\phi} = \ddot{x}_0 / R \quad (3)$$

식 (3)을 (2)에 대입하면 모멘트 방정식 (2)는 다음과 같이 지면의 수평반력  $H_T$  에 대하여 정리된다.

$$H_T = \frac{1}{R} \tau - \frac{J_w}{R^2} \ddot{x}_0 \quad (4)$$

구해진 지면의 수평반력  $H_T$  을 (1)에 대입하여 경사면 진행속도  $\ddot{x}_0$  와 모터 토크  $\tau$  는 다음과 같이 연결된다.

$$\begin{aligned} (M_w + \frac{J_w}{R^2}) \ddot{x}_0 &= (H + f_w) \cos \alpha \\ &- (V + M_w g) \sin \alpha + \frac{1}{R} \tau \end{aligned} \quad (5)$$

### 3.2 몸체 동역학

몸체 동역학은 바퀴 동역학에 비하여 비교적 간단하다. 몸체의 질량중심 수평속도  $\dot{x}_b$  에 대한 몸체의 힘 방정식은 다음과 같이 구성된다

$$M_b \ddot{x}_b = f_b - H \quad (6)$$

한 편, 몸체의 질량중심 수평속도  $\dot{x}_b$  와 바퀴 회전중심의 수평속도  $\dot{x}$  는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\dot{x}_b = \dot{x} + l\dot{\theta} \cos \theta - l\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (7)$$

수평속도  $\dot{x}$  와 경사면에 대한 진행속도  $\dot{x}_0$  사이에는  $\dot{x} = \dot{x}_0 \cos \alpha$  관계가 있으므로 이 관계와 (6)을 이용하면 수평반력  $H$  은 다음과 같이 구해진다.

$$H = f_b - M_b \ddot{x}_0 \cos \alpha - M_b l \ddot{\theta} \cos \theta + M_b l \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (8)$$

몸체의 질량중심 수직속도  $\dot{y}_b$  에 대한 힘 방정식은 다음과 같이 구성된다.

$$M_b \ddot{y}_b = V - M_b g \quad (9)$$

몸체의 수직속도와 경사면 진행속도는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\dot{y}_b = \dot{x}_0 \sin \alpha - l(\dot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (10)$$

식(10)을 (9)에 대입하여 수직반력  $V$  는 다음과 같이 구해될 수 있다.

$$V = M_b \ddot{x}_0 \sin \alpha - M_b l \ddot{\theta} \sin \theta - M_b l \dot{\theta}^2 \cos \theta + M_b g \quad (11)$$

구해진 수평 및 수직반력을 식(5)에 대입하여 최종적으로 경사면 진행속도  $\ddot{x}_0$  와 모터 토크  $\tau$  에 관한 방정식은 다음과 같이 얻어질 수 있다.

$$\begin{aligned} (M_b + M_w + \frac{J_w}{R^2}) \ddot{x}_0 + M_b l \cos(\theta + \alpha) \ddot{\theta} \\ - M_b l \sin(\theta + \alpha) \dot{\theta}^2 + (M_b + M_w) g \sin \alpha \\ = (f_b + f_w) \cos \alpha + \frac{1}{R} \tau \end{aligned} \quad (12)$$

한 편, 몸체의 질량중심에 대한 모멘트 방정식은 다음과 같이 구성된다.

$$J_b \ddot{\theta} = Vl \sin \theta + Hl \cos \theta - \tau \quad (13)$$

앞에서 얻어진 수평, 수직반력을 (13)에 대입하면 (13)은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} M_b l \cos(\theta + \alpha) \ddot{x}_0 + (J_b + M_b l^2) \ddot{\theta} - M_b g l \sin \theta \\ = f_b l \cos \theta - \tau \end{aligned} \quad (14)$$

식(12)와 (14)는 다음과 같이 일반적인 로봇 동역학 방정식 형태로 정리될 수 있다.

$$M \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

이 때,  $N_i$  는 원심력,  $G_i$  는 중력,  $\tau_i$  는 구동토크, 그리고  $f_i$  는 외력을 나타낸다.

식 (12)와 (14)는 일반 수레형 역진자와 다르게 제어입력(토크)이 바퀴 동역학과 몸체 동역학 모두에 포함되어 있는 특징을 갖는다.

