

스퍼기어의 접촉응력 해석

이진환*, 이동형**, 이권희#

Contact Stress Analysis of a Pair of Mating Spur Gears

Jin-Hwan Lee*, Dong-Hyong Lee**, Kwon-Hee Lee#

(Received 27 July 2010; received in revised form 17 August 2010; accepted 19 August 2010)

ABSTRACT

This paper presents the study on the contact stress analysis of a pair of mating spur gears during rotation. Contact stress analysis is performed between two spur gear teeth at different contact positions during rotation. An example is presented to investigate the variation of contact stress on a pair of mating gears with contact positions. The variation of contact stress during rotation is compared with the contact stress at lowest point of single tooth contact(LPSTC) and AGMA Equation for contact stress. The results show that contact stress varies along the contact position and gets maximum values in the beginning and end of the contact. In this study, the gear design considering the contact stress on a pair of mating gears is more severe than that of AGMA standard.

Key Words : Spur gear(스퍼기어), Hertzian contact stress(Hertz 접촉 응력), Lowest point of single tooth contact(한 쌍 물림위치의 최저점), Highest point of single tooth contact(한 쌍 물림위치의 최고점), Contact ratio(물림률)

1. 서 론

기어는 기계 시스템을 구성하는 요소 중 속도비가 정확하고 동력의 전달 효율이 높아 동력전달용 기계 요소로 가장 널리 사용되고 있다.

일반적으로 스퍼, 헬리컬, 워 기어 등의 설계를 위한 강도 규격은 국제적으로 널리 통용되고 있는 AGMA^[1]와 ISO규격^[2]을 이용한다. 그러나 차량 조향 장치에 쓰이는 랙과 피니언의 강도 해석과 같은 복잡한 형상과 접촉이 수반되는 강도해석에는 이들 강

도 공식을 적용하기 힘들다. 따라서 이와 같은 경우의 강도를 해석함에는 비교적 간단한 Lewis가 제안한 기어 이뿌리 면 굽힘 응력 계산식과 Hertz의 접촉 면압 공식을 사용하여 기어 접촉면의 응력을 해석하거나 지금까지의 경험을 통하여 유추하는 수준에 그치고 있다^[3].

실제, 기어 전동에서 치의 접촉에 있어서 한 쌍의 접촉구간과 두 쌍의 접촉구간의 주기적인 변화가 생기는데, 이때 하중 전달 측면에서 급격한 하중 변화가 발생한다^[4]. 이때 하중 변화는 표면피팅(surface pitting)에 관여하는 인자 중의 하나이다. 일단 발생된 피트는 소음과 진동으로 운전조건을 악화시키며, 방치할 경우 우발적인 파손을 유발시킬 수 있다. 하지만 접촉 피로에 의한 표면피팅 현상은 오래전부터

* 동아대학교 일반대학원 기계공학과

교신저자 : 동아대학교 기계공학과

E-mail : leekh@dau.ac.kr

** 한국철도기술연구원 철도시스템연구센터

많은 연구자들의 관심사가 되어 왔으나 아직까지 피팅기구(pitting mechanism)를 완전하게 설명할 수 있는 일반적인 이론이 정립되어 있지 않은 상태에 있다^[5]. 따라서 접촉 피로를 고려하기 위해서는 기어 전동 시 전달 하중의 변화에 따른 접촉응력의 변화를 이해하는 것이 필요하다.

본 연구에서는 유한요소법을 통해 기어의 맞물림 위치에 따른 접촉응력의 변화를 해석하였다. 기어와 피니언을 모델링 하고 기어에 토크를 부가하여 치면의 접촉이 발생하게 하였고, 기어의 맞물림 위치에 따른 작용 하중은 기어의 물림률을 고려하여 적용하였다. 해석 결과를 Hertz의 접촉 압력 이론을 기초로 한 AGMA규격과 비교 하였고, 물림위치에 따른 접촉응력의 변화를 분석하였다.

