DOI: 10.3745/KIPSTA.2010.17A.1.001

상호연결망 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS(2*n*,*n*)의 고장 지름

김 종 석[†] · 이 형 옥[††]

요 약

고장 지름은 상호연결망의 통신 능률과 신뢰도를 평가하는 중요한 척도 중의 하나이다. 이형옥 외 4인[Folded 하이퍼-스타 그래프의 병렬 경로, 한국정보처리학회논문지, Vol.6, No.7, pp.1756-1769, 1999]은 폴디드 하이퍼-스타 FHS(2*n*,*n*)의 노드 중복 없는 경로를 제안하였고, FHS(2*n*,*n*)의 고장 지름이 2*n*-1 이하임을 증명하였다. 본 논문에서는 폴디드 하이퍼-스타 FHS(2*n*,*n*)의 개선된 노드 중복 없는 경로를 제안한다. 그리고 FHS(2*n*,*n*)의 광역 지름이 *dist*(U,V)+4이고, 고장 지름이 *n*+2 이하임을 증명한다.

키워드 : 상호연결망, 폴디드 하이퍼-스타, 노드 중복 없는 경로, 고장 지름

Fault Diameter of Folded Hyper-Star Interconnection Networks FHS(2*n*,*n*)

Kim Jongseok[†] · Lee Hyeongok[††]

ABSTRACT

The fault diameter is one of the important measures for transmission rate and reliability of interconnection network. H.-O. Lee et al.[Parallel paths in folded hyper-star graph, Journal of KIPS, Vol.6, No.7, pp.1756-1769, 1999] suggested the node-disjoint paths of FHS(2*n*,*n*), and proved that the fault diameter of FHS(2*n*,*n*) is less than 2*n*-1. In this paper, we suggest an advanced node-disjoint paths of FHS(2*n*,*n*). We also prove that the wide diameter of FHS(2*n*,*n*) is *dist*(U,V)+4, and the fault diameter of FHS(2*n*,*n*) is less than *n*+2.

Keywords : Interconnection Network, Folded Hyper-Star, Node-Disjoint Path, Fault Diameter

1. 서 론

현대 공학과 과학 분야의 대부분의 응용문제들은 많은 계산을 수행하며, 동시에 실시간 처리를 필요로 하기 때문에 지금까지의 컴퓨터 시스템보다 빠른 계산 능력을 갖는 고성능 병렬 처리 시스템에 대한 필요성이 계속 증가되고 있다. 이와 같은 병렬 시스템의 효과적인 운용을 위하여 고려해야 할 대표적인 사항 중의 하나가 연결망의 위상(topology)이다. 가장 대표적인 위상으로 하이퍼큐브(hypercube) 연결망이 있다. 하이퍼큐브 연결망은 각종 응용 분야에서 요구하는 통신망 구조를 쉽게 제공할 수 있는 장점이 있어 연구용 및 상용 시스템에 널리 사용되고 있는 대표적인 상호 연결망이다. 하이퍼큐브 연결망은 노드 및 에지 대칭성이 있고, 간단한 라우팅 알고리즘, 최대 고장 허용도, 재귀적 구조를 가지고 있으며, 기존에 제안된 다양한 상호 연결망과 쉽게 임베딩 가능하다는 장점을 가지고 있다. 반면에 차원이 증가함에 따라 노드의 분지수 또한 그에 비례하여 증가하고, 분지수에 비해 지름과 노드간의 평균 거리가 짧지 않다는 단점이 있다. 이것은 하이퍼큐브가 에지를 효율적으로 사용하지 못함을 의미한다. 이러한 단점을 개선하기 위하여 하이퍼-스타 연결망 *HS*(2*n*,*n*)이 제안되었다[11, 19].

노드의 분지수가 정규형 형태를 갖는 하이퍼-스타 연결망 *HS*(2*n*,*n*)은 하이퍼큐브와 스타(star) 연결망의 성질을 가지고 있으면서, 같은 노드수를 갖는 하이퍼큐브보다 망비용(network cost)이 더욱 우수하고, 차원이 증가함에 따라 노드수가 급격하게 증가하는 스타 연결망의 단점을 개선한 연결망으로 [2, 3, 8, 11, 14-16, 19]에서 다양한 성질들이 분석되었다. 이러한 하이퍼-스타 연결망의 지름을 1/2 개선한 Folded 하이퍼-스타가 제안되었는데, Folded 하이퍼-스타 연결망은 하이퍼-스타 연결망의 각 노드에 한 개의 부가적인 에지를 추가한 연결망으로, 여러 하이퍼큐브군의 상호연결망보다 망비용이 우수하다[11, 17-20].

---

† 정 회 원 : 영남대학교 전자정보공학부 연구교수
†† 종신회원 : 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수(교신저자)
논문접수 : 2009년 9월 18일
수 정 일 : 1차 2009년 12월 16일
심사완료 : 2010년 1월 8일

연결망에서 고장 허용도를 평가하기 위한 망척도로 고장 지름(fault diameter)이 있다. 연결망 G의 지름은 연결망을 구성하는 노드들 중 임의의 두 개 노드 사이에 최단 경로 길이 중 최대값으로 $D(G)$로 표현한다. 고장 지름은 Krishnamoorthy와 Krishnamurthy에 의해 처음으로 제안된 개념으로, 연결망 G의 고장 지름이란 연결망 G가 나누어지지 않는 한도 내에서 노드나 에지가 고장이 발생했을 때 즉, 고장 노드수(에지수)가 분지수 미만일 때의 최대 지름을 의미하는 것으로 D_f로 표현한다[7]. 지름은 연결망의 임의의 두 노드 사이의 최대 거리를 나타내는데, 이는 연결망 전체에 데이터를 전파하는데 걸리는 지연 시간의 하한값이다. 즉, 고장 지름은 고장 노드수(에지수)가 분지수 미만일 때 연결망 전체에 데이터를 전파하는데 걸리는 지연 시간의 하한값을 나타낸다. 그러므로 고장 지름이 작을수록 고장 노드(에지)가 발생한 연결망의 데이터 전파 속도가 우수하다는 것을 알 수 있다. 지금까지 다양한 연결망에서 고장지름을 분석하는 연구가 진행되어 왔다[1, 4-6, 9, 10, 12, 13, 15, 20]. 연결망에서 고장 지름을 분석하는 문제는 노드 중복 없는 경로를 이용한 방법이 있다. 연결망의 노드 중복 없는 경로는 임의의 두 노드 사이에 연결망의 분지수 개수만큼의 노드가 중복하지 않는 경로가 존재하는 것으로, 두 노드 사이에 많은 양의 데이터를 전송할 때 데이터 전송 속도를 향상할 수 있을 뿐만 아니라, 경로상의 노드나 에지가 고장이 발생해도 대체 경로를 설정할 수 있으므로 중요한 의미를 갖는다. <표 1>에서 널리 알려진 상호연결망들의 고장지름을 분석했다.