### 3.3 차륜형 역진자 시스템의 평형점

역진자의 제어 목적은 몸체가 평형을 유지 하면서 주어

진 위치로 이동하는 것이다. 먼저, 물체의 평형 상태의 정의를 살펴보도록 한다. 물체에 작용하는 힘은 바퀴 구동에 의한 관성력, 구동장치의 반력토크와 물체에 작용하는 중력을 들 수 있다. 역진자가 정적인 평형을 유지하면 물체에 작용하는 관성력은 사라질 것이며( $\ddot{x}_0=0$ ), 오직 반력토크와 중력만이 물체에 작용하게 되고 물체의 각속도와 각가속도는 0 이 될 것이다 ( $\ddot{\theta}=\dot{\theta}=0$ ). 이 때,  $\theta=0$ 일 필요가 없다는 것에 유의한다. 이 조건을 식(12)와 (14)에 적용하면 평형 상태에 대한 정역학 방정식은 다음과 같다.

$$(M_b + M_w)g \sin \alpha = (f_b + f_w) \cos \alpha + \frac{1}{R} \tau \quad (16)$$

$$-M_b g l \sin \theta = f_b l \cos \theta - \tau \quad (17)$$

역진자의 평형 상태는 다음과 같이 해석될 수 있다. 만일 외란이 없다면( $f_b = f_w = 0$ ) 식(16)에 의하여 경사면의 기울기  $\alpha \neq 0$ 을 극복하기 위한 구동토크  $\tau$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\tau = (M_b + M_w)gR \sin \alpha \quad (18)$$

경사면 기울기를 극복하기 위한 토크에 해당되는 물체의 기울기  $\theta \neq 0$ 는 (17)에 의해서 다음과 같이 구해진다.

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{\tau}{M_b g l} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{(M_b + M_w)R}{M_b l} \sin \alpha \right) \quad (19)$$

즉, 경사면 기울기가 존재할 때에는 평형을 유지하기 위해서는 구동토크가 필요하며 그 평형점에 해당하는 물체 기울기 각도는 더 이상 0이 아님에 유의할 필요가 있다. 경사 주행면에 대한 시뮬레이션 결과를 나타내는 그림 7에서 경사면  $\alpha = \pm 20^\circ$ 에 대하여 정상상태에서 역진자 물체는  $\theta = \pm 6.32^\circ$ 를 나타내는데 이것은 식 (19)의 결과와 일치한다.

#### 4. 상태 피드백 제어기 설계

불안정한 특성을 갖는 역진자 시스템을 평형 상태를 유지하면서 구동하기 위해서는 적극적인 제어 동작이 요구된다. 제어기를 구성하기 위해서는 구체적인 제어 목표가 필요하게 된다. 역진자의 제어 목표는 물체가 정해진 위치로 이동하는 것과 평형을 유지하는 것을 들 수 있다. 평형 유지를 위한 목표는 앞에서 제시한  $\ddot{\theta}=\dot{\theta}=0$  조건을 이용하여 제시될 수 있다. 실제, 물리적으로  $\dot{\theta}=0 \rightarrow \ddot{\theta}=0$  이므로  $\dot{\theta}=0$ 을 목표값으로 설정한다.

##### 4.1 시스템 선형화 및 가제어성

역진자 시스템 시뮬레이션에 필요한 변수값을 다음의 Table 1에 나타내었다.

표 1. 차륜형 역진자 파라미터  
Table 1. Wheeled Inverted Pendulum parameters

변수	값	내용
$M_w$	0.052 kg	바퀴 질량
$M_b$	1.0 kg	몸체 질량

$J_w$	$1.8 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	바퀴 회전관성
$J_b$	$4.4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	몸체 회전관성
$R$	0.026 m	바퀴 반지름
$l$	0.085 m	바퀴중심과 몸체중심까지 거리

식(12)와 (14)는 물체의 기울기 각도 경사면 각도에 대한 비선형 성분을 갖고 있다. 실제로 물체의 기울기  $\theta$ 는 근소한 범위를 가지므로  $\theta \ll 1$ 로 가정하면  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$ 로 근사화 시킬 수 있으며, 물체는 평형점 부근에서 매우 느리게 회전하므로  $\dot{\theta}^2 \approx 0$ 로 근사화 시킬 수 있다. 이 때, 경사면 각도  $\alpha$ 에 의해 발생하는 영향은 외란으로 간주된다. 이런 근사화 과정을 통하여 식(12)와 (14)는 상태변수  $x = \{x_0 \ x_1 \ \theta \ \dot{\theta}\}^T$ 로 정의했을 때 대표적인  $\alpha=0$ 에서 다음의 선형 상태방정식으로 근사화 된다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (20)$$

