대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 20 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 20, No. 4, 511-528. Nov 2010

기하 증명에서 기호의 역할과 기호 중재에 의한 직관의 형성

김 희[*]·김 선 희[**]

기하적 성질을 이해하고 받아들이는 데 있어서 중요한 직관은 학습을 통해서도 형성될 수 있다. 본 연구는 2명의 학생을 대상으로 기호화, 문장화, 증명 과제를 수행하게 하여 기하 증명에서 기호의 중재에 의한 직관의 형성 과정을 살펴본다. 학생들에게 자명하고 당연하게 여겨지는 단정적 직관의 유무에 따라 기호가 어떤 역할을 하는지 살펴보고, 예상적 직관이 형성되지 않은 증명 문제에서 학생들이 기존 지식을 활용하여 증명을 완성하는 과정을 기호의 의미작용에 의해 설명한다. 마지막으로 피타고라스의 정리에 대해 기호의 중재에 의해서 결론적 직관이 형성되는 과정을 살펴본다.

Ⅰ. 서론

증명은 공리계를 갖춘 특정 체계 안에서의 논리적 연역 과정이자 결과이며, 수학적 결과를 정당화하고 설명하는 활동이다. 기하의 공리적 구성은 매우 난해하며 그러한 공리계의 구성은 관련된 기하학적 명제의 관련성에 대한 깊은 통찰을 요구한다(우정호, 1998). 학교수학에서 증명은 중학교 2학년 기하 영역에서 처음 등장하는데, 이때 학생들이 증명해야 하는 명제는 때로 직관적으로 이해되기도 하고 때로 논리적인 과정을 거쳐야만 납득되는 것이기도 하다. 직관과 논리의 상보성은 기하 학습에서 중요하며, 권석일·홍진곤(2003)은 발견의 맥락과 정당화의 맥락이 통합된 형태로 기하 증명을 지도할 필요가 있다고 보고, 논리와 직관의 상보성을 강조하였다.

직관은 대상을 즉각적으로 파악하는 작용이나 인지를 의미한다. 직관은 학생들의 기존 지식에 영향을 받는데, 학습되어 고착된 지식은 학생들에게 직관의 한 형태로서 작용할 수 있으며 수학 지식 자체가 학생들의 직관이 되기도 한다. 하지만 증명을 접하는 학생들에게 직관적으로 당연한 명제는 증명의 필요성을 느끼지 못하게 하여 증명의 의미 자체를 무색하게 할 수 있으며, 직관적으로 납득되지 않는 명제를 논리적 과정에 의해 증명하는 것은 명제에 대한 이해나 참이라는 확신 없이 진행될 수 있기 때문에 증명의 의미가 제대로 살아날 수 없다. 즉 기하에서 학생들의 직관은 필요한 것이지만 논리적 사고와 연결된 증명에서 상반되는 역할을 담당하기도 한다. 따라서 기하 학습에서 이러한 직관을 잘 활용할 수 있도록 하는 것은 매우 중요한 일이다.

기하 증명에서 직관에 관한 연구는 몇몇 학자에 의해 이루어졌지만 수학교수 학습과 관련하여 실질적이고 체계적인 연구는 미약하다. 이에 본 연구는 기하 증명에서 명제나 증명 과정에 대한 학생들의 직관이 어떻게 형성되는지

* 신라대학교 교육대학원, kheeya5@naver.com
** 신라대학교, mathsun@silla.ac.kr, 교신저자

구체적으로 살펴보고자 한다.

많은 학생들은 증명에 있어 논리적 추론 과정을 나타내는 데 어려움을 겪는다. 가정에서 시작하여 결론에 도달하는 과정에서 학생들은 아이디어와 절차를 논리적으로 나타내야 하며 이것은 주로 수학 기호를 통해 나타내는 언어로 이루어진다. 기하 명제를 증명할 때 학생들의 직관과 직관적 사고는 기호의 언어로 나타내져야 한다. 기호는 수학 학습에서 인지적 측면에서 다양한 역할을 담당한다(김선희, 이종희, 2002). 학생들은 기호를 사용함으로써 자신의 생각을 정리하고 압축된 형태로 나타낼 수 있으며 이후의 과정에 대한 안내를 받을 수 있다. 기호는 증명에서도 이러한 인지적 측면의 역할을 담당할 것으로 본다. Fischbein(1987/2006)은 직관을 그 역할에 따라 단정적, 추측적[1], 예상적, 결론적 직관으로 구분하였는데, 본 연구는 특히 단정적 직관이 형성되지 않은 명제의 증명에서 기호의 역할을 살펴볼 것이다. 그리고 예상적 직관이 형성되어 있지 않을 때 기호 사용에 의해 어떤 증명 과정이 전개되는지 알아볼 것이다.

Vygotsky(1985)는 심리적 도구인 기호, 기호 가운데서도 언어가 중재하여(mediate) 인간의 사고 및 행동을 질적으로 변형시킨다고 보았다. 기호와 같은 심리적 도구는 인간의 사고 과정에 매개되어 정신 기능을 촉진시키는 보조 기능만을 하는 데 그치지 않고 정신 기능을 변형시킬 수 있다. 이에 본 연구에서는 기호가 기하 증명에서 결론적 직관을 형성시키는 데 중재 역할을 담당할 것으로 본다. 수학의 증명은 기호를 사용한 표현으로 나타나야 하며 이러한 과정은 학생들의 직관 형성에 있어서도 어떤 역할을 담당할 것이다. 이에 따라 본 연구는 다음의 연구문제를 조사하려 한다.

첫째, 단정적 직관이 형성되지 않은 기하 증명에서 기호의 역할은 무엇인가?

둘째, 기호 중재에 의하여 증명 과정을 어떻게 설명할 수 있는가?

셋째, 기하 증명에서 기호 중재에 의해 결론적 직관은 어떻게 형성되는가?

II. 이론적 배경

이 장에서는 직관과 기호에 대하여 살펴본다.

1. 직관

직관(intuition)은 자연 과학, 예술, 인문 과학 분야 등에서 학문적 발달에 중요한 역할을 수행해 왔다(Fischbein, 1987/2006). 직관은 많은 학자들의 계속된 연구에도 불구하고 그 정의나 의미, 그리고 기능에 대한 합의가 이루어지지 못한 채 다양한 의미로 이용되고 있다(Noddings & Shore, 1984). 직관을 한 가지로 정의하거나 그 속성을 규정할 수는 없지만 학자들의 견해와 직관에 대한 연구를 통해 직관의 특성을 몇 가지 추출할 수 있다.

첫째, 직관은 지식을 발견하는 도구이다. 직관은 논리적이거나 합리적인 어떤 추론 과정도 거치지 않는 즉각적인 이해를 통해 지식을 발견하는 도구이다. 이것은 직관이 어떤 의식적인 정신 활동 없이도 지식을 발견하는 수단이라는 것을 의미한다. 직관은 모종의 알 수 없는 신비스러운 힘의 작용이며, 또한 인과적인 설명을 거부하기 때문에 과학적으로는 모호한 의미를 내포하고 있다(Fischbein, 1987/2006). 하지만 학습의 효과에 의해 학생들은 새로운 직관을 형성할 수 있으며, 본 연구는 이 후자에 더 관심을 둘 것이다.

1) 추측적 직관은 학생의 해결 노력에서 명시적이지 않기 때문에 본 연구에서 관찰할 수 없는 것으로 보았다.

둘째, 직관은 무의식적인 추론이다. 직관은 일반적인 사고 절차를 벗어나 매우 신속한 분석적 처리와 관련된 추론이다. 예를 들면, 수학 문제에서 주어진 정보를 모두 고려하기 전에 문제의 구조를 재구성하는 과정을 통해 신속하게 해답에 이르는 추론은 직관이라 할 수 있다. 본 연구에서 이러한 추론은 직관적 사고라 할 것이다.

셋째, 직관은 지각(perception)의 한 형태이다. 이것은 형태심리학자들이 즐겨 사용하는 통찰[2]이라는 용어와 그 의미를 동일시 할 수 있다. 형태심리학자들에 따르면, 통찰은 문제해결자가 문제 상황을 새로운 상황으로 지각할 때 일어난다고 한다. 예를 들어, Gauss의 일화에서 1부터 n까지의 합 문제를 시각적 도구로 재구조화할 때 통찰이 일어났던 것 같이 문제 구조에 대한 전체적인 지각을 통해 문제를 재구성하여 새로운 상황으로 인식하게 되는 중요한 기제로 통찰의 역할을 들고 있는 것이다.