[20]에서 폴디드 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)의 노드 중복 없는 경로를 제안하였고, 제안된 노드 중복 없는 경로를 바탕으로 FHS($2n,n$)의 고장 지름이 $2n$-1임을 증명하였다. [20]에서 제안한 알고리즘은 임의의 두 노드의 해밍 거리를 구한 값이 고장 지름임을 나타낸다. 이러한 알고리즘은 폴디드 하이퍼-스타 연결망에서 병렬경로를 설정할 때 c-에지를 효율적으로 이용하지 못하고 있음을 나타낸다. 해밍 거리와 c-에지의 정의는 2장에 나타내었다. 예를 들어 FHS(6,3)의 임의의 두 노드를 U=000111과 V=111000이라 하자. [20]에서 제안한 알고리즘에 의해 병렬경로를 설정하면 다음과 같다.

〈표 1〉 상호연결망들의 고장지름 분석

참고문헌	연결망	노드수	분지수	지름	고장지름
[1]	교차큐브	2^n	n	$\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$	$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2$
[4]	HFN	2^{2n}	n+2	$2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$	$2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3$
[5]	k-ary n-cube	k^n	$2n$	$n\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$	$n\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1$
[6]	HCN	2^{2n}	n+1	$n + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 1$	$n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 3$, $n + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 4$
[9]	오드연결망	$\binom{2n-1}{n}$	n	n-1	n+1
[10]	하이퍼큐브	2^n	n	n	n+1
[12]	스타연결망	$n!$	n-1	$\left\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \right\rfloor + 2$
[15]	하이퍼-스타	$\binom{2n}{n}$	n	$2n$-1	$2n$+1
[20]	폴디드 하이퍼-스타	$\binom{2n}{n}$	n+1	n	$2n$-1

000111-111000,
000111-100011-010011-110001-011001-111000,
000111-100101-001101-101100-011100-111000,
000111-100110-010110-110010-011010-111000.

거리 1인 경로 1개와 거리 5인 경로 3개로 병렬경로가 구성되어 고장지름이 5임을 알 수 있다. 본 논문에서 제안하는 알고리즘에 의해 병렬경로를 설정하면 다음과 같다.

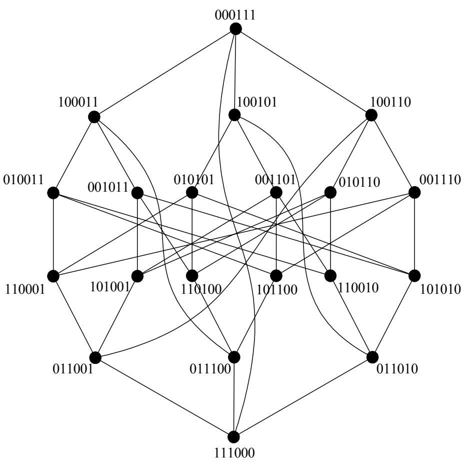
000111-111000,
000111-100011-011100-111000,
000111-100101-011010-111000,
000111-100110-011001-111000.

거리 1인 경로 1개와 거리 3인 경로 3개로 병렬경로가 구성되어 고장지름이 3임을 알 수 있으므로 본 논문에서 제안하는 알고리즘이 우수하다는 것을 알 수 있다.

2장에서는 폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS($2n,n$)을 간략히 소개하고, 3장에서 FHS($2n,n$)의 개선된 노드 중복 없는 경로를 제안하고, FHS($2n,n$)의 고장 지름이 n+2 이하임을 증명하고, 4장에서 결론을 맺도록 하겠다.

2. 폴디드 하이퍼-스타 연결망

폴디드 하이퍼-스타 연결망 FHS($2n,n$)는 $\binom{2n}{n}$개의 노드로 구성된 연결망으로 각 노드는 $2n$개의 비트스트링 $b_1b_2...b_i...b_{2n}$으로 표현되며($b_i \in \{0,1\}$, $1 \le i \le 2n$), 비트스트링 1의 개수와 0의 개수가 n 으로 동일하다. b_1과 b_i가 보수일 때 b_1과 b_i를 교환하는 치환을 σ_i라 하면, $v=\sigma_i(u)$인 두 노드 $U=b_1b_2...b_i...b_{2n}$와 $V=b_ib_2...b_1...b_{2n}$사이에 에지가 발생하는데 이 에지를 i-에지라고 한다. 노드 U를 보수 노드 $\overline{U}$로 변환하는 치환을 σ_c라 하면, 보수 관계에 있는 두 노드 사이에 에지가 발생하는데 이 에지를 c-에지라고 한다. 예를 들어 FHS(6,3) 연결망은 (그림 1)과 같다. Folded 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)에서 연속된 n개의 0과 1로 구성된 노드 U=0...01...1을 $U=0^n1^n$로 표현하겠다. FHS($2n,n$)의 임의의 두 노드를 $U=u_1u_2...u_i...u_{2n}$와 $V=v_1v_2...v_i...v_{2n}$이라 할 때, 두 노드 U와 V 사이에 Exclusive-OR 함수(⊕)를 적용시킨 결과를 $R=r_1r_2...r_i...r_{2n}$, ($r_i=u_i \oplus v_i$)라고 표시하겠다($1 \le i \le 2n$). 두 노드 U와 V 사이의 해밍거리(hamming distance) H_{UV}는 r_i=1인 r_i의 개수이다($2 \le i \le 2n$). 두 노드 U와 V 사이의 거리(distance)를 $dist(U,V)$라고 표시하면, 두 노드 사이의 거리 $dist(U,V)$는 다음과 같다.



(그림 1) FHS(6,3)

・$dist(U,V)=\min\{H_{UV},\ 2n-H_{UV}\}$ [11, 19]

임의의 노드 U에서 치환 $\sigma_{k1},\sigma_{k2},...,\sigma_{kt}$을 순차적으로 적용하여 정해지는 경로를 $[k_1,k_2,...,k_t]$로 표시하겠다. 두 노드 U와 V를 연결하는 최단경로를 P라고 하면, P는 c와 i 값의 순서에 상관없이 구성될 수 있다. 예를 들면 노드 U=00001111, 노드 V=11001100이라고 하면, R=11000011이므로 H_{UV}=3이고 $S=\{2,7,8\}$이고, $2n-H_{UV}$=5이고 $S'=\{c,3,4,5,6\}$이므로 $dist(U,V)=H_{UV}$=3임을 알 수 있고, 최단경로 P는 [7,2,8] 혹은 [8,2,7]이다.

[보조정리 1] FHS($2n,n$)의 임의의 노드 U에 치환 σ_i ($2 \le i \le 2n$)와 σ_c를 모두 적용하면 길이 $2n$인 하나의 사이클을 구성한다.

[증명] FHS($2n,n$)의 임의의 노드 U에 치환 σ_i ($2 \le i \le 2n$)를 적용하면 U의 보수 노드인 $\overline{U}$와 연결된다. $\overline{U}$에 치환 σ_c를 적용하면 노드 U에 연결됨을 알 수 있다. 그러므로 FHS($2n,n$)의 임의의 노드 U에 치환 σ_i ($2 \le i \le 2n$))와 σ_c 를 모두 적용하면 하나의 사이클을 구성한다. 노드 U에 적용하는 연산 개수는 σ_i 의 개수($2n-1$)+σ_c의 개수(1)이므로 이 사이클의 길이는 $2n$임을 알 수 있다. □

[보조정리 2] FHS($2n,n$)의 두 노드를 U와 V라고 하자. U와 V를 연결하는 t개의 에지들로 구성된 경로를 P라고 하고, 경로 P를 구성하는 t개의 에지들이 순환적(cyclic)으로 이동(rotate)하여 구성된 경로를 Q라고 하자. 두 경로 P와 Q를 합치면 길이 $2t$인 사이클이 구성된다.