이 때, 표 1과  $\alpha=0$ ,  $f_b = f_w = 0$  을 적용하면 (20)의 계수 행렬은 구체적으로 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13.32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 169.1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 100.1 \\ 0 \\ -818.2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

시스템의 동특성을 나타내는 행렬 A의 고유값 중에서 13.0이라는 불안정한 극값이 존재하므로 보상 제어기를 적용 해야만 안정한 시스템이 됨을 알 수 있다. 시스템 가제어성 확인을 위해서 가제어성 행렬을 다음과 같이 구성해서 계수(rank)를 확인해 본 결과 완전계수 이므로 임의의 상태변수 제어기가 설계될 수 있음을 확인할 수 있다

$$\text{rank}([B \ AB \ A^2B \ A^3B]) = 4 \quad (22)$$

##### 4.2 제어기 선택

제어기를 구성하기 전에 제어대상의 특성을 살펴볼 필요가 있다. 먼저, 식(15)에서 경사면 기울기에 대한 관성행렬 M은 다음과 같이 구성된다.

$$M = \begin{bmatrix} M_b + M_w + \frac{J_w}{R^2} M_b l \cos(\theta + \alpha) \\ M_b l \cos(\theta + \alpha) \quad J_b + M_b l^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

관성행렬은 각도  $\theta$  뿐만 아니라 경사면 기울기  $\alpha$ 에 의해서도 변화되고 있다. (19)에 의하면  $\theta$ 와  $\alpha$ 는 동일한 부호를 갖고 있으므로 경사면 위에서 역진자가 평형을 유지할 때,  $|\theta + \alpha| > |\alpha|$  관계가 발생되며, 관성행렬의 변화가 예상되지만  $|\theta + \alpha| < 30^\circ$ 에 대하여 관성행렬의 특이값은  $\sigma_{\max} = 1.0596$ 에서  $\sigma_{\max} = 1.0579$ 로 미미하게 변하는 특징이 있다. 반면에 (12)중에서 경사면 각도  $\alpha$ 에 의해서 부가적으로 발생하는 외란은 다음과 같다.

$$(M_b + M_w)g \sin \alpha \quad (24)$$

또한  $\alpha$ 는 외력의 영향( $f_b + f_w$ ) $\cos \alpha$ 의 영향을 미미하게 감소시키는 역할을 하기도 한다. 그러므로 부가적으로 발생

되는 외란들을 제어기에 적극적으로 감안하는 것이 바람직하다.

### 4.3 LMI 기반 $H_2/H_\infty$ 혼합 상태피드백 제어기

역진자는  $\theta$  가 제어성능 범위를 초과하면 넘어져서 회복불능 상태가 되는 특징이 있으므로 본 연구에서는 외란에 대하여  $\theta$  의 침투값을 억제하면서 과도응답을 개선할 필요가 있어서 이런 다목적 제어목표 달성에 유효한  $H_\infty$  제어와  $H_2$  제어가 혼합된 제어기[11]가 구성되었다. 그림 4는 혼합제어 문제를 나타내고 있다.

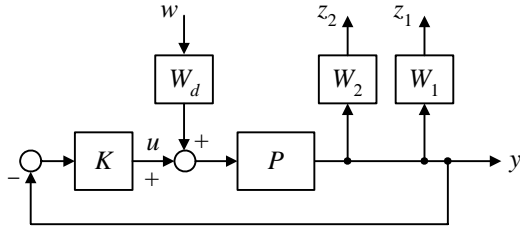


그림 4. 혼합  $H_2/H_\infty$  제어 문제

Fig. 4. Mixed  $H_2/H_\infty$  control problem setup

그림 4는 제어대상  $P$  에 작용하는 외란  $w$  에 대하여  $z_1$  의  $H_\infty$  노음과  $z_2$  의  $H_2$  노음을 최소화 시킬 수 있는 안정화 제어기  $K$  를 구하는 것을 나타내고 있다. 이 때,  $W_d=1$ ,  $W_1=1$ ,  $W_2=I_3$  인 상수형 가중함수가 사용되었다. 이상의 구조를 상태공간 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z_1 &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ z_2 &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \quad (25)$$

다양한 제어목표를 만족하는 혼합제어기를 해석적으로 구하는 것은 곤란하므로 수치해석기법의 일종인 선형행렬부등식(LMI: Linear Matrix Inequality) 기법을 이용하여 제어기는 구해진다. 먼저, 그림 4와 같은 제어시스템은 다음과 같이 그림 5와 같이 상태피드백을 이용한 제어시스템 구조로 나타낼 수 있다.