2. 기어의 맞물림 위치

유한요소해석을 이용한 기어의 응력해석 방법은 두 가지 방법이 있다. 첫 번째 방법은 기어 또는 피니언 중 하나만 모델링하고 하중을 치면(齒面)의 하중작용 위치에 직접 가하는 방법으로, 이 방법은 기어 및 피니언의 굽힘 응력을 계산 할 수 있다. 이 방법은 단순하다는 장점 때문에 많이 사용되고 있지만, 접촉응력을 정확하게 계산할 수 없다는 단점이 있다. 두 번째 방법은 기어와 피니언을 모두 모델링하고 기어 또는 피니언에 토크를 부가하여 기어가 맞물리게 하는 방법이다. 이 방법은 해석 방법이 어렵고, 시간이 많이 걸린다는 단점이 있지만, 기어의 굽힘응력과 접촉응력을 동시에 계산할 수 있다. 따라서 기어 치면에 발생하는 접촉응력을 정확하게 계산하기 위해서는 두 번째 방법인 기어와 피니언을 맞물린 상태에서 해석하는 방법을 사용해야 하며, 본 연구에서는 이 방법을 사용하였다.

기어와 피니언이 맞물린 상태에서 접촉해석을 수행하기 위해서는 기어와 피니언의 물림위치에 따른 기하학적 형상이 모델링되어야 한다. 본 연구에서는 물림률에 따른 기하학적 형상을 결정하기 위해 다음과 같은 방법을 이용하였다.

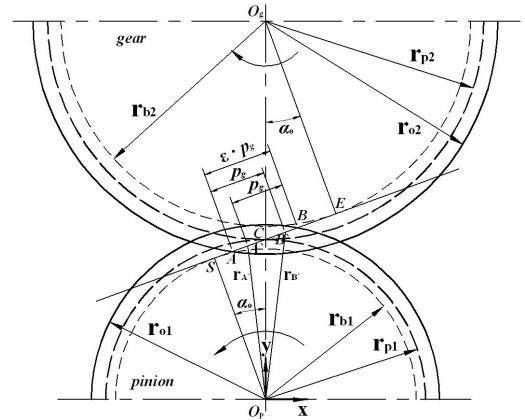


Fig. 1 Geometric determination of LPSTC

2.1 한 쌍 물림위치의 최저점

기어와 피니언이 Fig. 1처럼 맞물려 회전할 때, 기어의 물림길이 AB는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$AB = \epsilon \times P_g = AC + CB \quad (1)$$

$$AC = \sqrt{r_{o2}^2 - (r_{p2} \times \cos(\alpha_o))^2} - r_{p2} \times \sin(\alpha_o) \quad (2)$$

$$CB = \sqrt{r_{o1}^2 - (r_{p1} \times \cos(\alpha_o))^2} - r_{p1} \times \sin(\alpha_o) \quad (3)$$

AB

$$= \sqrt{r_{o2}^2 - (r_{p2} \times \cos(\alpha_o))^2} + \sqrt{r_{o1}^2 - (r_{p1} \times \cos(\alpha_o))^2} - (r_{p1} + r_{p2}) \times \sin(\alpha_o) \quad (4)$$

여기에서, ϵ 는 물림률, P_g 는 기초원에서 원주피치, α_o 는 압력각, r_{p1}, r_{p2} 는 각각 피니언과 기어의 피치원 지름, r_{o1}, r_{o2} 는 각각 피니언과 기어의 이끝원 지름이다.

기어의 물림이 **AA'**와 **B'B** 구간에서는 두 쌍의 치가 맞물린 상태에서 하중이 전달되지만, **A'B'** 구간에서는 오직 한 쌍의 치만 맞물린 상태로 모든 하중이 전달된다. **AB'**와 **A'B**의 길이는 기초원에서 원주피치 P_g 와 동일하다.