[증명] 증명을 위해 두 경로 P와 Q 안에 공통 노드 W ($\ne U,V$)가 존재한다고 가정하자. 그러면 경로 P 상에는 노드 U와 노드 W를 연결하는 t^*개의 에지들로 구성된 경로 P^*가 존재할 것이고, 경로 Q 상에는 노드 U와 노드 W를 연결하는 t^*개의 에지들로 구성된 경로 Q^*가 존재할 것이다. 그러나 이러한 경로 P^*와 Q^*는 존재할 수 없다. 경로 Q는 경로 P를 구성하는 t개의 에지들이 순환적(cyclic)으로 이동(rotate)하여 구성된 경로라고 했으므로, 경로 P^*와 Q^*를 구성하는 에지들은 동일할 수가 없기 때문이다. 그렇기 때문에 두 경로 안에는 공통노드 $W(\ne U,V)$가 존재하지 않는다. 그러므로 두 경로 P와 Q를 합치면 길이 $2t$인 사이클이 구성됨을 알 수 있다.

예를 들어, FHS(14,7)의 두 노드를 U=00000001111111, V=01010101010101하고 하면, 두 노드를 연결하는 하나의 경로 P는 6개의 에지들로 구성된 [9,2,11,4,13,5]이다. 경로 [11,4,13,5,9,2]은 경로 P를 구성하는 에지들이 왼쪽으로 2만큼 순환적으로 이동하여 구성된 경로이므로 경로 Q가 된다. 두 경로 P와 Q를 합치면 경로 PQ=[9,2,11,4,13,5,2,9,5,13,4,11]가 구성된다. 노드 U에 경로 PQ를 적용하면 노드 U로 돌아오며 노드 중복이 발생하지 않음을 알 수 있다. 즉, 경로 PQ에 의해 노드 U와 노드 V가 포함된 길이 12인 사이클이 구성됨을 알 수 있다. □

3. 고장지름

연결망 G의 임의의 두 노드를 u와 v라고 하면, (u,v)-컨테이너(container)는 u와 v 사이의 노드 중복 없는 경로들의 집합을 의미한다. 컨테이너의 크기는 노드 중복 없는 경로의 개수를 의미하고, 컨테이너의 거리는 노드 중복 없는 경로 중 거리가 가장 큰 경로의 길이를 의미한다[7].

[정의 1] 연결망 G의 분지수를 k라 하면, 크기가 k인 병렬경로 집합의 최단거리를 두 노드 사이의 k-거리(distance)라고 한다. 연결망 G의 임의의 두 노드들의 k-거리 중에 최대 k-거리를 k-광역지름(wide diameter), $D_k(G)$이라고 한다. 연결망 G의 고장허용도를 k-1이라 하고, 연결망 G의 서브연결망인 최대 k-1개의 고장노드를 갖는 연결망을 G_f 라고 하면, 연결망 G의 고장 지름, $D^f_{k-1}(G)$ 은 G_f 의 지름이다.

k-광역지름의 개념은 고장 지름의 개념과 밀접하게 관련되어 있다. 연결망 G의 지름을 $D(G)$라고 하면, $D(G) \le D^f_{k-1}(G) \le D_k(G)$ 임은 [7]에서 증명되었다. 만약 고장 지름이 지름값 + 상수이면 G의 통신 지연 시간은 순차적으로 증가한다. 정규형 연결망 FHS($2n,n$)의 분지수는 n+1이며, 지름은 n이고, 노드 연결도가 n+1 임은 [11, 19]에서 증명되었다.

$CR_x(S)$는 집합 S의 구성요소들을 왼쪽으로 x번 로테이트(rotate)한 집합을 나타낸다. 예를 들어, $S=\{1,2,...,m\}$이면, $CR_0(S)=\{1,2,...,m\}$이고, $CR_3(S)=\{4,5,...,m,1,2\}$이다. 두 노드 U와 V를 연결하는 최단경로를 P라고 하자. 경로 P를 구성하는 요소들 중에서 홀수 위치에 있는 요소들을 선택하여 구성한 집합을 $S_1=\{a_1,a_2,...,a_p\}$라고 하고, 짝수 위치에 있는 요소들을 선택하여 구성한 집합을 $S_2=\{b_1,b_2,...,b_q\}$라고 하자. 교환순서 S_1▣S_2는 S_1과 S_2의 구성요소들을 순서대로 번갈아 선택하여 구성되는 집합을 나타낸다($p=q$). $p=q+1$이면, S_1▣S_2을 S_1▣S_2^-라고 나타내겠다. 예를 들어 $S_1=(5,6,7)$, $S_2=(2,3,4)$

라고 하면 $S_1 \blacksquare S_2$={5,2,6,3,7,4}이다. 또 S_1=(5,6,7), S_2=(2,3)라고 하면 $S_1 \blacksquare S_2^-$={5,2,6,3,7}이다. 집합에 포함된 하나의 원소 i는 치환 σ_i를 나타낸다. 그러므로 예를 들었던 $S_1 \odot S_2$ 집합은 경로 [5,2,6,3,7,4]를 나타낸다. 마찬가지로 $S_1 \blacksquare S_2^-$ 집합도 경로 [5,2,6,3,7]를 나타낸다. 또한 교환순서에 요소 c가 포함되는 경우는 다음과 같이 나타내겠다. 요소 c의 위치에 따라 다음과 같이 나타내겠다. c가 교환순서의 첫 번째 위치에 선택되면 $c \circ S_1 \blacksquare S_2$라고 표현하고, 마지막 위치에 선택되면 $S_1 \blacksquare S_2 \circ c$라고 표현하며, 마지막에서 두 번째 위치에 선택되면 $S_1 \blacksquare c \circ S_2$라고 표현한다. $c \bullet S_1 \blacksquare S_2$는 위의 세 가지 표현 방법을 모두 포함한 표현 방법이다. 예를 들어 S_1=(5,6,7), S_2=(2,3,4)라고 하면 $c \circ S_1 \blacksquare S_2$={$c$,5,2,6,3,7,4}이고, $S_1 \blacksquare S_2 \circ c$={5,2,6,3,7,4,$c$}이며, $S_1 \blacksquare c \circ S_2$={5,2,6,3,7,$c$,4}이다.

