

論文

DOI:10.5139/JKSAS.2010.38.12.1153

부분 내재적 조화 균형법을 이용한 주기적인 2차원 비정상 유동 해석

임동균*, 박수형**, 권장혁***

2-D Periodic Unsteady Flow Analysis Using a Partially Implicit Harmonic Balance Method

Dong-Kyun Im*, Soo Hyung Park** and Jang Hyuk Kwon***

ABSTRACT

An efficient solution method for harmonic balance techniques with Fourier transform is presented for periodic unsteady flow problems. The present partially-implicit harmonic balance treats the flux terms implicitly and the harmonic source term is solved explicitly. The convergence of the partially Implicit method is much faster than the explicit Runge-Kutta harmonic balance method. The method does not need to compute the additional flux Jacobian matrix from the implicit harmonic source term. Compared with fully implicit harmonic balance method, this partial approach turns out to have good convergence property. Oscillating flows over NACA0012 airfoil are considered to verify the method and to compare with results of explicit R-K(Runge-Kutta) and dual time stepping methods.

초 록

본 연구에서는 주기적 비정상 유동 해석을 위해 푸리에 변환을 이용하는 조화 균형법의 효율적인 해법을 제안한다. 내재적으로 유속항을 처리하고 외재적으로 조화 원천항을 처리하였다. 외재적 조화 균형법 보다 더 빠르게 수렴 시킬 수 있으며 내재적 조화 균형법을 적용할 때 추가되는 자코비안 행렬을 처리할 필요가 없다. 또한 완전 내재적 기법에 상응하는 수준의 수렴안정성을 확인할 수 있었다. 2차원 비정상 유동 문제로 피칭하는 NACA0012 익형에 적용하였으며 이중 시간 적분법 및 외재적 Runge-Kutta 기법의 해와 매우 일치하는 결과를 얻었다.

Key Words : Periodic Unsteady flow(비정상 주기운동), Harmonic Balance Method(조화 균형법), Partially-Implicit method(부분 내재적 기법)

1. 서 론

비정상 유동에 대한 수치해석 기법으로 기존에 사용되었던 Runge-Kutta 시간 적분법이나 이

중시간 적분법은 계산 시간이 많이 소요되므로 주파수 영역기법을 이용한 연구가 최근에 이루어지고 있다[1-3]. 주파수 영역기법을 적용하면 기존의 계산 시간에 비해 최대 7배 이상 계산 시간을 절감할 수 있는 것으로 알려져 있다. 그러나 기존의 주파수 영역 기법은 외재적 시간 적분법을 주로 적용해 오고 있어서 CFL 수에 대한 제한으로 주파수 영역기법이 가지는 효과를 충분히 나타내는데 한계가 있다. 또한, 많은 수의 조화함수를 적용할 경우, 조화함수의 수에 비례하는 계

† 2010년 9월 4일 접수 ~ 2010년 11월 25일 심사완료

* 정회원, 한국과학기술원 기계항공시스템학부

** 정회원, 건국대학교 항공우주정보시스템공학과

교신저자, E-mail : pish@konkuk.ac.kr

서울시 광진구 화양동 1번지

*** 정회원, 한국과학기술원 기계항공시스템학부

산비용을 감수해야 한다.

이러한 이유로 최근의 주파수 영역기법에 대한 연구는 내재적으로 조화 원천항을 처리하는 방향으로 연구 중이며 Woodgate 등[4]은 유속항과 조화 원천항을 내재적으로 처리하여 외재적으로 처리할 때 발생하는 문제를 해결하기 위한 시도를 하였다. 하지만 조화 원천항을 내재적으로 처리하기 위해서는 발생하는 복잡한 유속 자코비안 행렬의 처리방안을 강구해야만 한다. 이러한 이유로 조화 함수의 개수가 증가할 경우 잔류치 값이 수렴함에 따라 발산하는 경향을 나타내었다. Thomas 등[5]은 내재적으로 조화 원천항을 처리하기보다는 CFL 수의 제한을 피하기 위해 외재적인 유속항과 조화 원천항에 안정성 분석 방법으로 생성된 푸리에 배열 행렬(Fourier collocation matrix)로 구성된 역행렬을 곱함으로 안정성을 내재적 기법의 수준으로 향상시켰으나 역행렬을 계산하는 과정이 무시할 수 없을 만큼 계산 시간을 증가시키게 된다.

본 연구에서는 유속항을 내재적으로 처리하고 조화 원천항을 외재적으로 처리함으로 추가적인 유속 자코비안 행렬을 생성시키지 않으며 내재적 기법의 수준까지 수렴 안정성을 높이는 부분 내재적 조화 균형법을 제안한다. 이러한 경우 주파수가 매우 크거나 매우 작을 때 수렴안정성에 영향을 미칠 수 있지만, 대부분의 비정상 유동 조건을 고려할 때, 극단적 주파수 영역이 본 기법에 매우 미미하게 영향을 줄 것으로 판단된다. 본 기법을 사용할 경우 매우 쉽게 기존의 해석자에 주파수 영역기법을 적용할 수 있으며 조화 함수의 수와 무관하게 매우 좋은 수렴 안정성을 나타낼 수 있다.