수학 교육에서 직관에 대한 연구는 Fischbein (1987/2006)에 의해 많이 이루어졌다. 그는 직관이 이론적이며 이해 가능한 대상임을 밝히고, 직관에 대한 여러 연구 결과를 조직화하여 수학교육을 위해 개발된 아이디어의 교육적 시사점을 제시하고자 체계적인 연구를 수행하였다. 그는 직관을 그 역할에 따라 단정적 직관, 예상적 직관, 결론적 직관으로 분류하였다. 먼저, 단정적 직관은 “두 점은 한 직선을 결정한다.” 또는 “전체는 그 각각의 부분보다 더 크다.”와 같이 확실하고 자명하며 자기모순이 없는 것으로 받아들여진 다양한 사실의 표상 또는 해석이다(Fischbein, 1987/2006). 학생들이 기하 명제를 당연하다고 지각한다면 그것은 단정적 직관이 활용된 것이다. 본 연구에서는 단정적 직관의 유무에 따라 기호가 어떤 역할을 담당하는지 알아볼 것이다.

다음으로, 예상적 직관은 문제에 대한 분석적, 완전히 개발된 풀이에 선행하는 예비적, 전체적 견해를 나타낸다(Fischbein, 1987/2006). 사람들은 단정적 직관을 통하여 직선 관념, 유클리드의 제5공준 등과 같은 관념, 명제를 자명한 것으로 받아들이지만, 예상적 직관은 단순히 외관상 주어진 사실을 확립하는 것이 아니다. 발견으로서, 문제에 대한 풀이로서, 그리고 이전의 풀이 노력의 갑작스런 결과로서 나타나는 것이다. 증명해야 할 명제를 학생들이 보고 어떤 과정으로 이 명제가 증명될 것인지 생각할 때 예상적 직관이 활용될 수 있을 것이다. 예상적 직관이 떠오르지 않을 때에도 학생들은 증명을 진행할 수 있다. 본 연구는 두 번째 연구 문제에서 이를 기호의 의미작용으로 설명하려 한다.

결론적 직관은 이전에 정교화된 문제에 대한 풀이의 기본적 아이디어를 전체적, 구조화된 시각으로 요약하는 것이다(Fischbein, 1987/2006). Hadamard(1949)는 아무리 복잡한 수학적 주장이라고 해도 그것을 하나의 전체적 아이디어로 파악하지 못하는 한 그것을 이해했다고 느끼지 못한다고 했다. 증명이 이루어진 후 그 전체 과정을 일목요연하게 인식하고 아이디어의 흐름을 파악하는 것은 결론적 직관이라 할 수 있을 것이다. 본 연구에서는 피타고라스의 정리의 여러 증명 방법을 보고 학생들이 기호의 중재에 의해 결론적 직관을 형성하는 것을 살펴볼 것이다.

Langley & Jones(1988; 이대현, 2008, 재인용)의 직관에 관한 이론은 정교하게 조직화된 기억이 직관에서 중요하다고 하였다. 즉, 수학교육에서 문제 해결을 위한 유용한 구조가 인출될 수 있는 직관의 발현을 위한 체계적인 교육이 필요하다. 이것은 이차 직관의 발현과 밀접한 관련을 맺고 있다(Fischbein, 1987/2006). Fischbein은 직

2) 통찰은 논리적이지도 분석적이지도 않은 직관의 과정을 통해 나타나는 부가적인 현상으로 볼 수 있다(이대현, 2008).

관의 발현이 아무런 사전 지식 없이 일어나지는 않는다고 하였다. 서로 관계가 없었던 것처럼 보였던 사실을 연결시켜 유용한 조합을 산출하는 것은 보다 많은 정보들이 활성화되어 있을수록 연결의 가능성이 높아져 직관이 발현될 가능성이 높다. 즉, 직관적 사고가 형성되기 위해서는 수학에 대한 배경 지식을 어느 정도 갖추고 있어야 한다.

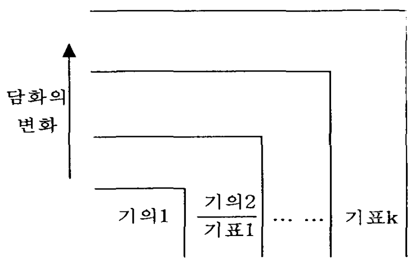
또한 Fischbein은 직관을 그 기원에 따라 일차적 직관과 이차적 직관으로 구분하였다. 일차적 직관은 체계적인 교육과 무관한 개인적인 경험의 결과로 발달하는 인지적 신념이다. 이차적 직관은 체계적인 지도의 영향으로 새로운 인지적 신념이 창안된 것이다. 즉 이차적 직관은 개인의 자연스러운 정상적인 경험에 의해 생성되는 것이 아니며, 학습된 개념으로부터 신념으로 전환된 것이다. 본 연구에서는 형식적 증명이나 경험적 뒷받침 같은 외재적 정당화에 의해 형성된 지식이 경험과 학습을 통해 고착되어 학생들이 즉각적으로 당연시 하게 된다면 이를 이차적 직관으로 보았다. 즉, 학습에 의해 형성되는 지식 또한 학생에게 직관이 될 수 있다고 보고, [그림 Ⅳ-3]에서와 같이 증명 과정에서 등장하는 아이디어와 추론의 결과도 직관이라 명명하기로 한다. 그리고 예상적 직관이 없더라도 기호화와 증명의 학습을 통해 결론적 직관이 형성되는 것을 살펴볼 것이다.

2. 기호

수학 기호는 상징, 일상 언어, 시각적 표현을 포함하지만, 본 연구에서는 a, b 등의 문자와 규약된 상징을 기호라는 용어로 사용한다. 형식적인 수학 활동이 제대로 이루어지기 위해서는 기호를 감지하고 지각하고 다루는 감각이 학습자에게 요구된다(Bergsten, 1999). Rothbart(1998)가 추론 문제의 해결을 추론 문항, 기호화된 문장, 해답, 문장화의 과정으로 제시하고 있듯이, 기하 증명에서 형식적으로 나타내어진 명제를 기호로 나타내는 기호화와 기호로 나타내어진 명제를 문장으로 나타내는 문장화의 과정은 중요하다. 현행 교육과정에서 초등학교와 중학교 1학년에서의 기하는 직관 기하로, 중학교 2학년에서의 기하는 논증기하로 분류된다. 논증기하에서는 증명을 지도하게 되는데, 조영미(2000)는 기호화 작업은 다음 학년에 다루게 될 논증기하 학습을 위한 준비작업의 성격이 짙다고 하였다. 또한 서동엽(1999)은 증명에서 기호화 및 문장화는 주어진 명제에서 가정과 결론을 분리하기 위한 필수적인 선결 단계가 된다는 점에서 선수학습이 필요하다고 하였다. 이에 본 연구에서는 학생들의 증명 과정에서 직관이 어떻게 형성되는지 살펴보기 위해 학생들에게 기호화와 문장화의 과제를 제시하고 증명 전에 이를 지도하였다.

Saussure는 기호를 기의(signified)와 기표(signifier)로 이루어진 이원적 구조를 가진 것으로 보았다(Trabant, 1996/2001). 그는 기호를 기의와 기표가 동전의 양면처럼 분리될 수 없이 통일되어 있는 것으로 정의하였다. 이때 기표와 기의는 모두 심적인 실재이며, 두뇌 속에서 연상 작용을 통해 결합된다. 이 연상 작용은 기표가 주어졌을 때 그에 상응하는 기의를 상기시키고 마찬가지로 하나의 기의가 주어졌을 때 기표를 불러낸다. Saussure에게 기호는 기표와 기의의 양면성을 지닌 양가적인 것이다. Saussure의 기호 모델에서 기호는 기표와 기의의 관계로 성립되지만, 이원론적 모델은 기표와 기의의 이중성을 가진 기호의 정적인 상태를 설명할 수 있고 어떤 기호의 기표에 해당하는 것이 다른 기호의 기의가 되어가는 의미작용을 통해 동적인 과정을 묘사할 수 있다. Hall(2000)은 [그림 Ⅱ-1]과 같이 어떤 기호의 기표가 다른 기호의 기의가 되는 의미 작용

을 통해 일상의 상황에서 나타난 수학과 추상적인 수학의 갭을 연결하고 있다고 설명하였다.



