

## Lakatos 이론과 GSP를 활용한 접선지도연구

안 병 국 (경희대학교 교육대학원)  
김 병 학\*(경희대학교)  
박 윤 근 (양정고등학교)

접선의 개념은 수학에서 매우 중요하다. 그러나 대학생들조차 미분가능과 접선의 존재를 동일시하는 등 접선의 중요성과 개념에 대해 혼란스러워하고 있다. 이런 관점에서 본 논문에서는 선행연구를 참조하고 초, 중, 고교의 교과서와 교육과정을 분석하여 접선개념의 도입 등을 분석하고 Lakatos 이론과 GSP를 이용한 접선지도방법과 실제 학교현장에서 사용할 수 있는 학습지도안을 제시하고, 현장 적용 및 교수실험결과를 소개한다.

### I. 서 론

수학은 기초적인 개념을 중시하는 학문이라 할 수 있다. 그 이유는 초기의 개념에 대한 완벽한 이해가 더 높은 수준의 개념을 이해하는데 필수조건이 되기 때문이다. 그리고 이러한 과정의 반복을 통해서 최상위의 개념을 이해할 수 있는 것이다. 그러나 기초적인 개념이 반드시 이해하기 쉬운 개념인 것은 아니다. 때문에 교사들은 학생들이 좀 더 쉽게 개념을 이해할 수 있도록 학생들의 이해 수준에 맞게 개념을 변환시키기도 한다. 먼저 이해 수준에 맞는 정의를 제시하고 단계가 올라갈수록 정의를 확장시킨다. 현재 수학과 교육과정에서 단계가 높아질수록 정의가 확장되는 개념들 중의 하나가 바로 접선의 개념이다.

역사적으로 볼 때 접선에 대한 개념은 아주 오래전부터 연구되어 온 개념이기도 하다. 고대 그리스 유클리드(Euclid)가 정의한 원과 접선의 개념에서 시작해서, 로베르발(Roberval)의 벡터 방법, 데 카르트(Descartes)의 해석적 방법, 페르마(Fermat)와 바로우(Barrow)가 사용한 암묵적 무한소 방법 등 접선에 대한 연구는 오래전부터 계속되어 왔다. 또한 미적분학의 발달로 접선을 구하는 방법은 무한소 방법과 극한 방법으로 발전하였다.

최근에는 이런 다양한 접선의 개념을 학교 수학에 적용하기 위한 연구도 많아졌다. 1999년 조영미

\* 접수일(2010년 7월 30일), 심사(수정)일(1차: 2010년 8월 23일, 2차: 9월 3일), 게재확정일자(2010년 9월 24일)

\* ZDM 분류 : G14

\* MSC2000 분류 : 97C30

\* 주제어 : 접선, Lakatos 이론, GSP

\*Corresponding Author

의 「접선 개념의 교육적 연구」와 2004년 임재훈, 박교식의 「학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구」가 있으며, 2007년 김문정의 「접선 개념 인식에 대한 연구」로 접선의 개념과 교수적인 연구는 계속 발전하고 있다. 2004년 임재훈, 박교식의 「학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구」에서는 접선 개념을 이해하는데 여러 단계가 있으며 이 단계에 따라서 접선에 대한 정의가 다르다는 것을 제시하였다. 또한 각 단계별로 제시된 접선의 정의에 따라 접선인 예와 접선이 아닌 반례에 대해서도 자세히 제시하고 있다. 2007년 김문정의 「접선 개념 인식에 대한 연구」에서는 앞의 임재훈과 박교식의 연구를 토대로 해서 라카토스(Lakatos)의 이론을 적용한 접선의 지도에 대한 연구로 발전시켰다. 그러나 아직 이러한 연구가 실제 학교 수학에서 완전히 적용되었다고 보기는 어렵다고 생각된다. 고등학교 수학과정을 모두 마치고, 심지어 대학 강의에서 미적분 강좌를 듣고 있는 대학생들마저도 일반적인 접선의 개념에 대한 이해가 부족하다고 조사되고 있는 실정이다. 이와 같은 관점에서 본 연구는 앞의 연구들의 중요성에 대한 인식을 강조하고 동시에 실제 학교 수학에 적용될 수 있도록 Lakatos 이론과 기하 탐구 소프트웨어인 GSP(The Geometer's Sketch Pad)를 활용하고자 한다. 또한 본 연구에서는 GSP를 활용한 수업 모델을 통해서 기초적인 접선의 정의에서부터 일반적인 접선의 정의까지 단계별로 쉬우면서도 정확하게 개념을 이해할 수 있도록 하고 학습지도안을 제시하고, 현장적용 및 교수실험결과를 소개한다.

## II. 이론적 배경

이 장에서는 본 연구의 이론적 배경인 라카토스 이론을 수학교육학적인 관점에서 간략히 알아본다.