II. 본 론

2.1 조화 균형법

기존 해석자의 지배방정식을 이용하여 주파수 영역 기법의 지배방정식을 유도해 보면, 먼저 일반적인 시간영역의 지배방정식을 식 (1)과 같이 나타내며

$$F(t) = \frac{dQ(t)}{dt} + R(t) = 0 \quad (1)$$

주파수 영역 기법을 적용하기 위해 지배방정식의 해인 Q 값과 잔류치인 R 값이 주파수 ω 로 시간에 주기적이라고 가정한다면, 푸리에 급수로 Q 와 R 을 식 (2)와 식 (3)과 같이 표현할 수 있다.

$$Q(t) = \hat{Q}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{Q}_{cn} \cos(\omega nt) + \hat{Q}_{sn} \sin(\omega nt)) \quad (2)$$

$$R(t) = \hat{R}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{R}_{cn} \cos(\omega nt) + \hat{R}_{sn} \sin(\omega nt)) \quad (3)$$

이때, 충분한 조화 함수의 수 N_H 로 식 (2)와 (3)을 식 (4)와 (5)로 나타낼 수 있다.

$$Q(t) = \hat{Q}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\hat{Q}_{cn} \cos(\omega nt) + \hat{Q}_{sn} \sin(\omega nt)) \quad (4)$$

$$R(t) = \hat{R}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\hat{R}_{cn} \cos(\omega nt) + \hat{R}_{sn} \sin(\omega nt)) \quad (5)$$

또한 식 (1)에서 각각의 항이 주기적이라고 가정하였으므로 식 (1)의 좌변을 식 (6)과 같이 충분한 조화 함수의 수 N_H 로 표현할 수 있다.

$$F(t) = \hat{F}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\hat{F}_{cn} \cos(\omega nt) + \hat{F}_{sn} \sin(\omega nt)) \quad (6)$$

식 (4)와 식 (5)에서 푸리에 계수는 시간에 대한 함수가 아니므로 식 (1)에 대입하여 식 (6)의 각각의 항과 비교하여 나타내면 식 (7)~(9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{F}_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} I(t) dt = \hat{R}_0 \quad (7)$$

$$\hat{F}_{cn} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} I(t) \cos(\omega nt) dt = \omega n \hat{Q}_{sn} + \hat{R}_{cn} \quad (8)$$

$$\hat{F}_{sn} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} I(t) \sin(\omega nt) dt = -\omega n \hat{Q}_{cn} + \hat{R}_{sn} \quad (9)$$

식 (6)은 식 (1)로부터 0 이 되고 각각의 푸리에 계수 역시 0이 되어야 하므로, 식 (10)~(12)와 같은 연관관계가 결정된다.

$$\hat{R}_0 = 0 \quad (10)$$

$$\omega n \hat{Q}_{sn} + \hat{R}_{cn} = 0 \quad (11)$$

$$-\omega n \hat{Q}_{cn} + \hat{R}_{sn} = 0 \quad (12)$$

식 (10)~(12)를 행렬형태로 표현 하면 식 (13)과 같다.

$$\omega M \hat{Q} + \hat{R} = 0 \quad (13)$$

식 (13)에서 M 행렬은 $N_T (= 2N_H + 1) \times N_T$ 으로 그 각각의 값은 $M(n+1, N_H+n+1) = n$ 와 $M(N_H+n+1, n+1) = -n$ 이고 이외의 값은 0이

다. 즉 식 (14)와 같이 나타낼 수 있으며 식 (13)의 \hat{Q} 와 \hat{R} 은 식 (15)와 같이 정리된다.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & N_H \\ 0 & -1 & & 0 & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & -N_H & 0 & & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \widehat{Q}_0 \\ \widehat{Q}_{c1} \\ \widehat{Q}_{c2} \\ \cdot \\ \widehat{Q}_{cNH} \\ \widehat{Q}_{s1} \\ \cdot \\ \widehat{Q}_{sNH} \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} \widehat{R}_0 \\ \widehat{R}_{c1} \\ \widehat{R}_{c2} \\ \cdot \\ \widehat{R}_{cNH} \\ \widehat{R}_{s1} \\ \cdot \\ \widehat{R}_{sNH} \end{pmatrix} \quad (15)$$

여기서, \hat{Q} 와 \hat{R} 이 서로 비선형관계에 있으므로 식 (13)을 직접 해석하는 것은 매우 어려우므로 Hall 등[1]이 제안한 푸리에 변환식을 이용하여 시간 영역으로 식 (13)을 역변환시킨다. 먼저 주기($T = 2\pi/\omega$)를 등간격($\Delta t = 2\pi/(N_T\omega)$)으로 하여 Q 와 R 값을 식 (16)와 같이 나타내고 그 다음 푸리에 변환식을 이용해서 \hat{Q} 와 \hat{R} 을 식 (17)과 식 (18)과 같이 나타낸다.