[그림 Ⅱ-1] 기호의 의미작용 고리
(Hall, 2000)

본 연구에서도 [그림 Ⅱ-1]의 의미작용을 증명 과정에 적용하여, 학생들이 기호를 사용함으로써 새로운 직관이 지속적으로 생성되면서 증명이 수행되는 것을 설명할 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

본 연구는 기하 증명에 있어 기호화 과정이 학생들의 직관적 사고에 미치는 영향을 알아보기 위한 사례연구이다. 본 연구는 사례연구로서 관찰 및 면담 방법을 따르고 있으므로 연구자의 주관이 개입될 수도 있지만, 질문지나 표준화 검사 등에서 측정할 수 없는 개인의 내면적 특성이나 사고 과정을 구체적으로 파악할 수 있다는 의의를 가진다.

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 경남 지역의 중학교 3학년 여학생 1명(S1)과 고등학교 1학년 여학생 1명(S2)이다. 연구가 시작되기 전에 연구자는 두 학생에게 본 연구의 취지와 참여자의 자세에 대하여 설명하고 적극적인 참여 의사와 동의를 얻어 연구 대상으로 선정하였다. 학생 S1, S2 모두 증명을 학습한 경험은 있으나 그 횟수가 매우 적고, 주로 교사의 설명식 수업으로 지도를 받아 직접 증명 문제를 해결한 경험은 가지고 있지 않았다. 학생 S1, S2의 선행학습 내용을 파악하기 위하여 개별면담을 실시한 결과, 두 학생 모두 각 학년의 1학기까지의 내용을 학습한 상태였다. 즉 학생 S1, S2는 기하 영역에 대해 각각 중학교 2학년, 중학교 3학년까지의 내용을 학습한 상태에서 본 연구에 참여한 것이다. 또한, 학교 성적을 기준으로 학생들의 수학 성취도를 살펴보면, 학생 S1은 상 수준, 학생 S2는 중 수준이라 할 수 있다.

사전 검사로 학생들의 기호화 수준을 조사하였다. 학생들의 사전 학습 상태와 기호 활용 정도를 확인하기 위한 것으로 지필 검사가 실시되었다. 증명에 있어 기호화 및 문장화를 조사하기 위한 서동엽(1999)의 지필검사 내용을 참고하여 제작된 지필검사 내용은 크게 세 가지 요소가 관련된 복합적인 측면을 지니고 있다. 첫 번째 요소는 평행, 수직, 합동 기호와 같은 기본적인 기호의 이용이다. 두 번째 요소는 정의와 관련된 기호화, 문장화이다. △ABC가 '이등변삼각형'임을 '$\overline{AB}=\overline{AC}$'와 같이 기호화 하거나 '□ABCD에서 $\overline{AB}/\!/\overline{DC}$, $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$'라는 성질에서 '□ABCD는 평행사변형'이라고 문장화하고 정의와 성질을 구분하는 것과도 관련된다. 이러한 도형의 정의 이외에도 '$\overline{AB}$와 직선 m과의 교점을 C라고 할 때 $\overline{AC}=\overline{CB}$이면 직선 m은 $\overline{AB}$를 이등분한다.'와 같은 기호화나 문장화도 함께 다루어졌다. 세 번째 요소는 일반문장을 기호화하여 조건문으로 바꾸거나, 기호로 표현된 조건문을 일반문장으로 바꾸는 것이다.

학생 S1, S2 모두 기본적인 기호의 이용에는 어려움이 없었으나 문장화 및 기호화 문제에서는 각각 정도의 차이를 보이며 어려움을 겪었

다. 도형의 정의와 성질을 구분하고 있는 학생 S1은 도형의 정의와 관련된 문장화 및 기호화 문제를 잘 해결하였다. 반면에 도형에 따라 정의와 성질의 구분이 곤란한 학생 S2는 도형의 정의와 관련된 문장화 및 기호화 문제를 일부 해결하지 못하였다. 또한 도형의 정의와 성질이 복합적으로 연결되어 있는 일반 문장을 기호화하여 조건문으로 바꾸거나 기호로 표현된 조건문을 문장으로 바꾸는 문제에서, 학생 S1은 주어진 일반 문장 또는 기호로 표현된 조건문을 바르게 해석하고 이해하였지만 그것을 표현하는 기술 부족으로 문장화 및 기호화에 있어 부분적 오류를 범하였다. 학생 S2는 처음부터 일반 문장 또는 기호로 표현된 조건문을 이해하지 못하고 문장화 및 기호화에 있어 전체적 오류를 범하였다.

2. 연구 절차

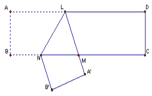
연구는 2010년 2월~4월에 2~3시간씩 총 8차시로 진행되었다. 중학교 3학년까지의 기하 영역에서 도형의 성질, 닮음비, 닮음도형, 도형의 합동, 중선, 무게중심, 수직이등분선, 각의 이등분선, 피타고라스의 정리 등의 내용을 기초로 하여 실험 과제 형식은 크게 문장화 및 기호화 과제와 기하 증명 과제로 분류된다. 문장화 및 기호화 과제는 증명의 구성 요소 중 기호화를 파악하기 위해 사용된 서동엽(1998)의 지필검사 문항을 참고하여 제작하였다. 기하 증명 과제는 중등 교과 내용을 중심으로 많은 학생들이 자명한 것으로 받아들이는 명제와 그렇지 않은 명제를 선정하여 제작하였다. 총 8차시에 걸쳐 학생들에게 실험한 과제 내용과 지도 내용은 다음과 같다.

1차시에는 사전 검사의 기호화 수준에 더하여 개별면담을 통해 학생들의 기하 학습 상태를 조사하였다. 지필검사에서 학생들에게는 문장으로 기술된 기하 명제를 기호화하기, 기호로 나타내어진 명제를 문장화하기를 하게 하였다. 학생 S1은 도형의 정의와 성질을 구분하여 개념을 형성하고 있었으며, 중학교 2학년 범위에 속한 기하학적 성질을 정확하고 다양하게 인지하고 있었다. 단순한 기호 표현은 잘 하였으나 다양한 수학적 성질을 기호화하여 정리하는 것은 부담스러워 하였다. 학생 S2는 중학교 3학년까지의 기하학적 성질을 인지하고 있었지만, 도형의 정의와 성질을 잘 구분하지 못하였다. 학생 S2는 학생 S1과 마찬가지로 단순히 기호 표현에 대한 거부감은 없었으나 다양한 수학적 성질을 기호화하여 정리하는 것은 어려워했다.

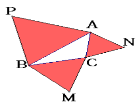
2차시에는 학생들에게 진술의 복잡성, 증명의 난이도, 대수화의 필요 정도 등의 차이를 둔 [그림 Ⅲ-1]의 7가지 명제를 제시하고, 각 명제에 대한 학생들의 직관과 증명 과정을 조사하였다. 명제의 특성은 학생들이 갖는 직관에 영향을 줄 것이다. 주어진 명제의 증명은 학생이 원하는 방법으로 자유롭게 이루어졌다. 또한 면담을 통하여 학생들에게 제시한 기하 내용의 명제를 크게 세 가지로 구분하게 하였다. 학생들에게 단정적 직관으로 인식되는 명제가 무엇인지 알아보려는 것이다. 그 결과 학생들은 [그림 Ⅲ-1]의 명제 중 1, 2, 3, 4는 자명한 것으로 받아들이는 직관적으로 당연시하는 명제, 5, 6은 자, 각도기, 색종이 등의 도구를 사용하여 직접 확인하여 직관적으로 추측 가능한 명제, 7은 직관적으로 추측하기 어려운 명제로 구분하였다. 단정적 직관으로 인식되는 명제는 1~4였다. 두 학생 모두 [그림 Ⅲ-1]의 명제를 증명하지는 못했다.

3차시에는 [그림 Ⅲ-1]의 기하 내용의 명제를 증명하는 데 필요한 기호화 학습을 실시하였

1. 이등변삼각형이면 두 밑각의 크기는 같다.
2. 두 밑각의 크기가 같은 삼각형은 이등변 삼각형이다.
3. 평행사변형이면 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
4. 사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{BC}=\overline{DC}$이면 $\angle B=\angle D$ 이다.
5. 직사각형 ABCD를 그림과 같이 접었을 때, 겹치는 부분의 $\triangle LNM$은 이등변삼각형이다.