### II-1. 준경험주의 수리철학

20세기 중반 이후에 등장한 준경험주의와 구성주의는 전통적인 의미에서의 수학적 확실성을 부정하는 쪽에 선다. 전통적 수리철학이 결과로서의 수학적 지식의 확실성에 초점을 맞추었다면, 준경험주와 구성주의는 이보다 수학적 지식의 형성 과정, 과정으로서의 수학적 지식 부분에 초점을 맞추고 있다. 자연과학 이론은 반례가 출현하여 반증되는 방식으로 이론이 발전해 왔다. 그러면 수학은 어떠한가? 라카토스는 이 문제에 대해 수학적 지식 역시 반증 가능하고 반증될 때까지만 잠정적으로 참이라고 답한다. 라카토스는 오일러 다면체 정리와 관련된 수학 이론의 발전 과정을 수학사를 조사하여 알아보고, 이를 통해 수학적 지식은 의심의 여지없이 확실한 정리의 수가 단조롭게 늘어나면서 성장한다는 사실을 밝혀내었다. 비형식적인 수학이나 발생 과정에 있는 수학적 지식은 오류 가능한 추측이라는 이런 관점은 오류주의라고 불리기도 한다.

준경험주의(오류주의) 수리철학을 학교 수학교육에서 구체화하는 것은 매우 의미 있는 작업이다.

강문봉(1993)은 라카토스의 오류주의에 바탕을 둔 교육은 추측하고 비판하는 과정을 통해 교과 지식의 의미있는 학습과 함께 탐구하는 방법 자체를 학습하게 하는 목적을 중시하게 된다고 하면서 수업 모형을 고안하여 제시하였다.

## II-2. Lakatos의 준경험주의 이론과 수학적 발견논리

라카토스는 포퍼(Popper)의 비판적 오류주의를 발전시켜 수리철학에 적용하여 오류주의 수리철학을 제안하였다. 비판적 오류주의는 포퍼가 과학적 발견의 논리를 기술하기 위해서 제기한 철학적 입장으로, 지식의 성장을 추측과 반박의 과정으로 규정하며, 모든 지식은 잠정적인 것으로 끊임없는 비판의 대상이 된다고 보았으며, 과학적 지식이 성장하는데 있어서 비판적 사고가 중요함을 강조한다. 이에 영향을 받은 라카토스는 수학적 지식도 오류 가능하다고 생각했으며 수학의 절대적 확실성을 부정하였다. 라카토스에게 있어서 수학의 오류 가능성을 인정하는 것은 수학이 순수한 연역적 체계라는 주장을 재평가해야 함을 의미한다. 라카토스는 수학은 경험 과학인 자연과학과 유사한 방식으로 진행하며, 추측(가설)에 대한 거짓이 공리와 정의에 재전달 된다는 의미에서 준경험적이라고 주장하였다.<sup>1)</sup>

라카토스는 폴리아(Polya)의 경험주의적 수학관, 즉 수학을 실험적이고 귀납적인 과학으로 규정한 데서 한 걸음 더 나아가 증명된 정리가 논의의 여지가 없고 최종적인 것이라는 전통적인 관념에까지 의문을 제기하고 있다. 그에 의하면 어떤 명제를 증명하는 것은 수학적 발견의 논리인 비판을 용이하게 하기 위하여 그 명제를 보조정리로 분해하는 과정이다. 수학을 준경험과학으로 규정한 라카토스의 오류주의 수리철학이 이러한 폴리아의 연구를 출발점으로 하고 있음을 특별히 주목할 만한 점이다.

이러한 관점에서 볼 때, 수학교육에서 무엇보다 중요하게 간주되어야 할 교육목적은 비판하고 토론하는 능력과 태도이다. 이러한 능력은 민주주의 사회에서 교육이 추구하는 합리적인 인간상과 맥을 같이 하는 바, 합리적 인간은 어떤 주장에 대한 공적인 논의와 비판적 검증 과정을 허용하며 자신의 주장에 대한 개방적 태도를 견지한다고 할 수 있다.

## II-3. Lakatos 수리철학의 수업에 대한 발전적 적용

라카토스는 비판적인 수학적 탐구 양식으로서 소박한 추정과 연역적 추정의 두 가지 패턴을 제시하였다. 이 두 가지 패턴에 의해서 비판적으로 수학적 탐구가 이루어진다고 본다면, 학생들에게 수학적 탐구의 습관을 형성하기 위해서는 먼저, 매우 단순하고 초보적인 것일지라도 추측을 하는 경험을하도록 하여야 한다. 그러기 위해서는 학생들 수준에서 추측이 가능하도록 문제 상황을 잘 구성하여

1) Lakatos Imre (1978). Mathematics, Science and Epistemology. Edited by J. Worrall and G. Curie. London : Cambridge University Press.

야 하며, 학생의 수준에서 반박의 여지가 없는 엄밀한 정리를 처음부터 제시해서는 안 될 것이다. 추측을 권장한다는 것은 플라톤(Plato)적 직관이 아닌 학생의 현재의 지적 상태를 반영하는 경험적 직관을 중요시하는 것이다. 그러한 직관은 모호하고 오류가 있을 수 있으며 그러한 직관을 개발하는 방안이 명확하지는 않지만, 교육은 바로 여기에서 출발해야 한다는 주장이 라카토스에 의해 뒷받침된다.