$$Q_{hb} = \begin{pmatrix} Q(t_0 + \Delta t) \\ Q(t_0 + 2\Delta t) \\ \cdot \\ \cdot \\ Q(t_0 + T) \end{pmatrix}, \quad R_{hb} = \begin{pmatrix} R(t_0 + \Delta t) \\ R(t_0 + 2\Delta t) \\ \cdot \\ \cdot \\ R(t_0 + T) \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\hat{Q} = \mathcal{J} Q_{hb} \quad (17)$$

$$\hat{R} = \mathcal{J} R_{hb} \quad (18)$$

주파수 영역으로 변환된 지배방정식인 식 (13)에 식 (17)과 식 (18)을 대입하여 다시 정리하면 식 (19)와 같다. 이때 유속항의 계산을 용이하게 하기 위해서 유속항에 곱해지는 푸리에 변환식의 역행렬을 곱하여 $D (= \mathcal{J}^{-1} M \mathcal{J})$ 으로 치환하여 나타내었다.

$$\omega M \mathcal{J} Q_{hb} + \mathcal{J} R_{hb} = \omega \mathcal{J}^{-1} M \mathcal{J} Q_{hb} + \mathcal{J}^{-1} \mathcal{J} R_{hb} = 0$$

$$\omega D Q_{hb} + R_{hb} = 0 \quad (19)$$

가상시간 전진기법(Pseudo Time Stepping)을 적용하여 조화 균형 지배방정식을 다시 표현하면 최종적으로 식 (20)을 얻을 수 있게 된다.

$$\frac{dQ_{hb}}{d\tau} + R_{hb} + \omega D Q_{hb} = 0 \quad (20)$$

2.2 부분 내재적 시간 전진법

기존의 조화 균형법은 외재적 기법으로 해를 구하며 수렴 안정성을 위해서 CFL 수의 제한을 주었다. 최근 조화 원천항과 유속항 모두를 내재적으로 적용하기 위한 노력이 진행 중이지만 [4-5], 조화 원천항을 내재적으로 적용하였을 경우 발생하는 유속 자코비안 행렬을 효율적으로 해결하지 못하고 있는 실정이다. 즉, 사용된 임의의 가정으로 조화 함수의 적용가능한 개수의 제한을 받을 뿐만 아니라 계산 비용과 지배 방정식의 복잡성이 문제가 되고 있다. 이에 본 연구에서는 아래와 같은 부분 내재적 시간 전진 기법을 제안하여 이상의 문제를 해결하였다.

조화 원천항을 외재적으로 처리하고 잔류치를 내재적으로 처리하여 식 (20)을 2차원 지배방정식에 적용하여 식 (21)과 같이 나타낸다.

$$\frac{dQ}{d\tau} + \frac{dG^{m+1}}{d\xi} + \frac{dH^{m+1}}{d\eta} + \omega D Q^n = 0 \quad (21)$$

여기서, 유속항을 식 (22)와 식 (23)의 선형화 기법을 적용하여 위 식을 식 (24)와 같이 나타낼 수 있다.

$$G^{m+1} = G^m + A(\Delta Q^n) \quad (22)$$

$$H^{m+1} = H^m + B(\Delta Q^n) \quad (23)$$

$$\frac{\Delta Q^n}{\Delta \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} A \Delta Q^n + \frac{\partial}{\partial \eta} B \Delta Q^n$$

$$= -\frac{\partial G^n}{\partial \xi} - \frac{\partial H^n}{\partial \eta} - \omega D Q_{k=1, N_T}^n \quad (24)$$

유속 자코비안 행렬인 A 와 B 는 각 요소가 4×4 행렬의 $N_T \times N_T$ 행렬이며 식 (25)와 식 (26)와 같이 나타낼 수 있다.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial G_1}{\partial Q_2} & \cdot & \frac{\partial G_1}{\partial Q_{N_T}} \\ \frac{\partial G_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial G_2}{\partial Q_2} & \cdot & \frac{\partial G_2}{\partial Q_{N_T}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial G_{N_T}}{\partial Q_1} & \frac{\partial G_{N_T}}{\partial Q_2} & \cdot & \frac{\partial G_{N_T}}{\partial Q_{N_T}} \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial H_1}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial Q_{N_T}} \\ \frac{\partial H_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial H_2}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial H_2}{\partial Q_{N_T}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_{N_T}}{\partial Q_1} & \frac{\partial H_{N_T}}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial H_{N_T}}{\partial Q_{N_T}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