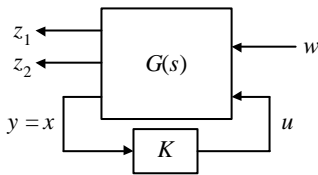


그림 5. 상태피드백 제어기 구조

Fig. 5. Control system structure with state feedback

이 때, 제어 시스템에는 모든 상태값이 용이하게 얻어지는 것을 가정하여 상태변수 피드백 제어기가 채용되며  $K$  는 상수행렬이 된다.

외란  $w$  에 대한  $z_2$  의 페루프 전달함수의  $H_2$  노음은 다음과 같다.

$$\| T_{z_2w} \|_2^2 = \text{Trace}((C_2 + D_{22}K)X(C_2 + D_{22}K)^T) \quad (26)$$

이 때,  $X > 0$  는 다음의 Lyapunov 방정식의 근에 해당한다.

$$(A + B_2K)X + X(A + B_2K)^T + B_1B_1^T = 0 \quad (27)$$

그리고  $K$  는 (27)을 만족시키면서 (26)를 최소화 시키는 값으로 결정된다. 또,  $w$  에 대한  $z_1$  의 페루프 전달함수의  $H_\infty$  노음의 제한조건은 다음과 같이 특정값 이하가 되는 것이다.

$$\| T_{z_1w} \|_\infty < \gamma_\infty, \gamma_\infty > 0 \quad (28)$$

이상의 조건을 만족하는 LMI 는 다음과 같이 정리되며 이 LMI 를 공통적으로 만족하는  $X$  와  $K$  는 전용 소프트웨어로 계산될 수 있다[12].

$$\begin{bmatrix} A_cX + XA_c^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} X & XC_{c2}^T \\ C_{c2}^T X & W \end{bmatrix} > 0 \quad (30)$$

$$\text{Trace}(W) < \gamma_2^2 \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} A_cX + XA_c^T & B_1 & XC_{c1}^T \\ B_1^T & -\gamma_\infty I & D_{11}^T \\ C_{c1}X & D_{11} & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

$$X > 0 \quad (33)$$

이 때,  $A_c = A + B_2K$ ,  $C_{c1} = C_1 + D_{12}K$ ,  $C_{c2} = C_2 + D_{22}K$ ,  $W = (C_2 + D_{22}K)X(C_2 + D_{22}K)^T$  이다.

식(29) - (33)에 근거하여 다음과 같이 계산된다.

$$K = [0.2951 \quad 0.3373 \quad 1.1323 \quad 0.0930] \quad (34)$$

## 5. 시뮬레이션 및 결과 고찰

본 연구에서는 실제조건에 충실하기 위해서 시뮬레이션에 사용된 구동모터 토크의 최대값을 0.15Nm 로 제한하였다. 본 연구에서 제안하는 제어기의 목표는 가능한 한 역진자의 기울기 각도  $\theta$  의 크기 억제와 과도응답 성능을 개선하는 것이다. 본 연구에서는 대표적인 최적 안정화 제어기인 LQR(Linear Quadratic Regulator)를 대상으로 성능비교를 하였으며, 제어기 형태로는 모든 상태변수를 이용하는 상태피드백 형태로 설정하였다. 그러므로 산출되는 제어이득은 상수행렬  $K_{2/\infty}$  와  $K_{LQR}$  로 동일한 차수를 갖는다. 각 제어기의 이득행렬은 그림 6과 같이 경사면 각도  $\alpha = 0^\circ$  일 때, 각 제어기에 대한  $x_0$  과  $\theta$  의 응답이 유사하도록 산출되었다. 이 때, 초기 몸체 각도  $\theta_0 = 10^\circ$  로 설정되었다.