FHS($2n,n$)의 두 노드를 $U=u_1,u_2,\ldots,u_{2n}$와 $V=v_1,v_2,\ldots,v_{2n}$라고 하자. 두 노드 U와 V 사이에 Exclusive-OR 함수($\oplus$)를 적용시킨 결과를 $R=r_1r_2\ldots r_i\ldots r_{2n}$, ($r_i=u_i \oplus v_i$)라고 나타내고($1 \le i \le 2n$), 두 노드 사이의 거리 $dist(U,V)$를 t라고 나타내겠다. r_i=1인 비트 스트링의 위치 i를 모두 선택하여 구성된 집합을 R^1라고 하면($2 \le i \le 2n$), 집합 R^1은 다음의 두 집합으로 구성할 수 있다. 비트 스트링의 위치 i가 n보다 크면 집합 H_2에 속하고, n보다 작거나 같으면 집합 H_1에 속한다. 집합 H_1과 H_2에 속한 요소들은 오름차순으로 정렬된다. 그러므로 $R^1=\{i_1,i_2,\ldots,i_t\}$이면($i_1<i_2<\ldots<i_g \le n<i_{g+1}<\ldots<i_t$), $H_1=\{i_1,i_2,\ldots,i_g\}$이고 $H_2=\{i_{g+1},i_{g+2},\ldots,i_t\}$이다. t가 홀수이면 $g=(t-1)/2$이고, t가 짝수이면 $g=t/2$이다. r_i=0인 비트 스트링의 위치 i를 모두 선택하여 구성된 집합을 R^0라고 하면($2 \le i \le 2n$), 집합 R^0 또한 다음의 두 집합으로 구성할 수 있다. 비트 스트링의 위치 i가 n보다 크면 집합 H_4에 속하고, n보다 작거나 같으면 집합 H_3에 속한다. 집합 H_3과 H_4에 속한 요소들은 오름차순으로 정렬된다. 그러므로 $R^0=\{i_1,i_2,\ldots,i_t\}$이면($i_1<i_2<\ldots<i_f \le n<i_{f+1}<\ldots<i_t$), $H_3=\{i_1,i_2,\ldots,i_f\}$이고 $H_4=\{i_{f+1},i_{f+2},\ldots,i_t\}$이다. t가 홀수이면 $f=(t-1)/2$이고, t가 짝수이면 $f=t/2$이다. 예를 들어 U=0000011111, V=0101010101라 하면, R=0101001010이다. 그러면 $R^1=\{2,4,7,9\}$이고, $H_1=\{2,4\}$이며, $H_2=\{7,9\}$이다. 그리고 $R^0=\{3,5,6,8,10\}$이고, $H_3=\{3,5\}$이며, $H_4=\{6,8,10\}$이다.

위에서 정의한 수식에 의해 FHS($2n,n$)의 두 노드 U와 V 사이의 최단 경로 P를 다음과 같이 구할 수 있다. $P=[CR_x(H_2) \blacksquare CR_x(H_1)]$ 또는 $[CR_x(H_4) \blacksquare CR_x(H_3)]$ 또는 $[c \bullet CR_x(H_2) \blacksquare CR_x(H_1)]$ 또는 $[c \bullet CR_x(H_4) \blacksquare CR_x(H_3)]$.

[보조정리 3] FHS($2n,n$)의 임의의 두 노드를 U와 V 라고 하자. 두 노드 U와 V 를 연결하는 두 경로 $[CR_k(H_2) \blacksquare CR_k(H_1)]$와 $[CR_l(H_2) \blacksquare CR_l(H_1)]$는 노드 중복 없는 경로이다($k<l$).

[증명] 경로 $[CR_l(H_2) \blacksquare CR_l(H_1)]$는 경로 $[CR_k(H_2) \blacksquare CR_k(H_1)]$을 ($l-k$)번 왼쪽으로 로테이트한 경로임을 알 수 있다. 보조정리 2에 의해 두 경로를 연결하면 하나의 사이클이 구성됨을 알 수 있다. 사이클이 구성되므로 두 경로 사이에는 공통 노드가 존재하지 않는다는 것을 알 수 있다. 그러므로 두 경로는 노드 중복 없는 경로이다. □

두 경로 $[CR_k(H_4) \blacksquare CR_k(H_3)]$와 $[CR_l(H_4) \blacksquare CR_l(H_3)]$도 보조정리 2에 의해 노드 중복 없는 경로임을 알 수 있고, $[c \bullet CR_k(H_2) \blacksquare CR_k(H_1)]$와 $[c \bullet CR_l(H_2) \blacksquare CR_l(H_1)]$도 보조정리 2에 의해 노드 중복 없는 경로임을 알 수 있으며, $[c \bullet CR_k(H_4) \blacksquare CR_k(H_3)]$와 $[c \bullet CR_l(H_4) \blacksquare CR_l(H_3)]$도 보조정리 2에 의해 노드 중복 없는 경로임을 알 수 있다.

[보조정리 4] FHS($2n,n$)의 임의의 두 노드를 U와 V 라고 하자. 두 노드 U와 V 를 연결하는 두 경로 $[CR_k(H_2) \blacksquare CR_k(H_1)]$와 $[c \bullet CR_l(H_4) \blacksquare CR_l(H_3)]$는 노드 중복 없는 경로이다.

[증명] 경로 $[CR_k(H_2) \blacksquare CR_k(H_1)]$와 $[c \bullet CR_l(H_4) \blacksquare CR_l(H_3)]$를 연결하면 하나의 사이클을 구성함을 보조정리 1에 의해 알 수 있으므로 두 경로는 노드 중복 없는 경로이다. □

두 경로 $[CR_k(H_4) \blacksquare CR_k(H_3)]$와 $[c \bullet CR_l(H_2) \blacksquare CR_l(H_1)]$도 보조정리 1에 의해 노드 중복 없는 경로임을 알 수 있다.

[보조정리 5] FHS($2n,n$)는 노드 대칭[18]이므로, FHS($2n,n$)의 두 노드를 $U=0^n1^n$와 V 라고 하자. 두 노드 U와 V 사이에는 $t=H_{UV}$인 경우 거리가 t이고 크기가 $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 인 컨테이너가 존재하고, $t=2n-H_{UV}$인 경우 거리가 t이고 크기가 $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ +1인 컨테이너가 존재한다.

[증명] $t=H_{UV}$인 경우와 $t=2n-H_{UV}$인 경우로 나누어 증명하겠다.

(경우 1) $t=H_{UV}$인 경우.

(경우 1-1) t=짝수 : 두 노드 U와 V 를 연결하는 경로는 $P=[CR_x(H_2) \blacksquare CR_x(H_1)]$ 이다. 두 노드 사이의 거리가 t이므로 집합 H_2의 구성 요소의 개수는 $\frac{t}{2}$이다. H_2의 구성 요소의 개수가 $\frac{t}{2}$라는 것은 $CR_x(H_2)$의 개수가 $\frac{t}{2}$라는 것을 나타낸다. 즉, 경로 $[CR_x(H_2) \blacksquare CR_x(H_1)]$에 의해 구성될 수 있는 P의 개수는 $\frac{t}{2}$라는 것을 알 수 있다. 그러므로 두 노드 U와 V 를 연결하는 거리 t인 컨테이너의 크기는 $\frac{t}{2}$이다.