하지만 식 (16)에서 유속벡터 각각의 유속항은 각각의 보존변수만의 함수이므로 대각항을 제외한 나머지 항은 모두 0으로 간주할 수 있기 때문에, 식 (27)과 식 (28)과 같이 간략화된 내재적 유속 자코비안 행렬을 얻을 수 있게 된다.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial Q_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial G_2}{\partial Q_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial G_{N_T}}{\partial Q_{N_T}} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial Q_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_2}{\partial Q_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial H_{N_T}}{\partial Q_{N_T}} \end{bmatrix} \quad (28)$$

여기서 주목할 지점은 간략화된 대각항이 기존의 유속 자코비안 행렬과 같다는 점이다. 따라서 조화균형법의 추가적인 자코비안 행렬을 별도로 처리하지 않고서도 조화균형법을 적용할 수 있게 된다.

또한 주파수 영역 기법의 문제점이라고 생각할 수 있는 메모리 요구량에서도 본 수치기법은 장점을 가지고 있다. 완전 내재적 주파수 영역 기법(fully implicit harmonic balance method)[4]을 적용할 때 추가되는 유속 Jacobian 행렬은 비 대각항을 포함하므로 대단히 큰 행렬이 되고, 이에 따라 사용 메모리가 크게 증가하게 된다. 반면, 부분 내재적 대각 ADI 기법[8]은 오직 대각항으로만 구성되어 추가적인 메모리가 거의 필요치 않게 된다. 물론 조화함수의 개수에 따른 메모리 요구량은 거의 선형적으로 증가하지만, 증가되는 메모리의 양은 현재의 PC 클러스터의 성능으로 충분하며 병렬처리를 통해서 해석될 수 있으므로 문제되지 않는다고 판단된다.

최종적으로 식 (21)을 식 (30)과 같이 부분 내재적 기법이 적용된 식을 유도할 수 있게 되며, 조화원천항만 추가하여 기존의 수치해석기법으로 조화균형법을 적용할 수 있게 된다.

$$T_n = (I + \Delta t \delta_\xi A + \Delta t \delta_\eta B)_n, n = 1, 2, \dots, N_T \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_{N_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{N_T} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$S_n = -\frac{\partial G_n}{\partial \xi} - \frac{\partial H_n}{\partial \eta} - \omega D_{n,k} Q_k, k = 1, N_T$$

2.3 진동하는 NACA0012 해석

본 연구의 효율성을 검증하기 위해서 NACA0012 날개꼴의 진동하는 유동장을 해석해 보았다. 주기적으로 변화하는 받음각은 식 (31)과 같이 시간에 따른 함수로 나타낼 수 있으며,

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t) \quad (31)$$

$k(= \omega b / 2U_\infty)$ 는 무차원주파수로 0.0814, α_m 은 0.016, α_0 는 2.51, 마하수 0.755으로 해석하였으며 사용된 격자는 O형태 격자로 그림 1과 같으며 129×33의 크기를 사용하였다.

또한 조화 함수의 수에 따라 수렴성 및 계산 시간에 미치는 영향을 보기 위해 최대 20개의 조화함수를 적용하였다. 그림 2에서 보듯이 조화함수의 수가 증가하여도 해의 수렴성에 영향을 미치지 않으며 오히려 조화함수가 증가하면서 수렴성이 더 좋아짐을 확인할 수 있다. 또한 외재적 기법이 적용된 기존의 주파수 영역 기법과 비교

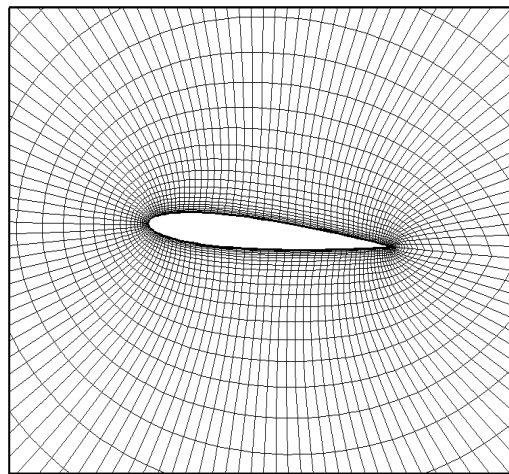


그림 1. NACA0012, O형태 격자(129×33)