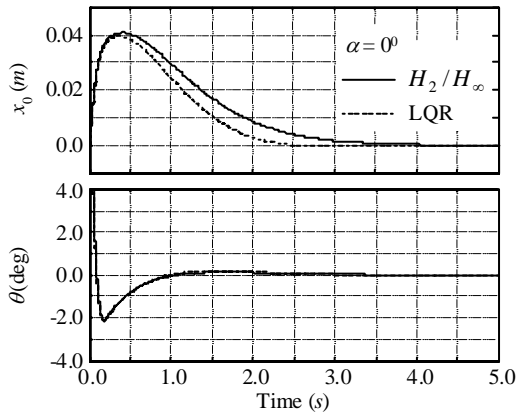


그림 6. 평지 주행면에서의 진행변위  $x_0$ 와 몸체 기울기  $\theta$ 의 시간응답  
 Fig. 6. Time response of travel displacement  $x_0$  and tilting angle  $\theta$  for a flat road.

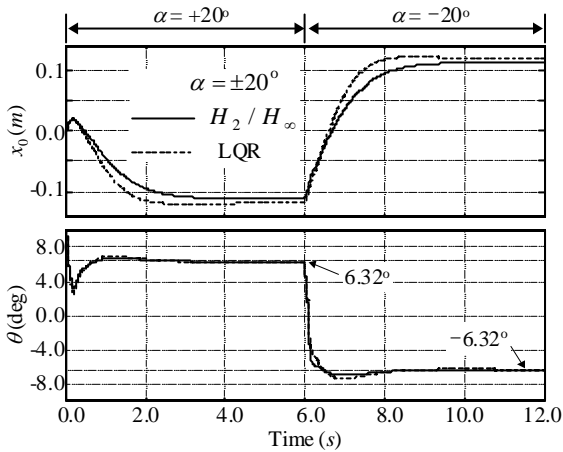


그림 7. 가변 경사 주행면에서의 진행변위  $x_0$ 와 몸체 기울기  $\theta$ 의 시간응답  
 Fig. 7. Time response of travel displacement  $x_0$  and tilting angle  $\theta$  for a sharply changed inclined road.

본 연구에서 제안한 혼합제어기의 성능을 확인하기 위해서 경사면 각도를  $\alpha = \pm 20^\circ$ 로 적용하여  $x_0$ 와  $\theta$ 의 응답 시뮬레이션을 수행하고 그 결과를 그림 6에 표시하였다. 초기의 제어이득 결정과정에서 초기 몸체각도를 극복하기 위한 진행변위의 과도응답의 경우 LQR 제어기가 혼합  $H_2/H_\infty$  제어기보다 다소 양호하게 출력되고 있는 것을 알 수 있었다. 그러나 차륜형 역진자 동작환경이 경사면으로 주어질 경우에는 혼합  $H_2/H_\infty$  제어기의 과도응답 및 침두오차가 그림 7에 표시된 전반부 영역과 후반부 영역 모두 LQR 제어기보다 양호함을 알 수 있다. 그 원인은 혼합 제어기에서 침두오차와 과도응답을 미리 감안하였기 때문으로 추정된다.

제어입력 크기를 고려하지 않은 제어 성능은 무의미하므로 제어성능의 중요한 지표로 다음의 그림 8에 제어입력을 표시하였다.

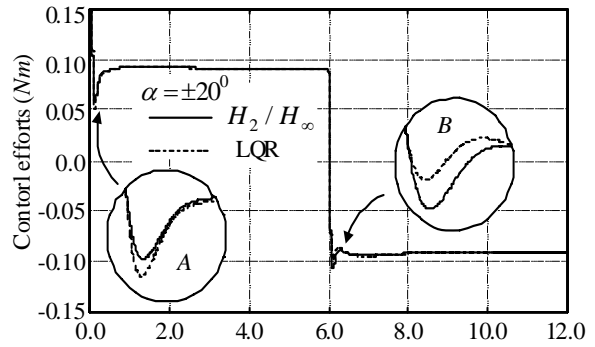


그림 8. 가변 경사 주행면에서의 진행변위  $x_0$ 와 몸체 기울기  $\theta$ 의 시간응답  
 Fig. 8. Time response of travel displacement  $x_0$  and tilting angle  $\theta$  for an inclined road.

그림 8에서 알 수 있듯이 제어입력은 A 영역에서는 혼합 제어가 작고, B 영역에서는 LQR 제어가 큰 것으로 나타나는데, 전체적으로 제어입력은 근소한 차이를 알 수 있다.

## 6. 결론

본 연구에서는 경사면을 주행하는 차륜형 역진자의 동역학 방정식을 유도하고 그 경사면 영향을 고려한 제어기 후보를 제안하고 그 유효성을 시뮬레이션을 통해서 제시하였다.