따라서, 기어 측면에서 한 쌍 물림위치의 최저점(LPSTC), r_B 은 아래의 식으로부터 산출된다^[6].

$$\mathbf{CB}' = \mathbf{AB}' - \mathbf{AC} = P_g - \mathbf{AC} = \pi \times m \times \cos(\alpha_o) - \mathbf{AC} \quad (5)$$

$$r_{B'} = \sqrt{r_{p1}^2 + (\mathbf{CB}')^2 - 2 \times r_{p1} \times \mathbf{CB}' \times \cos(\alpha_o + 90^\circ)} \quad (6)$$

동일한 방법으로 한 쌍 물림위치의 최고점(highest point of single-tooth contact, HPSTC)을 계산할 수 있다.

2.2 기어의 물림률

기어가 연속적으로 회전을 전달시키기 위하여 적어도 한 쌍의 치면 접촉이 끝나지 않은 동안 다음 한 쌍의 치면이 접촉을 시작하여야 한다.

물림률, ϵ 은 기어가 맞물려 회전할때 맞물리는 기어의 평균 잇수(number of teeth)이며, 아래의 식(7)~(9)으로 계산된다.

$$\epsilon = \frac{l}{P_b} \quad (7)$$

$$l = \sqrt{r_{o2}^2 - (r_{b2})^2} + \sqrt{r_{o1}^2 - (r_{b1})^2} - (r_{p1} + r_{p2}) \times \sin(\alpha_o) \quad (8)$$

$$P_b = P_n = \pi \times m \times \cos(\alpha_o) \quad (9)$$

이때 식(8)의 l 은 Fig. 1에서 **AB**의 길이 (물림길이)이며 식(4)와 같다. P_b 는 기초원의 피치이며 이는 법선 피치 P_n 과 같다.

피니언에 작용하는 하중은 물림률에 따라서 변화한다. 즉, 스퍼기어가 맞물려 회전할 경우 기어의 물림은 기어 치 한 쌍이 맞물려 회전하는 위치와 치 두 쌍이 동시에 물려 회전하는 위치로 구분된다. 기어가 일정한 동력을 전달할 때, 기어 치면에 작용하는 접촉력의 합은 일정해야 하므로 치(齒) 두 쌍이 접촉할 때 치 한 개에 작용하는 접촉력은 한 쌍이 접촉할 때 접촉력의 약 반이 된다. 접촉위치에 따른 접촉력의 변화를 도식적으로 표현하면, Fig. 2와 같다⁶⁾. 즉, 기어에 작용하는 접촉력은 Fig. 1과 Fig. 2에서 A'와 B' 구간에서는 기어 치 한 쌍이 맞물려 회전하며 이때 치 한 개에 모든 하중이 전달된다.

맞물림 위치에 따른 기하학적 형상을 모델링하기

위해 접근 물림길이(length of approach)와 퇴거 물림길이(length of recess)에 대응되는 접근각 Φ_{App} 과 퇴거각 Φ_{Rec} 으로 정의된 롤각(roll angle) Φ_c 을 변수로 설정하였다¹⁷⁾. 접근각, 퇴거각과 롤각(roll angle)은 아래 식과 같다.