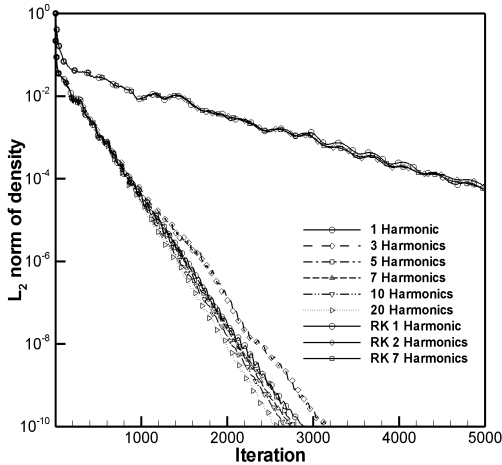


그림 2. 조화 함수의 수에 따른 외재적 기법과 수렴성 비교

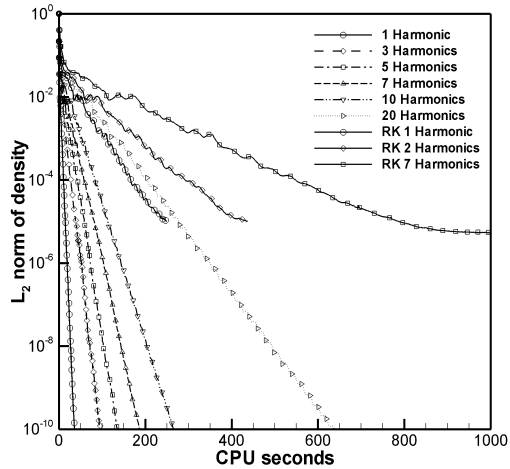


그림 4. CPU 시간에 따른 수렴성 비교

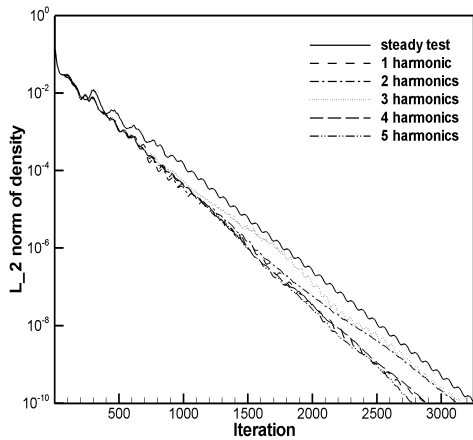


그림 3. 정상유동 수렴곡선과 수렴성 비교

할 때 수렴성이 매우 뛰어나음을 보여주고 있다. 완전 내재적 조화 균형법을 적용하기 위해서는 복잡한 유속 자코비안 행렬을 구성해야하며 이 행렬을 계산하기 위해서 적용된 가정으로 인해 조화함수의 수가 증가할 때 수치적 잔류치가 증가하는 것을 참고문헌[4]을 통해서 알 수 있다. 이러한 이유로, 주파수 영역에서 정상 유동일 때 동일한 내재적 기법을 적용하여 수렴성을 비교함으로써 본 연구의 부분 내재적 기법과 완전 내재적 기법간의 성능차이를 유추해 보았다. 그림 3에서 실선은 정상 유동의 수렴성을 나타내며 각각의 점선은 본 연구의 기법을 적용하여 조화 함수의 수에 따라 수렴성을 나타내었다. 기존의 내재적 기법이 가지는 수렴성을 본 연구의 기법이 적용되었을 경우에도 유지시켜 주는 것을 확인할 수 있었다.

그림 4에서 계산에 사용된 CPU 시간을 비교할 때, 대부분 200초 안에 충분히 수렴된(1E-10) 해를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다. 20개의 조화함수를 사용했을 경우, 계산시간은 크게 증가하였으나 조화함수 개수에 따라 선형적으로 증가함을 볼 수 있다. 그럼에도 불구하고, R-K (Runge-Kutta) 기법에서 조화함수를 1개 사용한 것과 동등한 정도의 계산시간이 소요됨을 알 수 있다.

표 1은 조화 함수의 수(HB)에 따른 계산 시간을 비교하여 나타내었다. 본 연구의 기법으로 수렴된 해를 구할 때 기존의 외재적 기법에 비해서 5배 이상 빠른 해를 구할 수 있음을 확인하였다. 이중시간 적분법에 의해서 구한 해와 비교할 때,

표 1. 시간영역 기법과 계산시간 비교 (sec)

HB	Present method (RMS=1E-10)	Dual Time Stepping
1	36.45	782.00 (360step per Cycle, 40 Sub-iteration, 1-Cycle)
2	67.36	
3	96.01	
4	115.32	
5	135.94	
6	176.39	
7	187.58	
8	212.77	
9	236.70	
10	267.05	
20	640.96	

조화 함수의 수가 3개 이상일 때 수렴된 해를 얻을 수 있고, 이때 7배 이상 빠른 해를 얻을 수 있음을 확인 할 수 있다.

각각의 조화 함수의 수에 따라 해의 결과값을 비교하기 위해 그림 5부터 7에서와 같이 이중 시간 적분법에 의한 결과와 비교하였다. 본 연구는 수치기법의 효율성 검증이 주요목적이므로, 이중 시간 적분법의 정확도는 참고문헌[6-7]을 참고하기 바란다. 조화 함수가 1개일 때도 그림 5에서 양력 계수의 값들을 비교해 볼 때 매우 정확하게 일치함을 알 수 있으며 그림 6의 항력 계수 분포와 그림 7의 모멘트 계수 분포를 비교할 때 대부분의 결과가 이중 시간 적분법에 의해 얻은 해와 동등한 결과를 도출하며, 적은 수의 조화 함수로도 동등한 결과를 보여줌을 알 수 있다.