(경우 1-2) t=홀수 : 두 노드 U와 V 를 연결하는 경로는 $P=[CR_x(H_2) \blacksquare CR_x(H_1)]$ 이다. 두 노드 사이의 거리가 t이므로 집합 H_2의 구성 요소의 개수는 $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 이다. H_2의 구성 요소의 개수가 $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 라는 것은 $CR_x(H_2)$의 개수가 $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 라는 것을 나타낸다. 즉, 경로 $[CR_x(H_2) \blacksquare CR_x(H_1)]$에 의해 구성될 수 있는 P의 개수는 $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 라는 것을 알 수 있다.

그러므로 두 노드 U와 V 를 연결하는 거리 t인 컨테이너의 크기는 $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 이다.

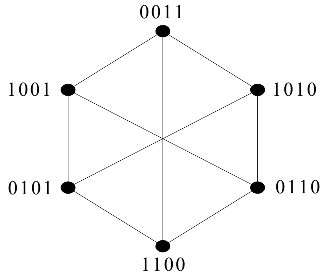
(경우 2) $t=2n-H_{UV}$인 경우.

(경우 2-1) t=짝수 : 두 노드 U와 V 를 연결하는 경로는 $P=[c\bullet CR_x(H_4)\blacksquare CR_x(H_3)]$이다. 경로 P는 경로 $[c\circ H_4\blacksquare H_3]$와 경로 $[H_4\blacksquare H_3\circ c]$와 H_4의 구성 요소의 개수-1개의 경로 $[CR_x(H_4)\blacksquare c\circ CR_x(H_3)]$로 나타낼 수 있다. H_4의 구성 요소의 개수는 $\frac{t}{2}$이다. 그러므로 두 노드 U와 V 를 연결하는 거리 t인 컨테이너의 크기는 $\frac{t}{2}+1$이다.

(경우 2-2) t=홀수 : 두 노드 U와 V 를 연결하는 경로는 $P=[c\bullet CR_x(H_4)\blacksquare CR_x(H_3)]$이다. 경로 P는 경로 $[c\circ H_4\blacksquare H_3]$와 경로 $[H_4\blacksquare H_3\circ c]$와 H_4의 구성 요소의 개수-1개의 경로 $[CR_x(H_4)\blacksquare c\circ CR_x(H_3)]$로 나타낼 수 있다. H_4의 구성 요소의 개수는 $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ 이다. 그러므로 두 노드 U와 V 를 연결하는 거리 t인 컨테이너의 크기는 $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor+1$이다. □

[정리 1] FHS$(2n,n)$는 노드 대칭[18]이므로, FHS$(2n,n)$의 두 노드를 $U=0^n1^n$와 V 라고 하자. 그러면 $D_n(\text{FHS}(2n,n))\le dist(U,V)+4$이다($n\ge 3$).

[증명] $dist(U,V)=t$라고 하자. t가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 증명하겠다. 먼저 D_n(FHS(4,2))는 2(t=2), 3(t=1)임을 보이겠다. (그림 2)는 FHS(4,2)를 나타낸다. t=1인 두 노드 U=0011, V=1001의 병렬 경로는 0011-1001, 0011-1010-0110-1001, 0011-1100-0101-1001의 3개의 경로로 구성됨을 (그림 2)를 통해 알 수 있다. 그러므로 t=1일 때 D_n(FHS(4,2))는 3(=n+1)임을 알 수 있다. t=2인 두 노드 U=0011, V=0101의 병렬 경로는 0011-1001-0101, 0011-1010-0101, 0011-1100-0101의 3개의 경로로 구성됨을 (그림 2)를 통해 알 수 있다. 그러므로 t=2일 때 D_n(FHS(4,2))는 3(=n+1)임을 알 수 있다.



(그림 2) FHS(4,2)

그러므로 본 증명에서는 $n\ge 3$인 경우를 증명하도록 하겠다.

(경우 1) t=짝수.

(경우 1.1) $t=n$인 경우

교환 순서 $CR_x(H_2)\blacksquare CR_x(H_1)$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. t가 짝수이므로, H_2와 H_1의 원소 개수가 동일함을 알 수 있고, 컨테이너의 크기는 $\frac{t}{2}$임을 보조정리 5에 의해 알 수 있다. $CR_x(H_2)\blacksquare CR_x(H_1)$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 경로를 P라고 하자. FHS$(2n,n)$의 분지수는 n+1이므로 $n+1-\frac{t}{2}$개의 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있다. 보조정리 1에 의해 Q는 $c\bullet CR_x(H_4)\blacksquare CR_x(H_3^-)$에 의해 구할 수 있다. 경로 P와 Q를 연결하면 보조정리 1에 의해 길이가 $2n$인 하나의 사이클을 구성하므로 Q의 거리가 n임을 알 수 있다. 경로 P와 Q의 거리가 n이므로 $D_n(\text{FHS}(2n,n))=n$이다.

(예) U=00001111, V=01100011이면, $t=n$=4이고, $R^1=\{2,3,6,7\}$, $H_1=\{2,3\}$, $H_2=\{5,6\}$, $H_3=\{4\}$, $H_4=\{7,8\}$이다. 경로 P는 [5,2,6,3]과 [6,3,5,2]이고, 경로 Q는 [c,7,4,8], [7,4,8,c], [8,4,c,7]이므로 P의 거리=Q의 거리=n=4임을 알 수 있다.

(경우 1.2) $t=2n-H_{UV}=n-1$인 경우

교환 순서 $c\bullet CR_x(H_4)\blacksquare CR_x(H_3^-)$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. t가 짝수이므로, H_3의 원소 개수가 H_4의 원소 개수보다 하나 적음을 알 수 있고, 컨테이너의 크기는 $\frac{t}{2}+1$임을 보조정리 5에 의해 알 수 있다. $c\bullet CR_x(H_4)\blacksquare CR_x(H_3^-)$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 경로를 P라고 하자. FHS$(2n,n)$의 분지수는 n+1이므로 $n-\frac{t}{2}$개의 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있다. 보조정리 1에 의해 Q는 $CR_x(H_4)\blacksquare CR_x(H_3)$에 의해 구할 수 있다. 경로 P와 Q를 연결하면 보조정리 1에 의해 길이가 $2n$인 하나의 사이클을 구성하므로 Q의 거리가 n+1임을 알 수 있다. 경로 P의 거리가 $n-1$이고 경로 Q의 거리가 n+1이므로 $D_n(\text{FHS}(2n,n))=n+1$이다.

(예) U=000111, V=011001이면, $t=n-1$=2이고, $R^1=\{2,3,4,5\}$, $H_1=\{2,3\}$, $H_2=\{4,5\}$, $H_3=\{\}$, $H_4=\{6\}$이다. 경로 P는 [c,6]과 [6,c]이고, 경로 Q는 [4,2,5,3], [5,3,4,2]이므로 P의 거리=$n-1$=2이고, Q의 거리=n+1=4임을 알 수 있다.