$$S_A = -r_{b1} \tan(\alpha_o) + \sqrt{(r_{o1})^2 - (r_{b1})^2} \quad (10)$$

$$S_B = r_{b2} \tan(\alpha_o) - \sqrt{(r_{o2})^2 - (r_{b2})^2} \quad (11)$$

$$\Phi_{App} = \frac{-S_A}{r_{b1}} \quad (12)$$

$$\Phi_{Rec} = \frac{S_B}{r_{b1}} \quad (13)$$

$$\Phi_c = \Phi_{App} + \Phi_{Rec} \quad (14)$$

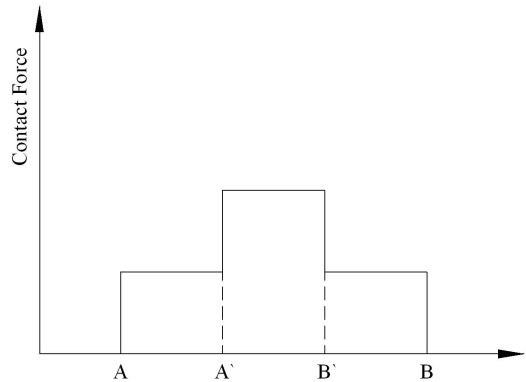


Fig. 2 Position of a tooth load variation on contact point

2.3 AGMA 규격

AGMA 2101-C95 규격에 따라 접촉 응력 σ_H 은 식(15)과 같다¹¹⁾.

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{F_t K_o K_v K_s \frac{K_H}{2r_1 W Z_I}} \quad (15)$$

여기서 각 계수들의 의미와 해석에 사용된 값을 Table 1에 정리하였다.

Table 1 Meanings of the symbols used in Eq(15)

| Meaning | symbol | value |
|--|--------|-------|
| Transmitted tangential load(N) | F_t | 9032 |
| Elastic coefficient(MPa) | Z_E | 187 |
| Overload factor | K_o | 1 |
| Dynamic factor | K_v | 1 |
| Size factor | K_s | 1 |
| Load distribution factor | K_H | 1 |
| Face width(mm) | W | 120 |
| Geometry factor for pitting resistance | Z_I | 0.115 |
| Pitch radius of the pinion(mm) | r_f | 88 |

3. 유한요소해석

기어의 기하학적인 치형은 인벌류트 곡선과 트로코이드 펠렛 곡선으로 나뉜다. 인벌류트 치형을 가지는 기어 치를 형상화하기 위해, 기본 제원인 압력각, 모듈, 잇수, 전위 계수가 주어진 경우, 기어의 제원과 인벌류트 함수를 이용하여 인벌류트 치형을 형상화 할 수 있다^[8].

본 연구에서 사용된 피니언과 기어의 제원 및 물성을 Table 2에 정리하였다. 기어의 잇수 55개, 피니언의 잇수 22개, 모듈 8, 압력각 20° 이다. 재료의 물성치는 탄성계수 200GPa, 프와송비 0.3인 등방성 균질 재료이며 기어의 물림을 단위 치폭을 가지는 평면 응력(plane stress) 문제로 간주하였다^[8-10]. 해석은 상용 유한요소해석 프로그램인 Abaqus^[11]를 사용하였다.

맞물림 위치에 따른 유한요소모델을 구성하기 위한 롤각(roll angle)은 식 (14)에 따라 계산하면 27.4° 이다. 즉, 0°에서 접촉이 시작되어 27.4°에서 접촉이 끝난다. 롤각(roll angle)을 10등분 하여 0°에서 27.4°까지 2.7°씩 증가시켜 롤각(roll angle)에 따른 맞물림 위치에서의 피니언의 접촉응력을 관찰하였다. 이때 작용하중은 물림률에 따라 적용된다. 식(7)~(9)에 의해 물림률은 1.68이므로, 기어가 맞물려 회전하면서 약 68%는 두 쌍의 치가 동시에 물려 회전하고 32%는 한 쌍의 치만 물려 회전한다^[7]. 따라서 두 쌍

의 치가 동시에 물려 회전하는 구간에서는 하중이 전달 토크의 절반만 적용된다. 이점을 고려해 롤각(roll angle)에 따른 10개의 유한요소모델과 한 쌍 물림위치의 최저점(LPSTC)에서의 유한요소모델을 생성하였다. 이 때, 한 쌍 물림위치의 최저점(LPSTC)은 식(6)에 의해 계산되며, 그 결과는 Table 3과 같다.

유한요소모델은 해석시간을 단축하기 위하여 Fig. 3과 같이 해석에 필요한 부분만 모델링 하였다. Fig.3 (a)와 (b)는 각각 기어의 맞물림이 시작한 후 롤각(roll angle)이 2.7°일 때 (Case 1)와 맞물림이 끝나는 롤각(roll angle)이 27.4°일 때 (Case 10)의 유한요소해석모델을 나타내었다.