6. $\triangle ABC$는 임의의 삼각형이고 $\triangle ABP$, $\triangle BCM$, $\triangle CAN$이 모두 정삼각형이면 $\overline{AM}:\overline{BN}:\overline{CP}$는 1:1:1이다.



7. 선분 AB 위의 점을 P라 하자. 선분 AP를 한 면으로 하는 정사각형의 넓이와 선분 PB를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이의 합이 최소가 될 때, $\overline{AP}:\overline{PB}=\sqrt{3}:4$이다.

[그림 Ⅲ-1] 학생들에게 제시한 기하 명제

다. 기호화 학습은 사전 검사를 응용하여 진행하였다. 연구자는 대체로 학생들의 증명 과정, 사고 과정 등을 관찰하고 분석하는 역할을 수행하였지만 3차시에는 기호화 학습을 진행하는 교사의 역할을 수행하였다.

4~6차시에는 2차시에 제시한 [그림 Ⅲ-1]의 명제를 다시 증명하게 하였다. 먼저 학생들에게 주어진 기하 명제를 어떻게 증명할 것인지에 대해 말하게 하여, 예상적 직관을 확인하고자 하였다. 주어진 문제를 증명하는 데 있어 수학적 기호를 적절히 사용한 방법과 수학적 기호를 사용하지 않은 말로 설명하기, 수학적 기호를 사용하지 않은 문장으로 서술하기, 색종이나 그림을 이용하여 나타내기 등의 방법을 행하게 하였다. 이와 같이 글, 그림, 기호로 증명을 하게 한 후 경우에 따라 연구자는 학생들이 말로 설명한 것을 다시 쓰거나 쓴 것을 다시 말로 설명하도록 요구하기도 하였다. 4차시에는 학생들이 직관적으로 당연시하는 명제(단정적 직관이 형성된 것), 5차시에는 직관적으로 추측 가능한 명제, 6차시에는 직관적으로 추측하기 어려운 문제를 제시하여 학생들의 증명 과정을 관찰하였다. 그리고 수업의 마지막에는 다음의 네 가지 기호화 과정으로 증명 문제를 해결하게 하였다.

- 주어진 명제의 가정과 결론을 기호로 나타내시오.
- 가정으로부터 추론할 수 있는 성질을 기호로 나타내시오.
- 위에서 기호로 나타낸 성질 중 결론에 이르는 데 유용한 성질을 기호로 나타내시오.
- 기호를 적절히 사용하여 명제를 증명하시오.

7~8차시에는 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법에서 두 학생이 형성하는 결론적 직관을 분석하였다. S1은 학교에서 피타고라스의 정리를 배우지 않았지만, 정리의 내용은 알고 있는 상태였다. S2는 피타고라스의 정리를 간단하게 활용하는 문제를 해결할 수 있으나 증명을 하지는 못하였다. 연구자는 피타고라스 정리의 증명 방법을 [그림 Ⅲ-2]와 같이 5가지로 제시하여 주어진 방법에 따라 피타고라스의 정리를 이해하고 증명하게 하였다.

다양한 증명 방법에서 직관적 사고를 활용하도록 모눈종이, 색종이 등의 도구를 사용하게 하였다. 연구자는 문제해결 과정을 관찰하면서 필요할 때마다 학생들이 문제를 어떻게 이해하고 접근하고 있는지 알아보기 위해 질문을 하였다. 또한 경우에 따라 학생들에게 보조선 힌트를 제시하거나 문제와 관련된 그림이 그려져 있는 보조문제를 제공하였다. 연구자는 개별적으로 증명 문제를 해결하는 동안 학생들을 관찰하면서 기록하였으며, 학생들의 개별적인 증명 문제 해결 이후에는 학생들과 함께 증명 방법과 증명의 기호적 표현을 토론하고 정리하였다.

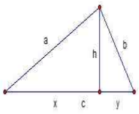
학생들의 사고과정을 분석하기 위한 자료는

연구자의 관찰 일지, 학생들의 증명 활동지, 비디오와 오디오 녹화 자료 등이다.

1. 유클리드 기하 증명

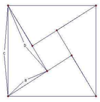
$\angle BAC = 90^{\circ}$ 인 직각삼각형 $\triangle ABC$의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그린 후 정사각형의 넓이를 이용하여 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$임을 증명하여라.

2. 사영정리를 이용한 증명



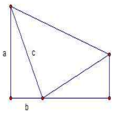
$a^2 = cx$, $b^2 = cy$, $h^2 = xy$를 이용하여, 피타고라스 정리를 증명하여라.

3. 바스카라 증명



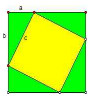
왼쪽 그림을 이용하여 피타고라스 정리를 증명하여라.

4. 사다리꼴 넓이의 분할을 이용한 증명



왼쪽 그림을 이용하여 피타고라스 정리를 증명하여라.

5. 정사각형 넓이의 분할을 이용한 증명



왼쪽 그림을 이용하여 피타고라스 정리를 증명하여라.

[그림 Ⅲ-2] 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법 (7~8차시)

Ⅳ. 연구 결과

1. 단정적 직관이 형성되지 않은 기하 증명에서 기호의 역할

기하 증명에서 학생들에게 단정적 직관에 의해 납득되는 명제인지 아닌지에 따라 기호의 역할을 살펴보았다.

연구 실험 초기(2차시)에 학생들은 증명 문제를 해결하는 데 많은 어려움을 겪었다. 학생 S1은 증명 방법을 탐색함과 동시에 그것을 기호로 표현하는 복합적 사고가 잘 이루어지지 않아 증명의 기호 표현에서 어려움을 겪었고, 학생 S2는 증명 방법의 탐색 과정이 거의 이루어지지 않아 대부분의 증명 문제를 백지로 제출하였다. 3차시에 기호화 학습이 진행되면서 학생들은 기호 표현에 익숙해지고 증명을 기호로 표현하는 용이함과 간결함을 인식하였다. 학생 S1은 예상적 직관으로 탐색한 증명 방법을 기호로 표현하여 증명의 완성도를 높이거나 자신의 지식을 기호로 정리함으로써 증명 방법을 찾아내기도 하였다. 학생 S2는 주어진 증명 문제를 가정과 결론으로 나누어 기호화함으로써 주어진 문제를 보다 잘 이해하고 논리적으로 문제를 해결해 나갔다.

실험 초기에는 도형의 정의와 성질을 잘 구분하지 못했지만 기호화 학습 후 도형의 정의와 성질을 구분하는 정확한 지식을 형성하여 주어진 기하 내용에 대한 직관적 사고를 형성하였다. 뿐만 아니라 가정으로부터 추론할 수 있는 여러 가지 성질을 기호화하여 정리하는 과정을 통해 스스로 증명 방법을 탐색하는 단계로까지 발전하게 되었다.

S2 : 기호로 쓰니 뭘 어떻게 해야 하는지 알겠어요.
R[3] : 처음엔 뭘 어떻게 해야 하는지 잘 모르겠던?
S2 : 네. 무엇부터 해야 하는지... 그냥 이등변삼각형 인데...
R : 근데 기호를 쓰니 어때?
S2 : 그냥... 정리가 되는 것 같아요. 근데 좀 복잡하긴 해요.
R : 뭐가 복잡해? 알파벳 표현이?
S2 : 네.
R : 그림 보고 말로 설명하는 게 더 편하겠지?