다음에는 학생들이 수학적 비판을 경험할 수 있는 수업 상황을 만들어 주어야 한다. 자유로운 추측과 자유로운 비판이 제기되기 위해서는 잘못된 추측이나 잘못된 비판이 비난받아서는 안 된다. 또한, 이러한 비판이 제기되기 위해서는 잘못된 추측이나 잘못된 비판이 비난 받아서는 안 된다. 또한, 이러한 비판이 개인에 대한 공격이 아니라 아이디어에 대한 공격임을 이해하게 하여 자신의 추측이 교사나 동료학생들에 의해 기꺼이 비판받기를 요구하도록 해야 할 것이다. 이러한 모형에 따른 수업은 처음부터 정리를 제시하고 그것을 증명하는 수업보다 산만하고 복잡하며 시간도 많이 소요될 수 있다. 그리고 이 모형에 따라 마지막으로 얻어지는 추측, 곧 정리는 연역적으로 제시된 정리와 동일하거나 그보다 더 불완전할 수도 있다. 그러나 수업의 목적이 학생들에게 주어진 정리를 논리적으로 증명하게 하는 것이 아니라 그러한 정리를 발견하고 비판하고 개선하는 과정을 통해 교과 지식의 의미 있는 학습과 함께 탐구하는 방법 자체를 학습하게 하는 것이라면 불완전한 정리를 보다 많은 시간을 요하면서 얻게 된다 하더라도 충분한 가치가 있을 것으로 생각된다. 따라서 수업의 목적이 단순한 명제적인 수학적 지식의 획득인가 아니면 수학을 하는 능력의 개발과 그 경험인가를 먼저 충분히 고려해 본 후에 이러한 탐구 모형을 수업에 적용하여야 할 것이다.

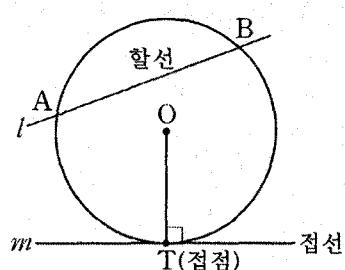
### III. 단계별 접선 개념과 Lakatos 이론의 적용

이 장에서는 접선개념의 도입방법과 관련하여 초, 중, 고등학교 교과서의 내용파악과 분석을 한다.

#### III-1. 현 교육과정에서 접선 개념의 도입 방법

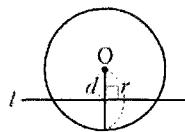
##### 가. 중학교 수학 1 - VII. 평면도형

중학교 수학 1의 'VII. 평면도형 단원 - 2. 원과 부채꼴' 단원에서 접선의 개념이 처음으로 도입된다. 이 단원에서는 원과 직선의 위치 관계를 통해 원의 할선과 접선을 정의한다. 한 직선이 원과 두 점에서 만날 때 그 직선을 원의 할선이라고 하며, 한 점에서 만날 때 원의 접선이라고 정의하고 있다. 이 개념은 임재훈, 박교식(2004)의 연구에서 접선의 개념 증명적 접선 개념 1에 해당한다.

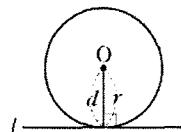


<그림 III-1> 원의 할선과 접선<sup>2)</sup>

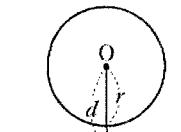
### 원과 직선의 위치 관계

1.  $d < r$  일 때

두 점에서 만난다.

2.  $d = r$  일 때

한 점에서 만난다.

3.  $d > r$  일 때

만나지 않는다.

<그림 III-2> 원과 직선의 위치 관계<sup>3)</sup>

### 나. 고등학교 수학 - V. 도형의 방정식

'고등학교 수학'의 'V. 도형의 방정식 - 2. 원과 직선의 위치 관계' 단원에서는 원과 직선의 연립방정식에서 실근의 개수를 이용하여 원과 직선의 위치 관계를 정하고 있다. 원과 직선의 교점의 개수는 이들의 연립방정식의 실근의 개수와 일치한다. 따라서 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 판별식  $D$ 를 구하면 판별식  $D$ 의 부호에 따라서 원과 직선의 관계를 다음과 같이 정해진다.

$D > 0 \Leftrightarrow$  서로 다른 두 점에서 만난다.

$D = 0 \Leftrightarrow$  한 점에서 만난다(접한다).

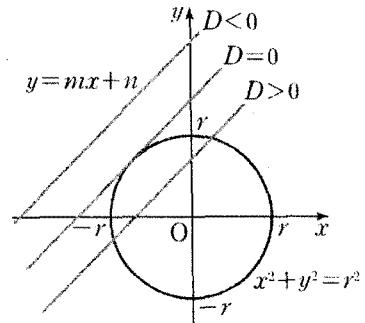
$D < 0 \Leftrightarrow$  만나지 않는다.