실제 기어가 회전하면서 회전력을 피니언에 전달하는 조건을 부여하기 위해 기어의 림부 내측에 빔요소를 사용하였다. 빔요소는 z 축 방향으로 토크를 적용할 수 있으므로 이 점을 이용하여 기어의 회전력이 피니언에 전달될 수 있도록 기어의 중심점에서 빔요소로 기어의 림(rim)을 구속하였다. 경계조건은 Fig. 4와 같이, 피니언의 림(rim)부분은 고정시켰고 기어에 토크를 적용시켰다^[9]. 이때 토크는 $1,987 \times 10^3$ Nmm 이며, 기어 치 두 쌍이 동시에 물려 회전하는 구간에서는 작용 토크의 절반인 993.5×10^3 Nmm를 적용하였다. 유한요소모델은 4절점 사각형 요소가

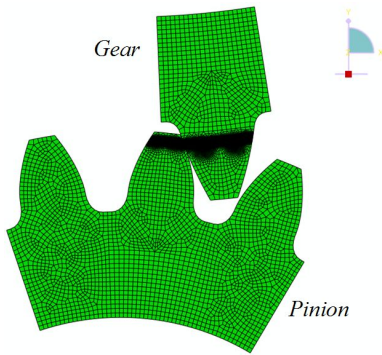
Table 2 Detailed data of pinion and gear

| | Pinion | Gear |
|--------------------------------------|--------------------|--------|
| Number of teeth | 22 | 55 |
| Module | 8 | |
| Pressure angle, $\alpha_o(^{\circ})$ | 20 | |
| Pitch diameter(mm) | 176 | 440 |
| Base Diameter(mm) | 165.39 | 413.46 |
| Torque(Nmm) | 1987×10^3 | |
| Modulus of elasticity | 200GPa | |
| Poisson's ratio | 0.3 | |

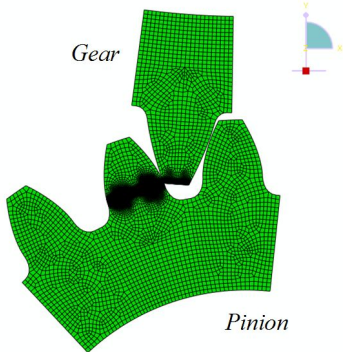
Table 3 Determination of LPSTC and HPSTC

| | Pinion | Gear |
|-----------|---------|----------|
| LPSTC(mm) | R86.432 | R221.742 |
| HPSTC(mm) | R88.962 | R219.089 |

적용되었고 접촉을 고려하여 접촉면의 요소는 같이 조밀하게 분할하였다.



(a) FE model of Case 1



(b) FE model of Case 10

Fig. 3 FE model of Case 1 and Case 10

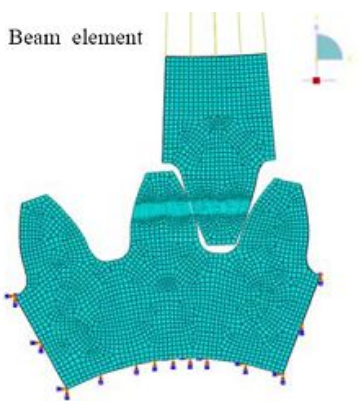


Fig. 4 FE model boundary conditions

4. 결과 및 검토

Table 4는 스퍼기어의 맞물림 위치에 따른 유한요소해석 결과를 나타낸다. 비교를 위하여 한 쌍 물림 위치의 최저점(LPSTC)에서의 해석 결과와 AGMA규격에 의한 접촉응력을 함께 정리하였다. AGMA규격에 의한 접촉 응력은 식(15)에 의해 계산하면 361 MPa 이고, 한 쌍 물림위치의 최저점(LPSTC)에서의 해석 결과는 395.3 MPa로 해석결과가 약간 높게 나타났다. Table 4에서 맞물림 위치에 따른 접촉응력은 Case 7의 경우가 최대인 415.2 MPa 을 나타내었다. Fig.5와 같이 Case 7의 기어 치면에 발생하는 접촉응력은 접촉영역 표면에 크게 나타남을 알 수 있다.