(경우 1.3) $t=H_{UV}$인 경우

교환 순서 $CR_x(H_2)\blacksquare CR_x(H_1)$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. t가 짝수이므로, H_2와 H_1의 원소 개수가 동일함을 알 수 있고, 컨테이너의 크기는 $\frac{t}{2}$임을 보조정리 5에 의해 알 수 있다. $CR_x(H_2)\blacksquare CR_x(H_1)$에 의해 노

드 U와 V를 연결하는 경로를 P라고 하자. FHS($2n,n$)은 이분할 연결망[18]이므로 FHS($2n,n$)의 내부에는 홀수 길이를 갖는 사이클이 존재하지 않기 때문에, $t+1$인 경로는 존재하지 않는다. 그러므로 거리 $t+2$인 경로를 구성한다. 먼저, $[c,P,c]$ 형태를 갖는 하나의 경로를 구성한다. 경로 P와 $[c,P,c]$ 형태를 갖는 경로들은 c가 경로 P에 포함되지 않은 원소이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 그리고 FHS($2n,n$)의 분지수는 $n+1$이므로 노드 U로부터 임의의 노드 V에 이르는 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 $n-\frac{t}{2}$개의 경로 Q를 구성하겠다($n+1\le j \le 2n,\ j\not\in P$). 경로 P'는 경로 P를 구성하는 원소들의 순서를 거꾸로 뒤집은 순서(reverse order)를 갖는 경로이다. 경로 P와 경로 Q는 j가 경로 P에 포함되지 않은 원소이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 경로 P의 거리는 t이고, 경로 Q의 거리는 $t+2$이다. 그러므로 D_d(FHS ($2n,n$))$=t+2$이다.

(예) U=000111, V=010011이면, $t=H_{UV}=2$이고, $R^1=\{2,4\}$, $H_1=\{2\}$, $H_2=\{4\}$, $H_3=\{3\}$, $H_4=\{5,6\}$이다. 경로 P는 [4,2]이고, $[c,P,c]$ 형태의 경로는 $[c,4,2,c]$이며, 경로 Q는 [5,2,4,5], [6,2,4,6]이므로 P의 거리$=H_{UV}=2$이고, Q의 거리$=t+2=4$임을 알 수 있다.

(경우 1.4) $t=2n-H_{UV}$인 경우

교환 순서 $c\bullet CR_x(H_4)$▣$CR_x(H_3^-)$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. t가 짝수이므로, H_3의 원소 개수가 H_4의 원소 개수보다 하나 적음을 알 수 있고, 컨테이너의 크기는 $\frac{t}{2}+1$임을 보조정리 5에 의해 알 수 있다. $c\bullet CR_x(H_4)$▣$CR_x(H_3^-)$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 경로를 P라고 하자. FHS($2n,n$)은 이분할 연결망[18]이므로 FHS($2n,n$)의 내부에는 홀수 길이를 갖는 사이클이 존재하지 않기 때문에, $t+1$인 경로와 $t+3$인 경로는 존재하지 않는다. 그리고 거리 $t+2$인 경로도 존재하지 않는다. 임의의 원소 j($n+1\le j\le 2n,\ j\not\in P$)가 포함된 거리 $t+2$인 경로 $[j,P,j]$ 또는 $[j,P',j]$가 존재한다고 가정하자. 노드 U에 인접한 i-에지들은 $n+1\le i\le 2n$이고, 경로 P를 구성하는 첫 번째 원소 p와 마지막 원소 p'는 $n+1\le i\le 2n$이다. 그러므로 $[j,P,j]$ 또는 $[j,P',j]$가 존재한다면 j와 p 또는 j와 p'가 경로를 구성하고 있다는 것을 나타내는데, 교환 순서의 구성 요건에 모순이다. 그러므로 거리 $t+4$인 경로를 구성한다. FHS($2n,n$)의 분지수는 $n+1$이므로 노드 U로부터 임의의 노드 V에 이르는 $[x,y,P,x,y]$ 형태를 갖는 거리 $t+4$인 경로 Q를 구성하겠다 ($n+1\le x\le 2n,\ 2\le y\le n,\ x,y\not\in P$). x,y가 경로 P에 포함되지 않은 원소들이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 경로 P의 거리는 t이고, 경로 Q의 거리는 $t+4$이다. 그러므로 D_d(FHS($2n,n$))$=t+4$이다.

(예) U=00001111, V=01110001이면, $t=2n-H_{UV}=2$이고, $R^1=\{2,3,4,5,6,7\}$, $H_1=\{2,3,4\}$, $H_2=\{5,6,7\}$, $H_3=\{\}$, $H_4=\{8\}$이다. 경로 P는 $[c,8]$, $[8,c]$이고, 경로 Q는 $[5,2,c,8,5,2]$, $[6,3,2,c,8,6,3]$, $[7,4,c,8,7,4]$이므로 P의 거리$=2n-H_{UV}=2$이고, Q의 거리$=t+4=6$임을 알 수 있다.

(경우 2) t=홀수

(경우 2.1) $t=n$인 경우

교환 순서 $CR_x(H_2)\odot CR_x(H_1^-)$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. t가 홀수이므로, H_1의 원소 개수가 H_2의 원소 개수보다 하나가 적음을 알 수 있고, 컨테이너의 크기는 보조정리 5에 의해 $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$임을 알 수 있다. $CR_x(H_2)$▣$CR_x(H_1^-)$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. FHS($2n,n$)의 분지수는 $n+1$이므로 $n+1-\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$개의 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있다. 보조정리 1에 의해 Q는 $c\bullet CR_x(H_4)$▣$CR_x(H_3)$에 의해 구할 수 있다. 경로 P와 Q를 연결하면 보조정리 1에 의해 길이가 $2n$인 하나의 사이클을 구성하므로 Q의 거리가 n임을 알 수 있다. 경로 P와 Q의 거리가 n이므로 D_n(FHS($2n,n$))$=n$이다.

(예) U=000111, V=110001이면, $t=n=3$이고, $R^1=\{2,4,5\}$, $H_1=\{2\}$, $H_2=\{4,5\}$, $H_3=\{3\}$, $H_4=\{6\}$이다. 경로 P는 [4,2,5], [5,2,4]이고, 경로 Q는 $[c,6,3]$, $[6,3,c]$이므로 P의 거리$=Q$의 거리$=n=3$임을 알 수 있다.

(경우 2.2) $t=2n-H_{UV}=n-1$인 경우

교환 순서 $c\bullet CR_x(H_4)$▣$CR_x(H_3)$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. t가 홀수이므로, H_4과 H_3의 원소 개수는 같다는 것을 알 수 있고, 컨테이너의 크기는 보조정리 5에 의해 $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor+1$임을 알 수 있다. $c\bullet CR_x(H_4)$▣$CR_x(H_3)$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. FHS($2n,n$)의 분지수는 $n+1$이므로 $n-\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ 개의 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있다. 보조정리 1에 의해 Q는 $CR_x(H_2)$▣$CR_x(H_1^-)$에 의해 구할 수 있다. 경로 P와 Q를 연결하면 보조정리 1에 의해 길이가 $2n$인 하나의 사이클을 구성하므로 Q의 거리가 $n+1$임을 알 수 있다. 경로 P의 거리가 $n-1$이고 경로 Q의 거리가 $n+1$이므로 D_n(FHS($2n,n$))$=n+1$이다.