그리고 이를 이용하여 원의 접선의 방정식을 구할 수 있음을 제시하고 있다. 이 개념은 임재훈, 박교식(2004)의 연구에서 분류한 접선의 개념 중 함수적 개념 1에 해당한다고 할 수 있다.

### 다. 고등학교 수학 - VI. 함수

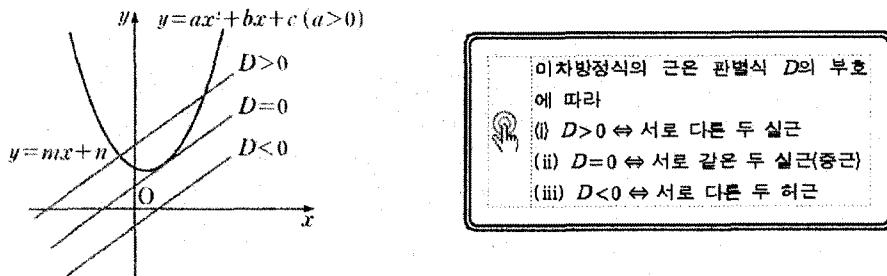
'고등학교 수학'의 'VI. 함수 - 2. 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계' 단원에서는 앞 단원의 원과 직선의 위치 관계에서와 동일한 방법으로 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 정하고 있다. 이차함수와 직선의 연립방정식에서 판별식  $D$ 의 부호에 따라 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계가 정해진다. 이를 이용하여 이차함수의 접선에 대한 개념을 제시하고 있다.

이 개념은 임재훈, 박교식(2004)의 연구에서 분류한 접선의 개념 중 함수적 개념 1에 해당한다고 할 수 있다.



&lt;그림 III-3&gt; 원과 직선의 위치 관계와 판별식

2) 우정호외 9인, 중학교 수학1, 두산동아, p.236

<그림 III-4> 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계<sup>3)</sup>

#### 라. 수학 II - III. 다항함수의 미분법 1

수학 II의 'III. 다항함수의 미분법 - 1. 미분계수와 도함수' 단원에서는 미분계수의 기하학적 의미를 통해서 접선의 개념을 소개하고 있다. <그림 III-5>와 같이 점  $P$ 를 고정하고  $h \rightarrow 0$ 이면 점  $Q$ 는  $y = f(x)$ 의 그래프 위를 움직이면서 점  $P$ 에 한없이 가까워지며, 직선  $PQ$ 는 점  $P$ 를 지나는 한 직선  $PT$ 에 한없이 가까워진다. 이 직선  $PT$ 는 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $P$ 에서의 접선임을 알 수 있다.

또한 함수  $y = f(x)$ 의  $x = a$ 에서의 미분계수  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ 는 점  $P(a, f(a))$

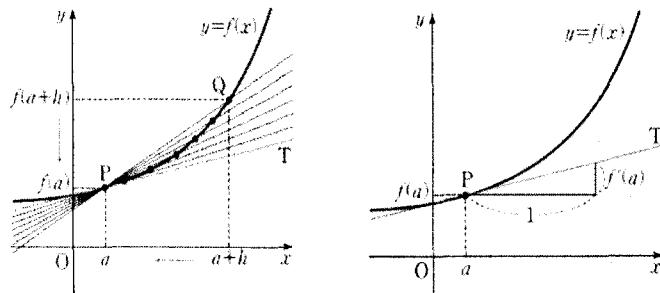
에서 곡선  $y = f(x)$ 의 접선의 기울기가 됨을 알 수 있다. 이는 할선  $PQ$ 의 점  $P$ 로의 극한이 점  $P$ 에서의 접선임을 말하는 것이다. 그래서 이 개념을 흔히 '할선의 극한'이라고 한다. 그리고 이것은 임재훈, 박교식(2004)의 연구에서 분류하고 있는 접선의 개념 중에서 기하적 접선 개념 3에 해당하는 개념이라고 할 수 있다.

#### 마. 수학 II - III. 다항함수의 미분법 2

'수학 II'의 'III. 다항함수의 미분법 - 2. 도함수의 활용' 단원에서는 접선의 기울기는 그 점에서의 미분계수와 같다는 사실로부터 간단히 접선의 방정식을 구하는 방법을 소개하고 있다.

<그림 III-6>의 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 이다. 이 개념은 임재훈, 박교식(2004)의 연구에서 분류한 접선의 개념 중 함수적 접선 개념 2에 해당하는 개념이라고 할 수 있다.

3) 우정호 외 9인, 고등학교 수학, 두산동아, p.284



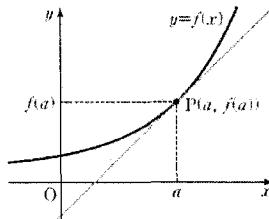
&lt;그림 III-5&gt; 미분계수의 기하학적 의미

미분계수의 기하학적 의미에서 미분가능한 함수

$y=f(x)$ 의  $x=a$ 에서의 접선의 기울기는 미분계수

$f'(a)$ 임을 알아보았다.

따라서 다음을 알 수 있다.