맞물림 위치에 따른 유한요소해석 결과를 도식화

Table 4 Maximum stress of the contact stress analysis

| | Case | Roll Angle(°) | Max. von Mises stress(MPa) |
|-----------|-------|---------------|----------------------------|
| | 0 | 0 | 802.9 |
| Half load | 1 | 2.74 | 273.2 |
| | 2 | 5.48 | 250.0 |
| | 3 | 8.22 | 255.8 |
| | 4 | 10.96 | 360.0 |
| Full load | 5 | 13.7 | 376.4 |
| | 6 | 16.44 | 396.7 |
| | 7 | 19.18 | 415.2 |
| | 8 | 21.92 | 321.1 |
| Half load | 9 | 24.66 | 358.8 |
| | 10 | 27.4 | 788.8 |
| Full load | LPSTC | 16.35 | 395.3 |
| Full load | AGMA | . | 361 |

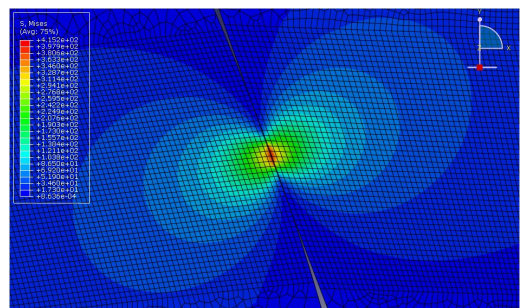


Fig. 5 Contact regions of a pair of mating spur gear

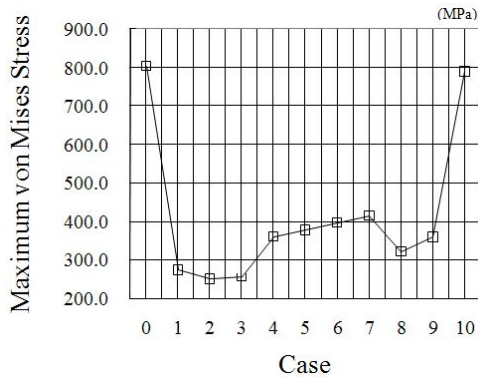


Fig. 6 Contact regions of a pair of mating spur gear

하여 나타내면 Fig. 6과 같다. 그림에서 기어의 접촉 응력은 기어 맞물림의 시작(Case 0)과 끝(Case 10)에서 접촉응력이 크게 나타났다. 이것은 기어 또는 피니언의 이끝에서 접촉이 발생하기 때문이며, 이를 방지하기 하기 위하여 보통 이끝 수정(tip relief)을 하고 있다. 이와 같은 이끝 수정은 하중전달 시 기어의 변형 및 가공오차 등을 고려하여 적절한 수정량을 선정하여야 하며, 최적의 치형 수정량은 향후 연구가 필요한 부분이다.

피니언의 이끝 부위(Case 1)에서 이뿌리 부위(Case 9)까지 접촉이 일어날 경우, 치면의 최대 접촉 응력은 두 쌍 물림위치에서 작게 나타나고, 한 쌍 물림위치(Case 4~Case 7)에서 크게 나타난다. 또한 한 쌍 물림위치의 최고점(HPSTC)에서 보다 최저점(LPSTC) 위치에서 접촉응력이 더 크게 나타나며, 이것은 이뿌리 부위의 곡률반경이 이 끝부위의 곡률반경보다 작아지는 인벌류트 곡선의 특징 때문이다. 일반적으로 기어의 접촉피로 손상(피팅)은 피치원보다 약간 아래에서 발생하며, 본 해석결과는 손상 현상의 원인을 잘 나타내고 있다.