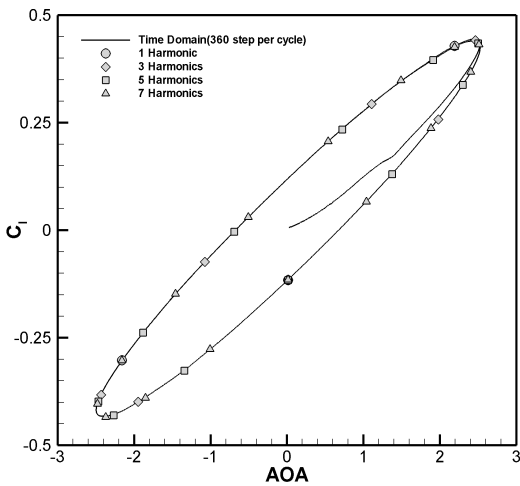


그림 5. 조화 함수에 따른 양력 계수 비교

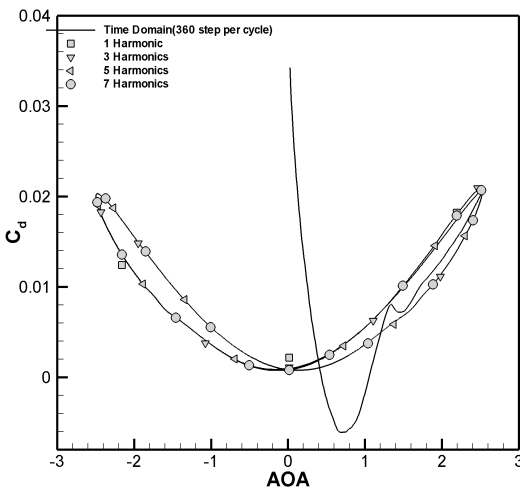


그림 6. 조화 함수에 따른 항력 계수 비교

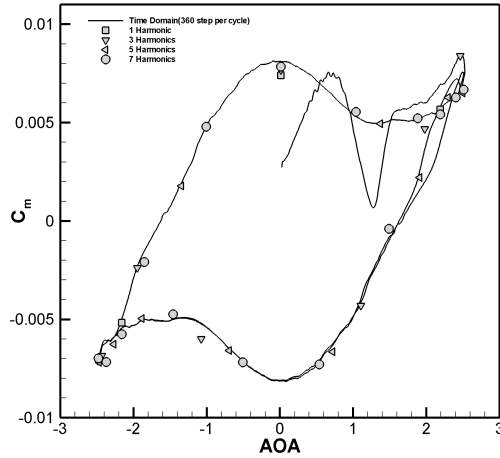


그림 7. 조화 함수에 따른 모멘트 계수 비교

표 2. 외재적 기법과 계산 시간 비교 (조화함수 7개 적용, sec)

Present method (RMS=1E-10)	Explicit R-K (RMS=1E-05)	Dual Time Stepping
187.58	1806	782.00 (360step per Cycle, 40 Sub-iteration, 1-Cycle)

외재적 R-K(Runge-Kutta)기법을 사용하는 주파수 영역 기법과 비교하여 결과를 그림 8부터 10에 나타내었으며 조화 함수는 7개를 적용하였다. 표 2를 통해서 계산 시간을 비교해 볼 때, 빠르게 해석 가능함을 확인할 수 있다.