접선의 방정식

곡선  $y=f(x)$  위의 점  $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

&lt;그림 III-6&gt; 미분계수와 접선의 방정식4)

### III-2. 단계별 접선 개념의 형성

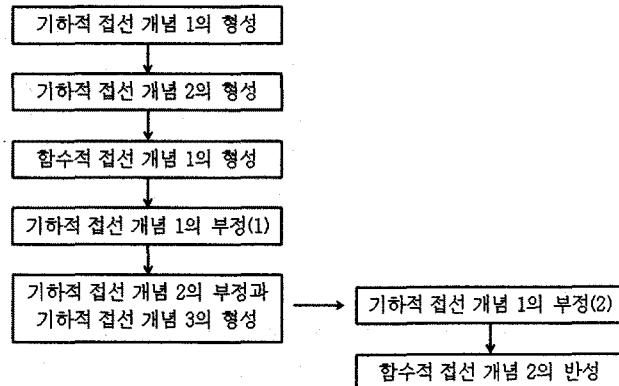
임재훈과 박교식(2004)는 다양한 접선의 개념을 바탕으로 접선의 개념과 형성 단계를 <표>와 같이 분류하였다.

&lt;표 III-1&gt; 접선의 개념5)

기하적 접선 개념		함수적 접선 개념	
개념 1	곡선과 한 점에서 만나는 직선	개념 1	직선의 방정식과 곡선의 방정식을 연립하여 얻은 $x$ 에 대한 방정식이 중근을 갖는 직선(판별식 $D=0$ )
개념 2	곡선을 스쳐 지나가나는 직선	개념 2	곡선위의 한 점을 지나며 기울기가 그 점에서의 미분계수와 같은 직선
개념 3	할선의 극한		

4) 조태근 외 4인, 수학 II, 금성교과서, p.92

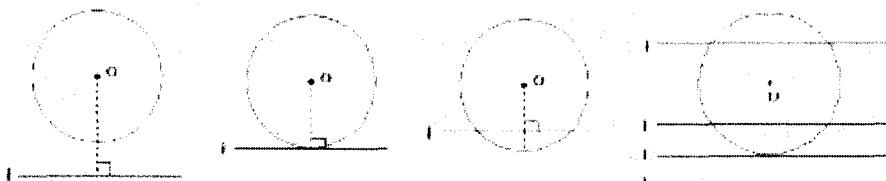
5) 임재훈, 박교식(2004), 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구, 수학교육학 연구, 14(2), 171-185, 5면



&lt;그림 III-7&gt; 접선 개념의 형성 단계

#### 가. 기하적 접선 개념 1의 형성 (단계 1)

기하적 접선 개념 1의 형성 단계는 원과 직선의 위치 관계를 맥락으로 하여 ‘곡선과 한 점에서 만나는 직선’이라는 접선 개념을 형성하는 것이다. 아래의 <그림 III-8>과 같이, 학생들은 원과 직선의 위치에 따라서 만나는 점의 개수가 다르다는 사실을 발견하게 된다. 여기서 곡선과 한 점에서 만나는 직선이라는 접선 개념이 형성될 수 있다. 기하적 접선 개념 1은 접선의 역사적 배경의 원의 접선에 나타나 있는 개념과 관련이 있다. 이 개념은 유클리드 원론에서 평면도형인 원을 이용해서 접선을 정적으로 정의하고 있는 것과 맥락이 같다고 할 수 있다.

<그림 III-8> 기하적 접선 개념 1의 형성<sup>6)</sup>

#### 나. 기하적 접선 개념 2의 형성 (단계 2)

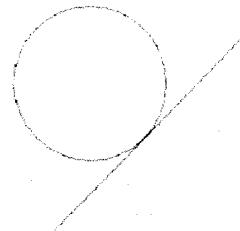
(단계 1)에서 직선을 비교하는 활동을 하는 가운데에도 ‘곡선을 스쳐 지나가는 직선’이라는 접선 개념이 형성될 여지는 있다. 그러나 <그림 III-8>의 세 직선을 비교할 때에는 직선과 곡선이 만나는가, 만나지 않는가, 몇 개의 점에서 만나는가의 차이에만 주목하기 쉽다.

기하적 접선 개념 2의 형성을 보다 명확히 하기 위해서는 원과 만나지 않거나 두 점에서 만나는 직선을 제외한 <그림 III-9>을 사용하는 것이 좋다. 이러한 그림을 사용하면서 접선의 성질을 탐구

6) 임재훈, 박교식(2004), 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구, 수학교육학 연구, 14(2), 171-185, 6면

하는 가운데, ‘접선은 원을 스치고 지나간다, 관통하지 않는다.’와 같은 사실에 주목할 수 있다. 따라서 이 과정을 통해 기하적 접선 개념 2가 형성될 수 있다.