(예) U=00001111, V=11100001이면, $t=2n-H_{UV}=n-1=3$이고, $R^1=\{2,3,5,6,7\}$, $H_1=\{2,3\}$, $H_2=\{5,6,7\}$, $H_3=\{4\}$, $H_4=\{8\}$이다. 경로 P는 $[c,8,4]$, $[8,4,c]$이고, 경로 Q는 [5,2,6,3,7], [6,3,7,2,5], [7,2,5,3,6]이므로 P의 거리$=n-1=3$이고, Q의 거리$=n+1=5$임을 알 수 있다.

(경우 2.3) $t=H_{UV}=n-1$인 경우

교환 순서 $CR_x(H_2)$▣$CR_x(H_1^-)$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. t가 홀수이므로, H_1의 원소 개수가 H_2의 원소 개수보다 하나가 적음을 알 수 있고, 컨테이너의 크기는 보조정리 5에 의해 $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$임을 알 수 있다.

$CR_x(H_2)$▣$CR_x(H_1^-)$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. FHS($2n,n$)의 분지수는 $n+1$이므로 $n+1-\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$개의 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있다. 보조정리 1에 의해 Q는 $c\bullet CR_x(H_4)$▣$CR_x(H_3)$에 의해 구할 수 있다. 경로 P와 Q를 연결하면 보조정리 1에 의해 길이가 $2n$인 하나의 사이클을 구성하므로 Q의 거리가 $n+1$임을 알 수 있다. 경로 P의 거리가 $n-1$이고 경로 Q의 거리가 $n+1$이므로 D_n(FHS($2n,n$))$=n+1$이다.

(예) U=00001111, V=11000011이면, $t=H_{UV}=n-1=3$이고, $R^1=\{2,5,6\}$, $H_1=\{2\}$, $H_2=\{5,6\}$, $H_3=\{3,4\}$, $H_4=\{7,8\}$이다. 경로 P는 [5,2,6], [6,2,5]이고, 경로 Q는 [c,7,3,8,4], [7,3,8,4,c], [8,4,7,c,3]이므로 P의 거리$=n-1=3$이고, Q의 거리$=n+1=5$임을 알 수 있다.

(경우 2.4) $t=2n-H_{UV}$인 경우

교환 순서 $c\bullet CR_x(H_4)$▣$CR_x(H_3)$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. t가 홀수이므로, H_4과 H_3의 원소 개수는 같다는 것을 알 수 있고, 컨테이너의 크기는 보조정리 5에 의해 $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor+1$임을 알 수 있다. $c\bullet CR_x(H_4)$▣$CR_x(H_3)$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. FHS($2n,n$)의 분지수는 $n+1$이므로 $n-\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$개의 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있다. FHS($2n,n$)은 이분할 연결망[18]이므로 FHS($2n,n$)의 내부에는 홀수 길이를 갖는 사이클이 존재하지 않기 때문에, $t+1$인 경로는 존재하지 않는다. 그러므로 거리 $t+2$인 경로를 구성한다. FHS($2n,n$)의 분지수는 $n+1$이므로 노드 U로부터 임의의 노드 V에 이르는 $[j,P',j]$ 형태를 갖는 $n-\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$개의 경로 Q를 구성하겠다($n+1\le j\le 2n$, $j\not\in P$). 경로 P'는 경로 P를 구성하는 원소들의 순서를 거꾸로 뒤집은 순서(reverse order)를 갖는 경로이다. 경로 P와 경로 Q는 j가 경로 P에 포함되지 않는 원소이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 경로 P의 거리는 t이고, 경로 Q의 거리는 $t+2$이다. 그러므로 D_d(FHS($2n,n$))$=t+2$이다.

(예) U=000111, V=111000이면, $t=2n-H_{UV}=1$이고, $R^1=\{2,3,4,5,6\}$, $H_1=\{2,3\}$, $H_2=\{4,5,6\}$, $H_3=\{\}$, $H_4=\{\}$이다. 경로 P는 [c]이고, 경로 Q는 [4,c,4], [5,c,5], [6,c,6]이므로 P의 거리 $=2n-H_{UV}=1$이고, Q의 거리$=t+2=3$임을 알 수 있다.

(경우 2.5) $t=H_{UV}$인 경우

교환 순서 $CR_x(H_2)$▣$CR_x(H_1^-)$에 의해 두 노드 U와 V 사이의 경로를 구성할 수 있다. t가 홀수이므로, H_1의 원소 개수가 H_2의 원소 개수보다 하나가 적음을 알 수 있고, 컨테이너의 크기는 보조정리 5에 의해 $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$임을 알 수 있다. $CR_x(H_2)$▣$CR_x(H_1^-)$에 의해 노드 U와 V를 연결하는 하나의 경로를 P라 하자. FHS($2n,n$)의 분지수는 $n+1$이므로 $n+1-\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$개의 다른 경로 Q가 존재함을 알 수 있다. FHS($2n,n$)은 이분할 연결망[18]이므로 FHS($2n,n$)의 내부에는 홀수 길이를 갖는 사이클이 존재하지 않기 때문에, $t+1$인 경로와 $t+3$인 경로는 존재하지 않는다. 그러므로 길이 $t+2$인 경로를 구성한다. 거리 $t+2$인 경로 Q는 $[c,P,c]$ 형태를 갖는 하나의 경로만이 존재한다. 임의의 원소 j($n+1\le j\le 2n$, $j\not\in P$)가 포함된 거리 $t+2$인 경로 $[j,P,j]$ 또는 $[j,P',j]$가 존재한다고 가정하자. 노드 U에 인접한 i-에지들은 $n+1\le i\le 2n$이고, 경로 P를 구성하는 첫 번째 원소 p와 마지막 원소 p'는 $n+1\le i\le 2n$이다. 그러므로 $[j,P,j]$ 또는 $[j,P',j]$가 존재한다면 j와 p 또는 j와 p'가 경로를 구성하고 있다는 것을 나타내는데, 교환 순서의 구성 요건에 모순이다. 경로 P와 $[c,P,c]$ 형태를 갖는 경로들은 c가 경로 P에 포함되지 않은 원소이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 거리 $t+4$인 $n-\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$개의 다른 노드 중복 없는 경로 Q를 구성하겠다. 경로 Q는 $[x,y,P,x,y]$ 형태를 갖는다($n+1\le x\le 2n$, $2\le y\le n$, $x,y\not\in P$). x,y가 경로 P에 포함되지 않은 원소들이기 때문에 노드 중복이 발생하지 않는다. 경로 P의 거리는 t이고, 경로 Q의 거리는 $t+2$ 또는 $t+4$이다. 그러므로 D_d(FHS($2n,n$))$=t+4$이다.

(예) U=000111, V=100011이면, $t=H_{UV}=1$이고, $R^1=\{4\}$, $H_1=\{\}$, $H_2=\{4\}$, $H_3=\{2,3\}$, $H_4=\{5,6\}$이다. 경로 P는 [4]이고, $[c,P,c]$ 형태의 경로는 [c,4,c]이며, 경로 Q는 [5,2,4,5,2], [6,3,4,6,3]이므로 P의 거리$=H_{UV}=1$이고, Q의 거리$=t+4=5$임을 알 수 있다. □

정리 1에 의해 FHS($2n,n$)의 고장 지름을 다음과 같이 구할 수 있다.