AGMA 규격에 따르면 표면경화된 기어 재료의 표면 피로강도(surface fatigue strength)는 최소 표면 경도가 240 HB일 때, 약 700 MPa 이상이다. 따라서 본 연구에서 해석한 기어의 경우 한 쌍 물림위치에서 최대 415 MPa 이 발생하므로 접촉피로강도 측면에서 안전함을 알 수 있다. 그러나, 기어 맞물림의 시작과 끝에서 접촉응력이 크게 나타나므로 이를 저감하기 위한 치의 형상 수정이 필요하다.

5. 결론

본 연구에서는 맞물림 위치에 따른 스퍼기어의 접촉 응력 변화를 관찰하였다. 기어 전동 시 접촉응력의 변화 중 최대 접촉 응력을 한 쌍 물림의 최저점(LPSTC)과 AGMA규격을 통해 계산된 접촉 응력과 비교해 보았다. 해석 결과 맞물림 위치에 따른 접촉 응력을 고려한 설계가 강도규격 보다 엄격하다는 결론을 얻었다. 또한, 기어 맞물림의 시작과 끝에서 급격한 접촉응력의 변화가 나타났으며, 이는 표면 피팅(surface pitting)의 인자로서, 내구성을 고려한 기어 설계 시 표면피팅(surface pitting)을 감소시키기 위해 치의 형상 수정이 고려되어야 한다.

후 기

이 논문은 동아대학교 학술연구비 지원에 의하여 연구되었음.

참고문헌

1. Chen, Y. C. and Tsay, C. B., "Stress Analysis of a Helical Gear Set with Localized Bearing Contact," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 38, pp. 707-723, 2002.
2. ISO, ISO 6336 Calculation of Load Capacity of Spur and Helical Gears-Part2 and Part 3, 1996.
3. Sung, K. W. and Lim, J. K., "A Strength Analysis of Rack and Pinion of steering gear Assy using a Commercial Finite Element Program," *Transactions of KSAE*, Vol. 16, No. 6, pp. 97-103, 2008.
4. Moon, S. M., Kim T. W. and Cho Y. J., "The Optimum Modification of Tooth Profile in High Contact Ratio Spur Gears for the Smooth Load Transmission," *Autumn Conference Proceeding of KSAE*, pp. 424-430, 1999.
5. Rhee, H. W. and Kim, S. H., "Finite Element Simulation of Surface Pitting due to Contact Fatigue," *J. of KSPE*, Vol. 27, No. 3, pp. 80-88, 2010.
6. Raptis, G. K., Costopoulos, N. T., Papadopoulos,

- A. G. and Tsolakis, D. A., "Rating of Spur Gear Strength Using Photoelasticity and the Finite Element Method," American J. of Engineering and Applied Sciences, Vol. 3, No. 1, pp. 222-231, 2010.
7. Hassan, R. A., "Contact Stress Analysis of Spur Gear Teeth Pair," World Academy of Science, Engineering and Technology, Vol. 58, pp. 611-616, 2009.
8. Park, S. J. and Yoo, W. S., "Profile Shift Coefficient of Gear System Considering Teeth Deflection," J. of KSME(A), Vol. 27, No. 5, pp. 758-763, 2003.
9. Lee, K. W., Ban, J. S., Kim, G. H. and Cho, K. Z., "A Study on Stress Analysis of Spur Gear Using FEM," J. of KSPE, Vol. 19, No. 2, pp. 171-176, 2002.
10. Kim, C. H., Ahn H. S. and Chong, T. H., "On a Method for the Durability Enhancement of Plastic Spur Gear Using Finite Element Analysis," J. of KSME(A), Vol. 27, No. 2, pp. 223-230, 2003.
11. Dassault Systemes, Abaqus Analysis User`s Manual, ver. 6.9, 2009.