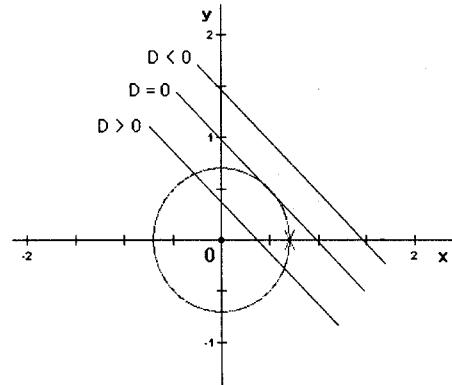
그리고 원에서 기하적 접선 개념 1과 기하적 접선 개념 2의 관계를 탐구하게 된다. 이러한 조사를 통해 원에서는 ‘직선이 곡선과 한 점에서 만나면 곡선을 스치고 지나가고, 곡선을 스치고 지나가면 곡선과 한 점에서 만나게 된다.’는 사실을 알게 된다.



<그림 III-9> 기하적 접선 개념 2의 형성

#### 다. 함수적 접선 개념 1의 형성 (단계 3)

이 단계는 해석기하적인 관점에서 접선의 식을 구하는 단계이다. 우선 원과 직선의 방정식을 각각  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $y = mx + n$ 이라고 하자. 직선이 원과 접하려면 원과 한 점에서 만나야 하고, 이것은 두 방정식을 연립하여 얻은  $x$ 에 대한 방정식  $(m^2 + 1)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$ 의 실수해가 하나이어야 한다는 것이다. 이로부터 이 방정식이 중근을 갖는다 또는 판별식  $D = 0$ 이라는 함수적 접선 개념 1을 형성하게 한다.(<그림 III-10> 참조)

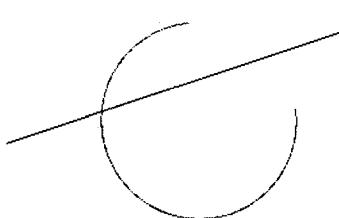


<그림 III-10> 함수적 접선 개념 1의 형성

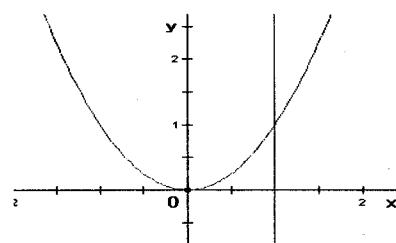
#### 라. 기하적 접선 개념 1의 부정 (1) (단계 4)

<그림 III-11>과 같이 원에서 성립하는 ‘한 점에서 만난다.’와 ‘스치고 지나간다.’ 사이의 필요충분의 관계가 일반적으로 성립하는 것은 아님을 알게 한다.

다음으로, 앞에서 원을 맥락으로 하여 형성된 기하적 접선 개념 1, 2가 포물선의 맥락에서도 적용 가능한 것인지 탐구하게 한다. <그림 III-12>(포물선  $y = x^2$ 과  $x = 1$ )에서 직선  $x = 1$ 을 접선으로 보는 것이 타당한지에 대하여 논의하게 한다.



<그림 III-11> 기하적 접선 개념 1의 부정



<그림 III-12> 기하적 접선 개념 1의 반례 17)

7) 임재훈, 박교식(2004). 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구, 수학교육학 연구, 14(2), 171-185, 7면

기하적 접선 개념 1을 가지고 있는 학생은 이 직선을 접선으로 보아야 한다고 할 것이다. 또 기하적 접선 개념 2를 가지고 있는 학생은 이 직선은 접선이 아니라고 할 것이다.

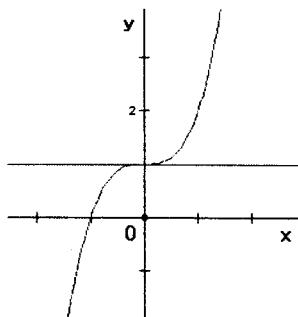
#### 마. 기하적 접선 개념 2의 부정과 기하적 접선 개념 3의 형성 (단계 5)

학생들에게 미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있음을 알게 하면서, 다시 한 번 접선 개념을 수정하는 경험을 하게 할 수 있다. 이를 위해 <그림 III-13>(곡선  $y = x^3 + 1$ 과 직선  $y = 1$ )을 이용할 수 있다. 기하적 접선 개념 2의 관점에서 볼 때, 이 직선은 곡선을 뚫고 지나가므로 접선이 아니다. 그러나 학생들은 미분을 이용하여 접선의 방정식을 구하는 방법을 학습한 상태이므로,  $y = x^3 + 1$ 의 점  $(0, 1)$ 에서의 접선의 방정식을 구할 수 있고,  $y = 1$ 이 접선의 방정식임을 확인할 수 있다. 이 예를 통해 미분이라는 맥락에서 볼 때, (단계 4)에서 오히려 강화된 기하적 접선 개념 2가 수정될 필요가 제기될 수 있다.