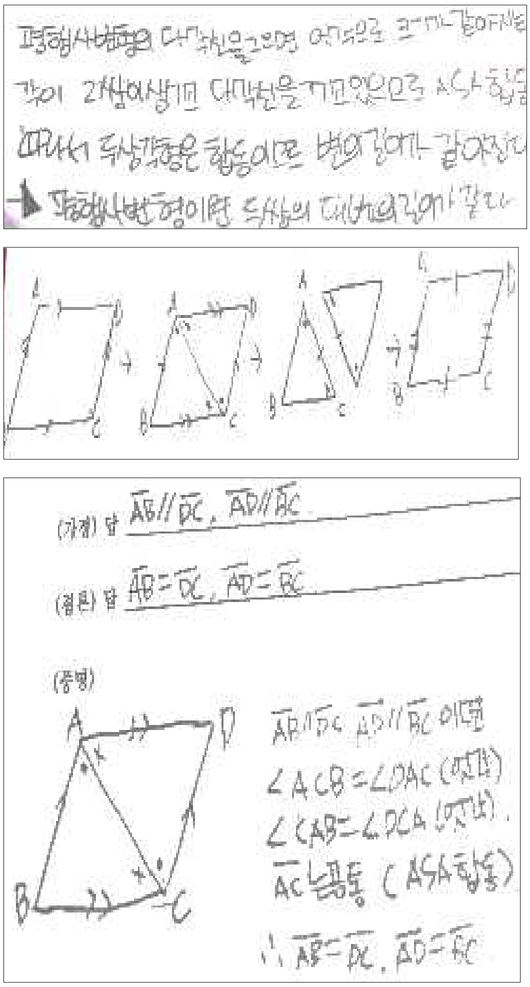
3) 연구자

S2 : 네.
R : 근데... S2는 처음에 어떻게 증명하는지 말로 설명 못했잖아?
S2 : 그 때는 이런 게 생각이 안 나서...
R : 기호화하다보니 생각이 난거야?
S2 : 네.

기호화에 익숙해진 학생들은 증명 문제를 보다 효율적으로 해결하였다. 기호화 학습 후 기호 표현에 익숙해졌을 때 4~6차시의 수업에서 글, 그림, 기호 표현에 따른 두 학생의 증명 과정을 단정적 직관 유무에 따라 조사하였다.

먼저, 학생들이 직관적으로 당연시하는 명제의 증명을 살펴본다. “이등변삼각형이면 두 밑각의 크기는 같다”, “두 밑각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다”, “평행사변형이면 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다”, “사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{BC}=\overline{DC}$이면 $\angle B=\angle D$이다” 등과 같이 직관적으로 당연시하는 도형의 성질을 학생들에게 제시하였다. 학생들이 직관적으로 당연시하는 기하 내용은 기하 학습에서 도형의 정의 못지않게 반복적으로 경험하여 익힌 지식이다. 학생들은 주어진 명제를 글, 그림, 기호로 각각 표현하여 증명하는 데 성공하였다. 두 학생 모두 세 가지 증명 표현 중 그림을 가장 선호하였고 글을 가장 기피하였다. 특히 학생들은 주어진 명제의 조건에 따라 그림을 그린 후 증명 방법을 탐색해 나갔기에 기호를 사용한 증명에서도 그림을 보조적 도구로 사용하였다. 즉, 학생들은 시각적 표현이라는 직관적 모델의 기호화를 통해 형식적 증명을 논리적으로 완성시켰다.

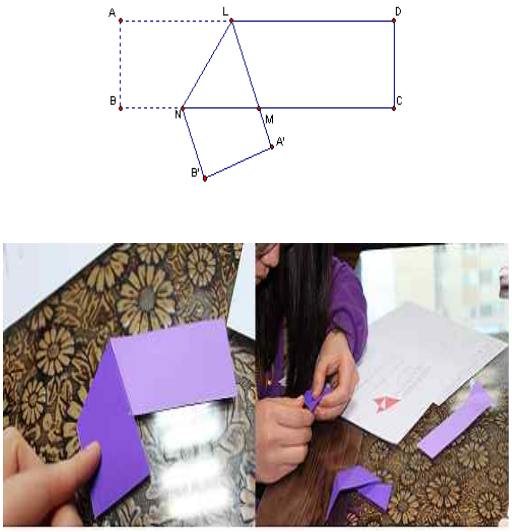
[그림 Ⅳ-1]은 학생 S1이 “평행사변형은 두 쌍의 대변의 길이가 같다.”에 대한 증명을 글, 그림, 기호로 각각 표현한 것이다.



[그림 Ⅳ-1] 학생 S1의 글, 그림, 기호 표현 (직관적으로 당연시하는 기하 내용 증명)

다음으로, 종이 접기나 자, 각도기 등을 이용하여 직관적으로 추측 가능한 기하 명제를 제시하고, 글, 그림, 기호 표현에 따른 학생들의 증명 과정을 조사하였다.

문제: 그림과 같이 직사각형 ABCD를 접었을 때, 겹치는 부분의 △LNM은 어떤 삼각형인지 추측하고 왜 그런지 증명하시오.



[그림 Ⅳ-2] 종이접기를 활용한 직관의 형성

학생들은 주어진 기하 내용을 종이접기, 자, 각도기 등을 이용하여 직관적 사고를 한 후 증명하였다. 글과 기호는 직관적 판단을 증명하는 데 있어 직접적인 도구로 사용했지만, 그림 표현은 단지 글과 기호로 증명하는 데 있어 보조도구로만 사용했다. 두 학생 모두 증명에 있어 그림을 보조 도구로 사용한 기호 표현을 가장 선호하였다. 두 학생은 글로 증명할 때는 증명 방법의 탐색에 막막함을 느끼고 증명을 성공하지 못하였지만, 그림을 보조도구로 사용한 기호 표현으로 아이디어를 잡은 후 기호의 의미를 글로 풀어 쓰는 방식을 취했을 때 증명을 할 수 있었다.

R : 왜? 글보다 기호로 먼저 증명했어?
S2 : 글로 처음 증명하기는 막막해서... 뭘 해야 하는지...
S1 : 간단해서요. 그냥...정리가 잘 되요.

직관적으로 추측하기 어려운 기하 내용에 대한 학생들의 증명 문제로 제시된 것은 “선분 AB 상의 점을 P라 하자. 선분 AP를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 선분 PB를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이가 최소가 될 때, $\overline{AP}\cdot\overline{PB}$를 구하여라.”이다. 이 문제에서 학생들은 주어진 기하 내용을 눈으로 확인할 수 없어서 결과를 추측할 수 없다고 답했다. 즉, 학생들은 주어진 내용을 직관적인 모델로 나타내기 어려운 상황에서 문제를 해결하였기에 많은 어려움을 겪었다. 두 학생 모두 글, 그림으로 문제를 해결하는 것에는 실패하였고, 기호로 문제를 해결하는 데도 직관적 추측이 가능했던 문제보다 많은 시행착오를 겪었다.

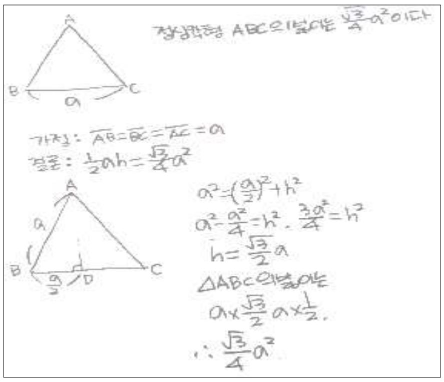
학생들은 단정적 직관이 형성되어 있는 내용과 직관적으로 추측 가능한 내용보다 직관적으로 추측하기 힘든 내용의 증명에 더 어려움을 겪었다. 단정적 직관이 형성된 기하 내용에 대한 증명에서는 그림, 글, 기호 표현에 모두 성공하였고, 직관적으로 추측이 가능한 기하 내용에 대한 증명은 글과 기호 표현에 성공하였으며, 직관적으로 추측하기 힘든 기하 내용에 대한 증명은 기호 표현에만 성공하였다. 즉, 주어진 명제에 대하여 글과 그림을 통한 증명에는 한계가 있는 것이다. 학생들은 주어진 명제에 대한 직관적 모델을 통해 증명 방법을 탐색한 후 실제 증명에 있어서는 기호를 사용할 때 증명을 완성할 수 있었다. 단정적 직관이 형성된 내용보다 직관적으로 추측하기 힘들어 직관적 모델로 나타낼 수 없는 기하 내용의 증명에서 기호를 사용할 때 증명이 성공적으로 이루어질 수 있었다. 이를 볼 때, 기하 증명에서 기호의 사용은 필수적이며, 기호를 사용함으로 인해 학생들은 증명의 아이디어가 생성될 수 있었다.

2. 기하 증명 과정에서 기호의 의미작용

단정적 직관이 형성되지 못한 내용에서 학생들은 증명 방법에 대한 예상적 직관 또한 쉽게

형성되지 않았다. 하지만 학생들은 다양한 수학적 지식의 연결을 통해 증명에 성공했다. 본 연구는 이를 기호의 의미작용을 통하여 탐색하였다. 기호의 의미가 기표가 되면서 등장한 지식은 학생들에게 고착되어 활용될 수 있는 것으로, 기원을 볼 때 이차적으로 형성된 직관이라 할 수 있다. 이에 학생들이 주어진 명제를 가정과 결론으로 나누고 가정의 의미를 판단하는 수학적 지식을 직관1, 직관1로부터 추론되는 결과를 직관2, 직관2로부터 추론되는 결과를 직관3이라 하여, 의미작용의 고리로 증명 과정을 분석해 보았다. 직관1로부터 추론되어 나타나는 결론은 학생들에게 수학적 지식의 형태로 고착되어 또 다른 직관의 형태로 나타난다고 보았다.