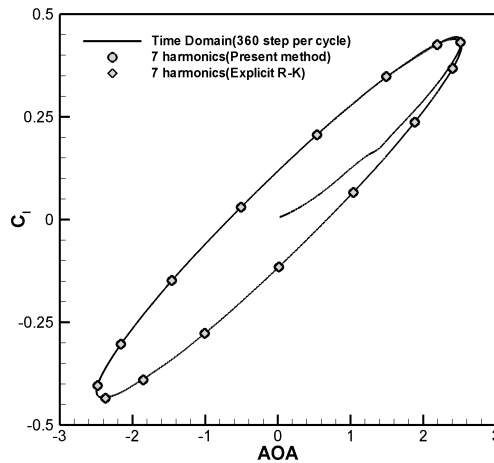


그림 8. 외재적 RK기법과 양력 계수 비교

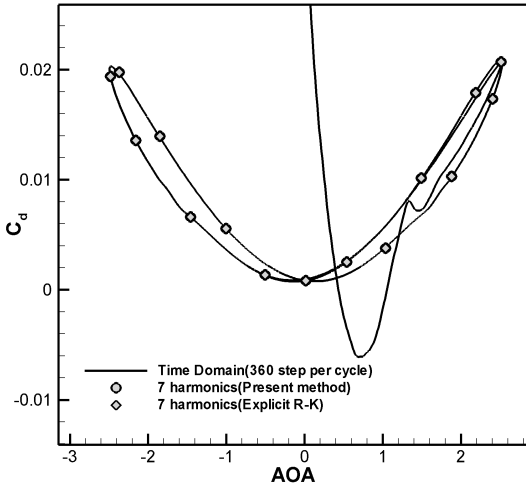


그림 9. 외재적 RK기법과 항력 계수 비교

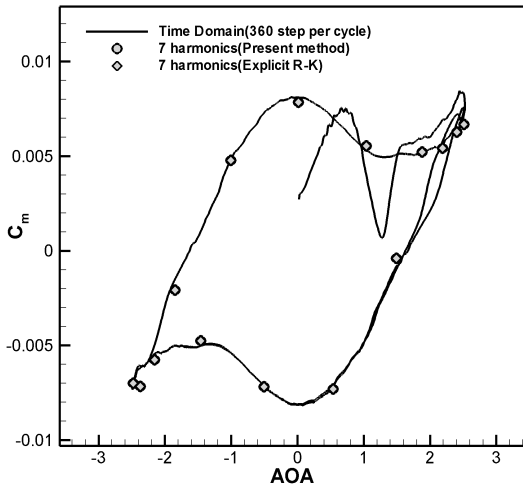


그림 10. 외재적 RK기법과 모멘트 계수 비교

모든 결과가 본 연구에서 제안한 부분 내재적법의 결과와 일치함을 확인할 수 있다. 이를 통해 본 연구의 수치해석 기법이 시간영역 비정상해법인 이중시간 적분법(Dual time stepping)과 R-K(Runge-Kutta)를 이용한 조화 균형법과 동일한 결과를 제시함을 검증하였다. 또한 조화 함수 1개를 적용하였을 때 받음각 2.189와 -2.157, 0.016에서 압력 계수 분포를 외재적 기법의 결과와 그림 11과 그림 12에 나타내었다. 조화 함수를 1개 사용한 경우조차도 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있었고, 조화 함수의 개수를 증가시켰을 경우 그림 12처럼 받음각 0.016에서 이중 시간 적분법의 결과와 매우 유사해짐을 확인할 수 있다.

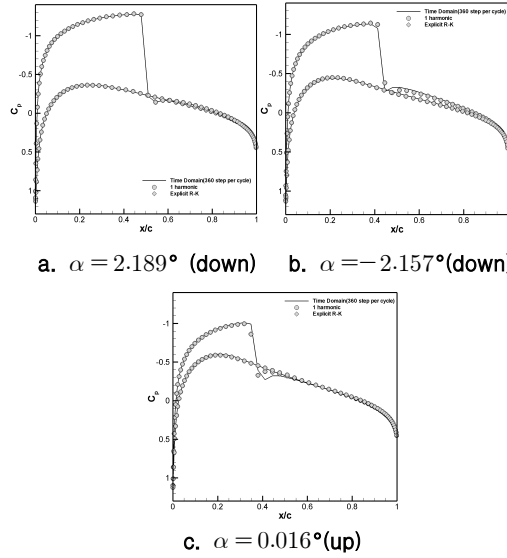


그림 11. 각 받음각에서 순간 압력 계수 분포

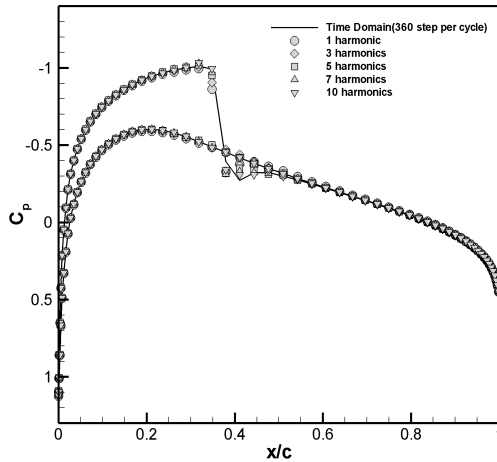


그림 12. 받음각 0.016에서 조화 함수에 따른 압력 계수 분포

또한 높은 주파수 영역에서 조화 함수 수에 대한 효율성 검증을 위해서 빠른 진동을 가지는 무차원주파수 0.5일 때, 조화 함수 수에 따른 비정상 표면 압력 계수를 비교하였다.

$$\widehat{C}_{p,hb} = TC_{p,hb} \quad (32)$$

비정상 표면 압력 계수는 복소수로 표현되는데 각각의 조화함수에 따른 표면 압력계수를 식 (32)에서처럼 푸리에 변환식을 이용하여 주파수 영역에서의 압력 계수 값을 얻었으며[5] 그림 13은 실수부의 비정상 표면 압력 계수 분포이며 그림 14는 허수부의 비정상 표면 압력 계수 분포이다.