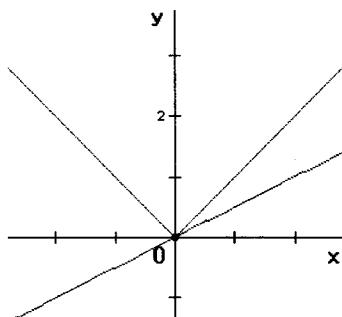
한편, 원이나 포물선에서 통용되는 함수적 접선 개념 1과 관련하여, 판별식  $D = 0$ 은 이 단계에서는 사용할 수 없다. 그러므로 함수적 접선 개념 1이 이 맥락에서도 여전히 유효한지 아닌지 알아보는 활동을 하게 할 필요가 있다. 앞의 예와 같이 곡선을 스치고 지나가지 않는 직선 중에도 접선인 것이 있다는 것을 알게 되지만, 여전히 곡선을 스치고 지나가는 직선은 접선이라고 생각할 수 있다.

그러나 <그림 III-14>(곡선  $y = |x|$ 와 직선  $y = \frac{1}{2}x$ )를 참조하여 이러한 생각을 수정할 기회를 제공한다. 직선  $y = \frac{1}{2}x$ 는 곡선  $y = |x|$ 를 원점  $(0, 0)$ 에서 스치고 지나간다. 그런데  $x = 0$ 에서 곡선  $y = |x|$ 의 미분계수는 존재하지 않고 접선의 방정식도 구할 수 없다.

결국 <그림 III-13>과 <그림 III-14>의 두 반례를 통해 기존에 접선의 본질로 생각되던 ‘스치고 지나간다.’는 개념이 여기에서는 접선이기 위한 필요조건도 충분조건도 아닌 것으로 밝혀진다. 즉, 기하적 접선 개념 2는 완전히 부정된다. 이러한 상황에서 ‘할선의 극한’을 새로운 접선 개념으로 삼는 것이 적절한지 탐구해 보게 한다. 학생들은 기존의 기하적 접선 개념 1, 2가 포괄하는 원과 포물선 맥락을 할선의 극한이라는 새로운 후보가 포괄하는지, 기존의 기하적 접선 개념 1, 2가 포괄하지 못한 삼차함수의 맥락도 포괄하는지를 확인하여야 한다. 이 과정을 통해 할선의 극한이라는 새로운 개념이 세 맥락을 모두 포괄할 수 있음을 알게 되고, 기하적 접선 개념 2로부터 기하적 접선 개념 3으로 나아가게 된다.



<그림 III-13> 기하적 접선  
개념 2의 반례 1



<그림 III-14> 기하적 접선 개념  
2의 반례 2

#### 바. 기하적 접선 개념 1의 부정 (2) (단계 6)

앞의 (단계 4)에서 기하적 접선 단계 1이 접선이 되기 위한 충분조건이 아닌 것으로 밝혀졌지만, 필요조건이라는 것은 부정되지 않았다.

이제 <그림 III-15>(곡선  $y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$ 과 직선  $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{3}$ )을 제시한다. <그림 III-15>에서 볼 수 있듯이

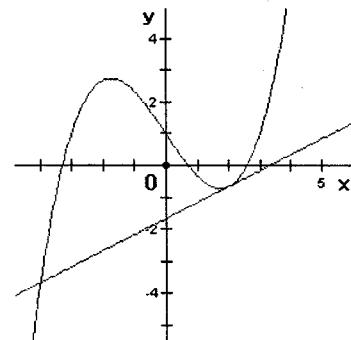
직선은 곡선과 한 점이 아닌 두 점에서 만난다. 이를 통해 곡선과 한 점에서 만난다는 것은 접선이기 위한 필요조건도 되지 않음을 인식할 수 있다. 결국 초기 단계에서 접선의 본질로 생각되었던 ‘곡선과 한 점에서 만난다.’는 것도 접선의 본질이 아니며, 접선이 되기 위한 아무 조건도 아닌 것이 된다. 즉, 기하적 접선 개념 1은 완전히 부정된다.

그러나 기하적 접선 개념 1이 이 단계에서 부정된다고 해서 그것이 학교수학에서 의미 없는 것은 결코 아니다. 학교수학은 언제나 학생들의 인지적 이해의 범위 안에서 제공된다. 따라서 기하적 접선 개념 1은 중학교수학에서는 접선의 본질일 뿐 아니라, 이 단계에서 학습자가 새로운 맥락에서 수준 상승의 경험을 할 수 있는 토대가 된다. 이는 앞에서 부정된 기하적 접선 개념 2에 대해서도 마찬가지이다.

#### 사. 함수적 접선 개념 2의 반성 (단계 7)

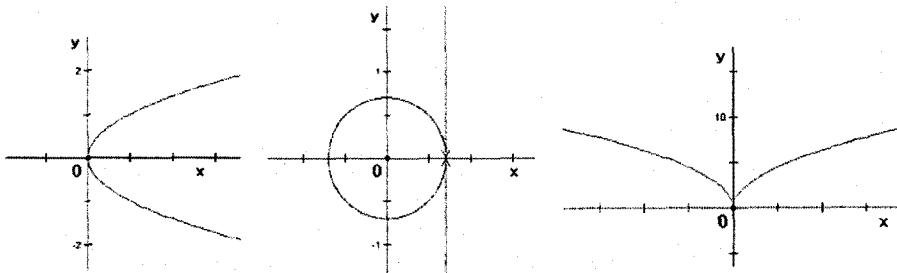
(단계 4, 5, 6)에서는 미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 구하는 것이 주요한 방법이다. 이때 학생들은 ‘미분가능성’과 ‘접선의 존재성’이 같다고 생각할 수 있다(함수적 접선 개념 2).