후보 제어기로 제시한  $H_2/H_\infty$  혼합 상태피드백제어기는 다양한 제어목표를 만족하는 반면에 해석적으로 구하는 것이 곤란하므로 LMI 기법을 이용해서 계산되었다. 뿐만 아니라 차륜형 역진자는 구조적으로 제어에 필요한 모든 상태변수가 얻어지는 특징이 있으므로 상태피드백 제어기가 채용되었다.

LMI 기반의 혼합제어기는 다양한 설계목표를 감안할 수 있는 특징이 있으므로 LQR과 같은 단순 상태피드백 제어기보다 양호한 성능을 나타내고 있으며, 본 연구의 결과는 외형적으로는 상태피드백 제어기이므로 적절한 튜닝과정을 통해서 실제 실험장치에 즉시 적용될 수 있는 특징이 있다.

## 참고 문헌

- [1] P. L. Kapitza, in *Collected Papers of P. L. Kapitza*, edited by D. Ter Haar (Pergamon, London, 1965), p.174.
- [2] 정승현, 최정내, 오성권, "회전형 역진자 시스템에 대한 계층적 공정경쟁 기반 유전자 알고리즘을 이용한 최적 Fuzzy 제어기 설계," *한국지능시스템학회 논문지*, Vol. 18, No. 2, pp. 236-242, 2008.
- [3] 신호선, 추준욱, 이승하, 이연정, "3차원 도립진자 시스템의 구현 및 퍼지 제어," *퍼지 및 지능 시스템학회 논문지*, Vol. 13, No. 2, pp. 137-147, 2003.
- [4] [http://www.segway.com/aboutus/press\\_releases/pr\\_120301.html](http://www.segway.com/aboutus/press_releases/pr_120301.html).

- [5] [http://www.toyota.co.jp/jp/news/08/Aug/nt08\\_0805.html](http://www.toyota.co.jp/jp/news/08/Aug/nt08_0805.html).
- [6] J. Searock, B. Browning, M. Veloso, "Turning Segways into Soccer Robots," *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Sendai, Japan, pp.1029-1034, 2004.
- [7] R. O. Ambrose, R. T. Savely, S. M. Goza, P. Strawser, M. A. Dftler, I. Spain, N. Radford, "Mobile Manipulation using NASA's Rbonaut," *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation*, New Orleans, US, pp.2104-2109, 2004.
- [8] K. Furuta, H. Kajiwara, K. Kosuge, "Digital control of a double inverted pendulum on an inclined rail," *International Journal of control*, Vol. 32, No. 5, pp.907-924, 1980.
- [9] F. Grasser, A. D'Arrigo, S. Colombi, A. C. Rufer, "JOE: A Mobile, Inverted Pendulum," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 49, No. 1, Feb. pp.107-114, 2002.
- [10] O. Matsumoto, S. Kajita, K. Tani, "Estimation and Control of the Attitude of a Dynamic Mobile Robot Using Internal Sensors (in Japanese)," *Journal of Robotic Society of Japan*, Vol.8, No.5, pp.37-46, 1990.
- [11] K. NONAMI, S. Sivrioglu, "Active Vibration Control Using LMI-Based Mixed  $H_2/H_\infty$  State and Output Feedback Control with Nonlinearty," *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control KOBE*, Japan, pp.161-166, 1996.
- [12] Pascal Gahinet, Arkadi Nemirovski, Alan J. Laub, Mahmoud Chilali, *LMI Control Toolbox For Use with Matlab*, 1995.

## 저 자 소 개



### 이세한(Se-Han Lee)

1989년 : 고려대 기계공학과 졸업  
 1991년 : 고려대 대학원 기계공학(공학석사)  
 2002년 : 고려대 대학원 기계공학(공학박사)  
 2004년~현재 : 경남대학교 기계자동화  
 공학부

관심분야 : 강인제어, 자동화 로봇, 메카트로닉스  
 Phone : 055-249-2149  
 E-mail : leesehan@kyungnam.ac.kr



### 이상용(Sang-Yong Rhee)

1982년 : 고려대 산업공학과 졸업  
 1984년 : 고려대 대학원 산업공학(공학석사)  
 1992년 : 포항공대 대학원 산업공학(공학박사)  
 1992년~현재 : 경남대학교 컴퓨터공학부  
 교수

관심분야 : 컴퓨터 비전, 뉴로-퍼지, 지능로봇, 생체인식  
 Phone : 055-249-2706  
 E-mail : syrhee@kyungnam.ac.kr