[그림 Ⅳ-3]은 학생 S1이 “한 변의 길이가 a인 정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이다.”임을 증명한 것이다.



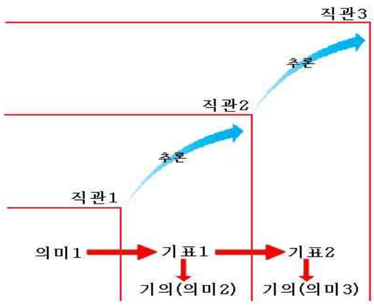
직관1 : 정삼각형의 한 변의 길이가 a이면 세 변의 길이가 모두 a이다.
직관2 : 세 변의 길이가 모두 a인 삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이다.
직관3 : 세 변의 길이가 모두 a인 삼각형은 높이가 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이다.

[그림 Ⅳ-3] 학생 S1의 증명 과정

학생 S1은 주어진 명제를 “정삼각형 ABC의 한 변의 길이가 a이다.”인 가정과 “ △ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이다.”인 결론으로 나누고, 가정의 의미에 대한 직관에서 기호화를 통해 수학적 지식을 추론해 나가는 연속적인 과정으로 증명을 하였다. 직관1에서 직관2, 직관2에서 직관3으로 추론하는 과정에서 이루어진 기호화 과정은 기표와 기의가 연결된 연속적인 과정이다. 즉, 학생 S1은 주어진 명제의 가정을 ‘ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=a$’으로 기표하고(직관 1), 점 A에서 $\overline{BC}$에 수선을 긋고 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D로 하여 △ABD에서 $\overline{BD}=\frac{a}{2}$는 밑변, $\overline{AB}=a$는 빗변, $\overline{AD}$는 높이의 기의를 산출하였다. 이러한 기의는 피타고라스의 정리를 적용할 수 있는 조건이 되고, 피타고라스의 정리를 적용한 결과 $\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$으로 기표되었다(직관 2). $\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$는 △ABD의 높이인 동시에 △ABC의 높이인 기의를 가지기에 △ABC의 넓이를 구할 수 있는 조건이 된다.

학생 S1은 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$가 된다는 사실(직관 3)을 증명하였기에 정확한 추론적 직관(지식)을 형성했다고 할 수 있다. 직관1은 정당화가 필요 없이 스스로 참이라고 느끼는 자명성, 직관2와 직관3은 자명하지는 않지만 증명 등을 통하여 자신이 확신을 얻을 때 확실한 것으로 수용한다는 내재적 확실성을 가지고 있다는 점에서 직관의 특성을 지닌다.

학생들이 증명에 성공한 과정을 분석하면 직관이 추론을 통해 새로운 직관을 생성하는 것을 계속 관찰할 수 있다. 이를 [그림 Ⅱ-1]을 이용하여 [그림 Ⅳ-4]로 정리해볼 수 있다.



[그림 Ⅳ-4] 기하 증명에서 기호 중재에 의한 직관의 변환 과정

학생들은 직관1에 다양한 수학적 성질을 적용하여 직관2, 직관3으로 추론해나가며 증명을 완성시켰다. 이러한 추론 과정에서 학생들의 직관을 연결, 발전시키는 데 유용한 도구로 사용된 것이 기호이다. 학생들은 기호화를 통해 자신의 직관을 다양한 수학적 성질을 적용할 수 있는 조건으로 정리하였다. 주어진 명제를 가정과 결론으로 나누고 그 의미1에 대한 직관1을 정리하여 기표1함으로써 직관1은 다양한 수학적 성질을 적용할 수 있는 조건으로서의 기의(의미2)도 가지게 되었다. 이러한 기의(의미2)를 조건으로 수학적 성질을 적용한 결과, 또 다른 직관2를 추론할 수 있었다. 직관2에서 직관3을 추론하는 과정에도 기표2, 기의(의미3)를 통한 기호화가 연속적으로 일어났다. 증명 과정에서 기호의 중재는 이와 같이 이루어졌다.

학생들은 예상적 직관을 갖지 못한 증명 문제에서 기존의 수학적 지식의 도움을 받아 기호화를 통해 증명 과정을 이끌어내고, 기호를 사용함으로 인하여 증명 과정을 요약하고 증명을 진행할 수 있는 안내를 받을 수 있었다. 그리고 이 과정은 기표와 기의의 연속적인 과정의 의미작용으로 설명될 수 있었다. 명제에 따라 증명 과정은 직관4, 직관5 등으로 확장되거나 직관2로 축소될 수도 있다.

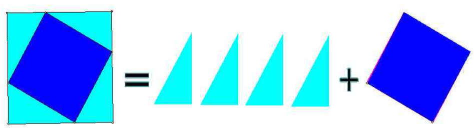
3. 기호 중재에 의한 직관의 형성

이 절에서는 학생들에게 친숙한 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법에서 기호 중재에 의한 결론적 직관의 형성 과정을 분석하였다.

우선 학생들에게 피타고라스 정리에 대한 증명 방법을 스스로 탐색하고, 그것을 증명할 것을 제시했다. 두 학생 모두 피타고라스 정리를 직각삼각형 그림과 함께 "$\triangle ABC$에서 $\angle BAC=90^\circ$ 이면 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$"로 기호화하였지만 그것의 증명 방법에 대한 예상적 직관은 보여주지 못하였다. 연구자는 학생들에게 피타고라스 정리의 다양한 증명 방법을 [그림 Ⅲ-2]의 직관적 모델로 제시하였다. 그 결과 두 학생 모두 정사각형 넓이의 분할을 이용한 증명방법을 가장 쉽게 느꼈고 유클리드 기하 증명 방법을 가장 어려워했다. 각각의 경우에 형성된 직관을 살펴본다.

가. 넓이 분할 방법

학생들이 가장 간단한 증명방법이라고 인식한 정사각형의 넓이의 분할을 이용한 증명방법을 대표적으로 살펴보자. 우선 정사각형 넓이의 분할에 대한 직관적 모델은 [그림 Ⅳ-5]와 같다.

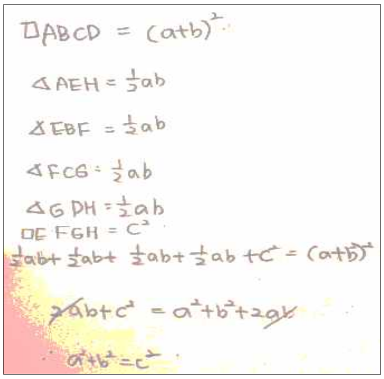


[그림 Ⅳ-5] 정사각형 넓이 분할에 대한 직관적 모델

두 학생 모두 [그림 Ⅳ-5]를 통해 피타고라스의 정리의 증명 방법에 대한 예상적 직관을 쉽게 형성하였고 증명에도 성공하였다. 학생들은 피타고라스의 정리를 "$\triangle ABC$에서 $\angle BAC=90^\circ$ 이면 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이다."와 같이 구체적으로 기호화하는 것에서 나아가 '$\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=c$'로 기표하여 추상적 모델인 $a^2+b^2=c^2$로 간단히

하였다. 이러한 기호의 중재는 [그림 Ⅳ-5]와 같은 정사각형 넓이 분할에 대한 직관적 모델에 반영되어 피타고라스의 정리와 논리적으로 연결되었다.

학생 S1은 정사각형 넓이 분할에 대한 예상적 직관을 기호 중재에 의해 피타고라스의 정리와 연결시켜 논리적으로 서술하였다. 학생 S1은 정사각형 넓이 분할을 “□ ABCD= △AEH+ △EBF+△GFC+ △HDG+□ EFG”와 같이 기호화하였다. 이러한 학생 S1의 직관과 기호화는 [그림 Ⅳ-6]과 같은 형식적 증명 표현의 틀이 되어 피타고라스의 정리의 증명을 논리적으로 서술할 수 있게 하였다.