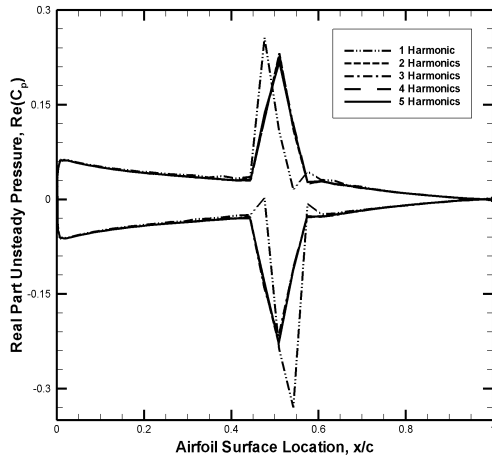


그림 13. 실수부의 비정상 표면 압력 계수 분포

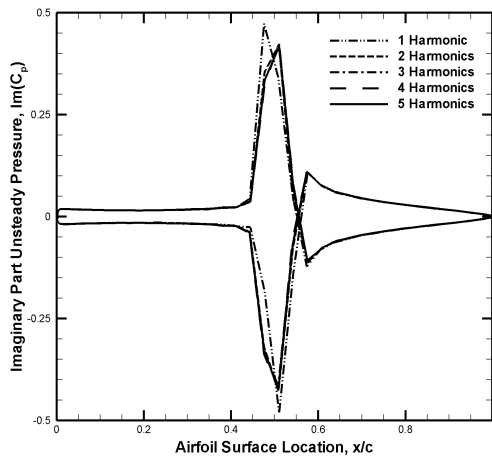


그림 14. 허수부의 비정상 표면 압력 계수 분포

실수부의 압력 분포를 보면 조화 함수의 수가 2개 이상일 때 결과값이 서로 수렴된 값을 나타내며, 이는 더 이상의 조화함수가 필요 없음을 의미한다. 허수부 압력 분포 역시 2개 이상의 조화 함수로 수렴된 계산 값을 보여줌을 확인할 수 있다. 매우 큰 무차원주파수일 경우에도 2~3개의 조화 함수로도 충분히 수렴된 해를 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

III. 결 론

본 연구에서는 주기적인 비정상 유동을 해석하기 위해서 푸리에 변환을 이용한 주파수 기법을 사용하였으며 부분 내재적 기법을 적용한 조화 균형법을 개발하였다. 완전 내재적 기법(Fully Implicit Method)을 사용한 조화 균형법 보다 기

존의 해석자에 적용하기 용이하며, 복잡한 자코비안 행렬을 해석하지 않아도 되는 장점이 있다. 외재적 기법이 적용된 조화 균형법과 비교할 때 매우 빠른 수렴성을 보여 주었으며 조화 함수의 수와 무관하게 좋은 수렴성을 나타내었다. 또한 높은 주파수의 주기운동일 경우에도 2~3개의 조화 함수로 수렴된 해를 얻을 수 있음을 확인할 수 있었다.

본 연구에서 개발된 부분 내재적 기법을 적용하여 주기적인 비정상 유동을 해석할 경우, 최대 7배 이상의 계산 비용 절감 효과를 얻을 수 있으며, 3차원에서는 더 큰 효과를 발휘할 것으로 예상된다.

후 기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No.2010-0015440).

참고문헌

- 1) K C. Hall, J. P. Thomas, and W. S. Clark, "Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique", *AIAA Journal*, Vol. 40, No. 5, pp. 879-886, May 2002.
- 2) M. McMullen, A. Jameson, and J. Alonso, "Application of a Non-Linear Frequency Domain Solver to the Euler and Navier-Stokes Equations", 40th *AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, January 14-17, 2002/Reno, NV.
- 3) M. McMullen, A. Jameson, and J. Alonso, "Demonstration of Nonlinear Frequency Domain Methods", *AIAA Journal* Vol.44, No.7, pp. 1428-1435, 2006.
- 4) M. A. Woodgate and K J. Badcock, "Implicit Harmonic Balance Solver for Transonic Flow with Forced Motions", *AIAA Journal* Vol.47, No.4, pp. 893-901, April 2009.
- 5) J. P. Thomas, C. H. Custer, E. H. Dowell, and K.C. Hall, "Unsteady Flow Computation Using a Harmonic Balance Approach Implemented about the OVERFLOW 2 Flow Solver", 19th *AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, June 22-25, 2009, San Antonio, Texas.

6) Park, S.H., Kim, Y.S., and Kwon, J.H., "Prediction of Damping Coefficients Using the Unsteady Euler Equations", *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 40, No. 3, pp. 356-362, 2003.

7) 고진환, 김지웅, 변도영, 박수형, "이동경계 문제의 전산유체역학을 위한 체적격자변형코드",

한국항공우주학회지, 제 36권, 제11호, pp. 1049 - 1055, 2008.

8) Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of an Implicit Approximate - Factorization Algorithm", *Journal of Computational Physics*, Vol. 39, pp. 347-363, 1981.