[정리 2] D_f(FHS($2n,n$)) = D(FHS($2n,n$)) +2 = $n+2$($n\ge 3$).

[증명] FHS($2n,n$)는 노드 대칭이므로 FHS($2n,n$)의 두 노드를 $U=0^n1^n$와 노드 V라고 하자.

$dist(U,V)$에 따라 FHS($2n,n$)의 고장지름 D_f(FHS($2n,n$))을 분석하겠다.

(경우 1) $dist(U,V)=D=n$

정리 3에 의해 D_d(FHS($2n,n$))$=n$이므로 D_f(FHS($2n,n$))$=n$임을 알 수 있다.

(경우 2) $dist(U,V)=n-1$

정리 3에 의해 D_d(FHS($2n,n$))$=n+1$이므로 D_f(FHS($2n,n$))$=n+1$임을 알 수 있다.

(경우 3) $dist(U,V)\le n-2$

정리 3에 의해 D_d(FHS($2n,n$))$=dist(U,V)+4$이므로 D_f(FHS($2n,n$))$=n+2$임을 알 수 있다. □

4. 결 론

[20]에서 폴디드 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)의 노드 중복 없는 경로를 제안하였고, 제안된 노드 중복 없는 경로를 바탕으로 FHS($2n,n$)의 고장 지름이 $2n-1$임을 증명하였다. 본 논문에서는 교환 순서를 이용하여 FHS($2n,n$)의 효율적인 노드 중복 없는 경로를 구성하는 방법을 제안하였다. 그리고 FHS($2n,n$)의 광역지름이 $dist(U,V)+4$ 이하임을 보였고, 고장지름이 $n+2$ 이하임을 보였다. 이러한 결과에 의해 [20]에서 제안한 노드 중복 없는 경로와 고장지름보다 본 논문에서 제안한 노드 중복 없는 경로와 고장지름이 더 우수함을 알 수 있다.

참 고 문 헌

[1] C.-P. Chang, T.-Y. Sung, and L.-H. Hsu, “Edge Congestion and Topological Properties of Crossed Cubes,” IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.11, No.1, pp.64-80, 2000.

[2] E. Cheng and L. Liptak, “Structural properties of hyper-stars,” Ars Combinatoria, vol.80, pp.65-73, 2006.

[3] E. Cheng and M. Shah, “A strong structural theorem for hyper-stars,” Congressus Numerantium, Vol.179 pp.181-191, 2006.

[4] D.-R. Duh, G.-H. Chen, and J.-F. Fang, “Algorithms and properties of a new two-level network with folded hypercubes as basic modules,” IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.6, No.7, pp.714-723, 1995.

[5] K. Day and A. E. Al-Ayyoub, “Fault diameter of k-ary n-cube networks,” IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems, Vol.8, No.9, pp.903-907, 1997.

[6] J.-S. Fu, G.-H. Chen, and D.-R. Duh, “Node-disjoint paths and related problems on hierarchical cubic networks,” Networks, Vol.40, No.3, pp.142-154, 2002.

[7] D. F. Hsu, “On container width and length in graphs, groups, and networks,” IEICE Trans. Fundamentals of Electronics Communications and Computer Sciences E77-A, pp.668-680, 1994.

[8] J.-S. Kim, E. Cheng, L. Liptak, H.-O. Lee, “Embedding hypercubes, rings and odd graphs into Hyper-stars,” International Journal of Computer Mathematics, Vol.86, No.5, pp.771-778, 2009.

[9] J.-S. Kim, H.-O. Lee, “Comments on ”A Study of Odd Graphs as Fault-Tolerant Interconnection Networks“,” IEEE Transactions on Computers, Vol.57, No.6, pp.864, 2008.

[10] S. Latifi, “Combinatorial Analysis of the Fault-Diameter of the n-cube,” IEEE. Trans. Computers, Vol.42, No.1, pp.27-33, 1993.

[11] H.-O. Lee, J.-S. Kim, E. Oh, H.-S. Lim, “Hyper-Star Graph: A New Interconnection Network Improving the Network Cost of the Hypercube,” Lecture Notes in Computer Science : EurAsia-ICT 2002, LNCS 2510, pp.858-865, 2002.

[12] Y. Rouskov and P. K. Srimani, “Fault diameter of star graphs,” Information Processing Letters, Vol.48, No.5, pp.243-251, 1993.

[13] M. Xu, J.-M. Xu, and X.-M. Hou, “Fault diameter of Cartesian product graphs, Infomation Processing Letters,” Vol.93, No.5, pp.245-248, 2005.

[14] 김종석, 오은숙, 이형옥, “하이퍼-스타 연결망의 위상적 망성질과 방송 알고리즘”, 정보처리학회논문지A, Vol.11-A, No.5, pp.341-346, 2004.

[15] 김종석, 이형옥, “상호연결망 HS(2n,n)의 이분할 에지수와 고장 지름 분석”, 정보처리학회논문지A, Vol.12-A, No.6, pp.499-506, 2005.

[16] 김종석, 이형옥, “PMC 모델과 비교진단모델을 이용한 하이퍼-스타 연결망의 진단도 분석”, 정보처리학회논문지A, Vol.13-A, No.1, pp.19-26, 2006.

[17] 김종석, “Folded 하이퍼-스타 FHS(2n,n)의 위상적 성질 분석,” 정보처리학회 논문지 A, Vol.14-A, No.5, pp.263-268, 2007.

[18] 김종석, 이형옥, 김성원, “상호연결망 폴디드 하이퍼-스타 FHS($2n,n$)의 대칭성과 임베딩 알고리즘”, 한국정보처리학회 논문지, 게재예정.

[19] 이형옥, 김병철, 임형석, “하이퍼-스타 그래프 : 다중 컴퓨터를 위한 새로운 상호 연결망”, 한국정보처리학회논문지, Vol.5, No.12, pp.3099-3108, 1998.

[20] 이형옥, 최정, 박승배, 조정호, 임형석, “Folded 하이퍼-스타 그래프의 병렬 경로”, 한국정보처리학회논문지, Vol.6, No.7, pp.1756-1769, 1999.

김 종 석

e-mail : rockhee7@gmail.com
1995년 순천대학교 전산학과(학사)
2001년 순천대학교 컴퓨터과학과(이학석사)
2004년 순천대학교 컴퓨터과학과(이학박사)
2005년～2008년 오클라호마 주립대학교 컴퓨터과학과 박사후연구원
2008년～현 재 영남대학교 전자정보공학부 연구교수
관심분야 : 병렬 및 분산처리, 계산이론, 네트워크 설계 및 분석

이 형 옥

e-mail : oklee@sunchon.ac.kr
1994년 순천대학교 전산학과(학사)
1996년 전남대학교 전산통계학과(석사)
1999년 전남대학교 전산통계학과(박사)
1999년～2002년 한국정보사회진흥원(선임연구원)
2006년～2007년 University of Texas at Dallas 교환교수
2002년～현 재 순천대학교 컴퓨터교육과 부교수
관심분야 : 병렬 및 분산처리, 계산이론, 알고리즘, 네트워크 설계 및 보안