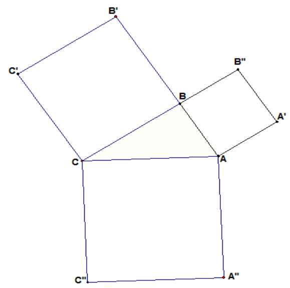


[그림 Ⅳ-6] 학생 S1의 정사각형 넓이의 분할을 이용한 피타고라스 정리의 증명

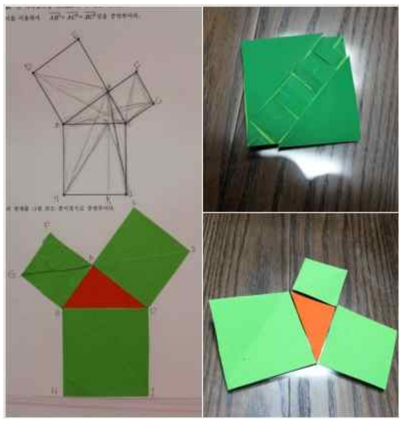
학생 S1은 피타고라스 정리의 형식적 증명 표현에 있어서도 정사각형 위의 직각삼각형에 밑변, 높이, 빗변을 각각 a, b, c로 기표하여, 대수적 성질을 통하여 논리적으로 $a^2+b^2=c^2$임을 보일 수 있었다. 예상적 직관이 형성될 수 있는 피타고라스 정리의 증명 방법에서, 학생들은 직관적 모델(그림)과 추상적 모델($a^2=b^2+c^2$)를 연결시키는 기호의 중재로 증명 과정 전체를 하나로 압축하고 볼 수 있는 결론적 직관을 형성시켰고, 동시에 형식적 증명을 논리적으로 서술할 수 있었었다.

나. 유클리드 증명 방법

학생들은 유클리드 증명 방법을 가장 어렵게 느꼈다. 연구자는 학생들에게 유클리드 증명 방법 탐색에 이용되는 직관적 모델로 [그림 Ⅳ-7]을 제시하였다.



[그림 Ⅳ-7] 피타고라스 정리의 유클리드 증명 모델

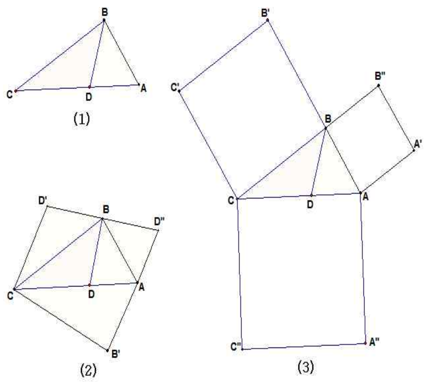


[그림 Ⅳ-8] 색종이를 이용한 피타고라스의 정리의 직관적 모델

두 학생 모두 [그림 Ⅳ-7]을 통해 피타고라스 정리의 유클리드 증명방법에 대한 예상적 직관을 형성하지는 못했다. 즉, “정사각형 CAA′C′′의 넓이는 정사각형 B′A′AB의 넓이와 정사각형 CBB′′C의 넓이의 합과 같다”는 예상적 직관을 형성하지 못했다. 연구자의 지도 아래 학생들은

모눈종이, 색종이 모형(참고: [그림 Ⅳ-8])을 이용하여 증명 방법에 대한 기본적 아이디어를 전체적이고 구조화된 통찰로 □ CBB'C+□ B''A'AB=□ CAA'C''로 요약하였다. 즉 주어진 피타고라스 정리의 유클리드 증명 방법에 대한 결론적 직관을 형성한 것이다. 그 과정을 소개해 본다.

어진 모델의 귀납적인 확인을 넘어 그 속성의 일반성을 필연적이고 자명한 것으로 파악하는 직관의 형성이 이루어지도록, 연구자는 학생들에게 일반적인 정리의 특수화를 통한 증명을 소개하였다. 그 내용은 Polya(1954/2006)가 제시한 방법을 응용한 것으로 [그림 Ⅳ-9]와 같다.



[그림 Ⅳ-9] 피타고라스 정리의 특수화

연구자는 피타고라스의 정리를 나타낼 때 기호를 사용하지 않은 경우와 기호를 사용한 경우로 나누어 설명하였다. 우선 [그림 Ⅳ-9]를 기호를 사용하지 않고 다음과 같이 설명하였다.

> (1)과 같이 직각삼각형은 두 삼각형의 분할로 나타낼 수 있다. 이것은 직각삼각형의 넓이는 분할된 두 삼각형의 넓이의 합과 같음을 뜻한다. (2)와 같이 각 변을 대칭축으로 직각삼각형의 세 변 위에 각각 삼각형을 그릴 수 있다. 이것은 세 삼각형이 직각삼각형의 세 변 위에 그려진다면, 빗변 위의 것의 넓이는 다른 두 개의 넓이의 합과 같다는 뜻이다. (1)과 (2)를 통해 (3)에서 세 정사각형이 직각삼각형의 세 변 위에 그려진다면 빗변 위의 것의 넓이는 다른 두 개의 넓이의 합과 같음을 알 수 있다.

위와 같이 기호 사용 없이 설명한 결과 학생들은 (2)에서 나타난 일반적 정리를 (3)과 연결하여 적용시키는 유추를 진행하지 못하였다.

S1 : (2)는 딱 봐도 알겠는데... (3)은 모눈종이가 필요해요.
S2 : 삼각형은 정삼각형이 아닌데요. 이게 똑같은 건가?

연구자는 다시 기호를 사용하여 설명하였다. 그 내용은 다음과 같다.

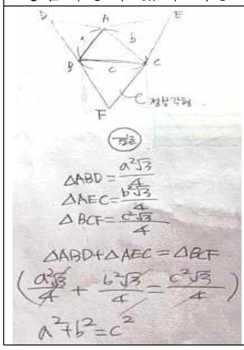
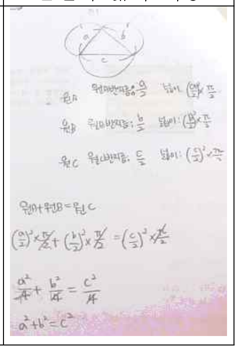
> (1)은 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle DBC$임을 뜻한다. (1)로부터 (2)는 $\triangle AB'C = \triangle ABD'' + \triangle D'BC$을 뜻한다. 여기서 $\triangle AB'C = A1$, $\triangle ABD'' = A2$, $\triangle D'BC = A3$라 두면 $A1 = A2 + A3$이고, 이것은 등식의 성질에 따라 다시 $\lambda A1 = \lambda A2 + \lambda A3$로 표현할 수 있다. (1)과 (2)를 기호화하여 적용함으로써 (3)의 $a^2 = b^2 + c^2$을 확인할 수 있다.

위와 같이 일반적인 정리들을 기호로 정리하여 설명한 결과 학생들은 (3)에 나타난 속성의 일반성을 필연적이고 자명한 것으로 파악하는 직관을 형성하였다.

S1 : 아하! 그럼, 정사각형이 아니라 정삼각형도 되겠네요.
S2 : 그럼, 닮음이면 다 성립하겠네요.

학생들은 일반적 정리를 기호로 정리함으로써 위계적 구조를 파악하고, “세 개의 닮은 다각형이 직각삼각형의 세 변 위에 그려진다면 빗변 위에 있는 것의 넓이는 다른 두 개의 넓이의 합과 같다.”라는 일반적 속성을 필연적이고 자명한 것으로 받아들이는 직관을 형성하였다. 나아가 두 학생 모두 피타고라스 정리의

유클리드 증명방법에 대한 결론적 직관을 [그림 Ⅳ-10]의 특수화로 추론해낼 수 있었다.

[학생 S1] 정삼각형의 넓이 이용	[학생 S2] 반원의 넓이 이용
	

[그림 Ⅳ-10] 학생들의 일반적 정리의 특수화 (피타고라스 정리의 증명)

“세 개의 닮은 다각형이 직각삼각형의 세 변 위에 그려진다면 빗변 위의 것이 넓이는 다른 두 개의 넓이의 합과 같다.”에 대한 아이디어에 학생 S1은 정삼각형 넓이를, 학생 S2는 반원의 넓이를 각각 기호로 정리하여 피타고라스 정리를 논리적으로 증명하였다. 이것은 기호를 통한 학생들의 사고 확장으로 볼 수 있다. 피타고라스의 정리의 유클리드 증명 방법은 기호를 중재로 하여 논리적 증명의 형식적인 틀로 변화, 발전하였고 결론적 직관으로 형성되었으며, 새로운 지식이 나올 수 있는 특수화로 진행될 수 있었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 기하 증명에서 기호 중재에 의한 직관의 형성 과정을 조사하고 분석하였다. 그 결과 다음의 몇 가지 결론을 얻을 수 있었다.

첫째, 단정적 직관이 형성된 기하 내용보다 그렇지 않은 기하 내용의 증명에서 기호의 역할과 비중이 더 큰 것으로 나타났다. 학생들은 단정적 직관이 형성된 내용의 증명에서는 그림, 글, 기호 표현에 모두 성공하였지만 그렇지 않은 기하 내용의 증명에서는 기호 표현의 증명만 성공하였다. 명제에 따라서는 글과 그림을 통해 증명하는 것이 한계가 있는 것이며, 수학 기호를 사용할 때 직관적으로 와 닿지 않는 내용에 대해서도 증명을 할 수 있었던 것이다. 이때 학생들은 주어진 명제를 나타내는 그림에 라벨을 붙이고 증명 방법을 탐색해 본 후 기호로 증명 내용을 서술하여 증명을 완성할 수 있었다.

둘째, 학생들은 증명에서 기호를 사용할 때 기호의 의미가 새로운 기호의 기표가 되는 연속적인 과정을 보였으며, 이것은 기호의 의미작용 고리로 설명될 수 있었다. 학생들은 기표, 기의의 연속 과정인 기호의 의미작용을 통해 자신의 직관을 정리하는 동시에 또 다른 직관을 추론할 수 있는 조건을 만들었다. 학생들은 주어진 명제의 의미를 이해하는 가장 기초적인 직관에서 또 다른 직관을 추론해 나가는 연속 과정을 통해 증명을 완성시켰다. 이러한 기호화와 의미작용은 예상적 직관이 잘 형성되지 않았을 때 기존의 수학적 지식을 동원하고 활용하여 증명이 진행될 수 있도록 하는 역할을 담당했다.

셋째, 학생들은 기호의 중재를 통해 명제와 증명 과정에 대한 결론적 직관을 형성할 수 있었다. 예상적 직관이 용이한 넓이 분할 방법에 의한 피타고라스의 정리 증명에서 학생들은 기호를 활용하여 증명 과정을 서술함으로써 증명 방법에 대한 결론적 직관을 형성할 수 있었다. 또 예상적 직관이 용이하지 않은 유클리드 방법에서는 색종이를 이용한 직관적 모델로부터 여러 증명 방법을 탐색한 후 기호를 사용해서

유클리드 증명 방법에 대한 결론적 직관을 형성했으며, 이후 피타고라스의 정리를 일반화하고 특수화하는 추론을 하여 그 추론 과정에 대한 결론적 직관까지도 형성할 수 있었다. 이로써 여러 피타고라스의 정리 증명 방법은 학생들에게 필연적이고 자명한 것에 이르게 되었다.

결론적 직관으로 증명을 이해하기 위해서는 위계적 구조의 파악, 전체 추론 과정을 함축적 아이디어로 응축하는 효과가 필요하다. 기하 영역에서 이러한 이해를 돕는 직관적 모델로 학생들은 흔히 도형의 그림을 이용했다. 하지만 도형의 이미지를 넘어 그 속성의 일반성을 필연적이고 자명한 것으로 파악하는 직관적 사고는 도형의 그림만으로는 부족했다. 그림과 함께 도형에 대한 기호가 동시에 사용될 때 학생들은 증명을 더 효과적으로 하였다. 학생들의 직관은 기호의 중재에 의해 논리적 증명의 틀로 변화, 발전하였고, 증명 과정에 대한 학생들의 기호화는 증명을 논리적으로 서술할 수 있게 하는 틀을 제공하였다. 피타고라스 정리의 증명에 있어 기호는 증명 방법에 대한 결론적 직관과 증명의 서술을 가능하게 하였다.

본 연구의 결론은 다음의 몇 가지 교육적 시사점을 주었다.

첫째, 기하 증명에서 학생들은 직관적 모델을 통해 주어진 명제를 통찰하고, 체계적인 기호화를 통화여 자신의 직관적 획득물을 분석하고 형식화하는 것을 학습해야 한다. 그리고 직관은 학습을 통해서도 형성될 수 있으며, 이차 직관은 일차 직관에 비해 그 정교성과 타당성이 더 높아 궁극적인 기하 학습에 도움이 될 수 있다.

둘째, 기하 증명에서 학생들에게 기호화와 문장화의 과정을 먼저 학습하게 하는 교수·학습 방법을 시도해볼 수 있을 것이다. 본 연구에 참여한 학생들은 처음에 예상적 직관과 결론적 직관을 형성하지 못하고 증명을 시도조차 하지 못했지만 기호화의 학습 후에는 증명 방법에 대한 직관을 형성하며, 증명을 스스로 상당히 진행할 수 있었다. 증명의 요소로서 기호화와 문장화를 고려해본다면, 기호화와 문장화가 왜 필요한지 인식하는 학생들에게는 의미있는 활동이 될 수 있을 것이다.

셋째, 직관에만 의존한 학생들은 오류를 범할 수 있다. 직관이 참된 지식을 창출하기도 하지만 잘못된 직관으로 인하여 인식론적 장애가 형성될 수도 있다. 기하 증명에서 직관은 중요하지만 올바른 직관이 활용될 수 있도록 기호화와 그 의미작용을 눈여겨보는 것이 필요할 것이다.

참고문헌

권석일·홍진곤(2003). 기하 학습-지도에서 직관의 역할에 대한 연구. **수학교육학연구, 10**(2), 215-227

김선희·이종희(2002). 수학기호와 그 의미에 대한 고찰 및 도입 방법. **학교수학** 4(4), 539-554.

서동엽(1999). **증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색: 중학교 수학을 중심으로**. 서울대학교 대학원 교육학박사학위 논문.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

이대현(2008). 직관에 관한 연구 역사와 수학교육적 의미 고찰. **한국학교수학회논문집 11**(3), 363-376.

조영미(2000). 수학교육에서 시각화와 직관. **수학교육학연구, 10**(2), 215-227.

Bergsten, C. (1999). From sense to symbol sense. *European research in mathematics education II*, 126-137.

Fischbein, E. (2006). **수학 과학 학습과 직관**. (우정호 외 7인 공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1987년 출판).

Hadamard, J. (1949). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Princeton University Press.(Reprinted by Dover Publications, New York, 1954)

Hall, M. (2000). *Bridging the gap between everyday practices and classroom mathematics: an investigation of two teacher's intentional use of semiotic chains*. Doctorial dissertation, Florida State University.

Nodding, N., & Shore, P. J. (1984). *Awaking the inner eye: Intuition in Education*. New York: Teachers College Press.

Polya, G. (2006). 수학과 개연 추론. (이만근 · 최영기 · 전병기 · 홍갑주 · 김민정 공역). 서울: 교우사. (영어 원작은 1954년 출판).

Rothbart, A. (1998). Learning to reason from Lewis Carroll. *Mathematics teacher, 91*, 1, 6-10,

Trabant, J. (2001). **기호학의 전통과 경향**. (안정오 역). 서울: 인간사랑. (독어 원작은 1996년 출판).

Vygotsky, L. S. (1985). 사고와 언어. (심현정 역). 서울: 성원사. (영어 원작은 1962년 출판).

Role of Symbol and Formation of Intuition by the Mediation of Symbols in Geometric Proof

Kim, Hee (Graduate School of Education, Silla University)
Kim, Sun Hee (Silla University)

Students' intuition in formal proof should be expressed as symbols according to the deductive process. The symbol will play a role of the mediation between the intuition and the formal proof. This study examined the evolution process of intuition mediated by the symbol in geometry proof. According to the results first, symbol took the great roles when students had the non-formed intuition for the proposition. The signification of symbols could explain even the proof process of the proposition with the non-expectable intuition. And when students proved it by symbols, not by figure nor words, they could evolute the conclusive intuition about the proposition.

* Key Words : intuition(직관), proof(증명), symbol(기호), signification(의미작용)

논문 접수 : 2010. 10. 10
논문 수정 : 2010. 11. 01
심사 완료 : 2010. 11. 09