다음 <그림 III-16>과 같은 예(곡선  $x = y^2$ 과 직선  $x = 0$ , 곡선  $x^2 + y^2 = 4$ 와 직선  $x = 2$ , 곡



<그림 III-15> 기하적 접선 개념  
1의 반례 2

선  $y = 2\sqrt{|x|}$  와 직선  $x = 0$ )를 제시하여 함수적 접선 개념 2를 반성할 기회를 제공할 수 있다.



<그림 III-16> 함수적 접선 개념 2의 반례<sup>8)</sup>

$x = 0$ 에서  $x = y^2$ 은 미분이 불가능하므로 점  $(0, 0)$ 에서 접선이 존재하지 않으며, 마찬가지로 점  $(2, 0)$ 에서  $x^2 + y^2 = 4$ 의 접선도 존재하지 않는다. 그러나 기하적 접선 개념의 관점에서 보면 두 경우 모두 접선이 존재한다. 또  $x = 0$ 에서  $y = 2\sqrt{|x|}$ 의 미분계수가 존재하지 않으므로 미분을 이용하여 원점  $(0, 0)$ 에서 접선의 방정식을 구할 수 없다. 그러나 기하적 접선 개념 3의 관점에서 보면, 직선  $x = 0$ 이 원점  $(0, 0)$ 에서 할선의 극한이므로 접선이 된다. 이와 같이 새로운 사례가 반례로 도입되면서 접선 개념을 수정해 가는 과정을 거치는 동안, 학생들은 ‘곡선과 한 점에서 만난다.’나 ‘곡선을 스치고 지나간다.’는 것은 접선의 본질이 아닌 것으로 생각하는 수준에 이르게 된다. 그리고 할선의 극한이 이전의 개념에 비해 가지는 장점을 인식할 수 있게 된다.

### III-3. Lakatos 이론을 적용한 접선의 지도

#### 가. 발견적 교재구성 방법을 이용한 접선의 지도

우리나라의 현 교육과정(교육인적자원부 2007, 2008)에서는 접선의 개념에서 역사 발생적 원리가 어느 정도 반영되었다고 볼 수 있다. 현행 교육과정에서 접선의 지도 과정을 순차적으로 보자면 먼저 중학교 수학 1에서는 원과 직선의 위치 관계를 통해서 원의 접선에 대한 개념을 정의한다. 다음으로 고등 수학에서는 원과 직선에 대한 판별식을 이용하여 접선인 경우 중근을 갖는다는 해석적 방법이 적용된다. 나아가 원이 아닌 포물선의 접선을 같은 방법으로 설명한다. 수학 II에서는 미분법을 통해서 미분계수와 접선의 기울기가 같다는 개념을 이용해서 접선을 구할 수 있음을 설명하고 있다.

그러나 세부적으로 보자면 각 개념 설명 단계 안에서의 교재 내용은 발견적 재구성보다는 연역적인 설명의 방법으로 이루어 졌다고 본다. 그리고 각 개념의 설명 단계 간에도 연관성이 미흡하다고 생각한다. 예를 들면, 고등학교 수학의 원과 직선의 위치관계 단원에서 주어진 원의 방정식의 접선의 방정식을 구하고자 할 때, 바로 연립방정식의 판별식을 이용하는 것보다는 중학교 수학에서 배웠던

8) 임재훈, 박교식(2004), 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구, 수학교육학 연구, 14(2), 171-185, 11면

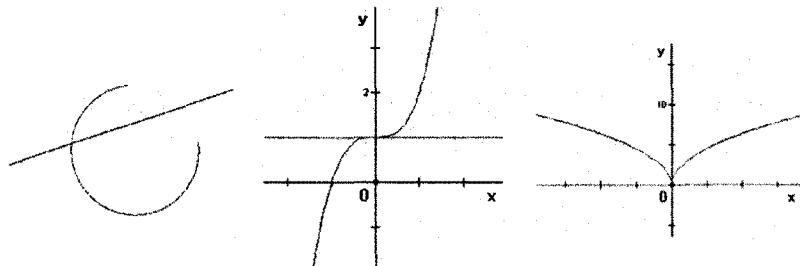
원과 직선의 위치관계를 먼저 언급하는 방식으로 개념을 설명하는 것이다. 판별식에서 중근을 가지므로 교점이 하나이기 때문에 원과 만나는 직선이 접선임을 설명하는 것이 아니라, 원과 직선이 만나는 점이 하나인 경우 교점이 하나이기 때문에 원의 방정식과 직선의 방정식을 연립한다면 해가 하나인 경우이고 이때 판별식을 적용할 수 있다는 것이다.

#### 나. 반례의 사용법을 이용한 접선의 지도

라카토스는 반례가 명제를 단순히 기각하는 것이 아니라 명제를 개선하고 새로운 개념을 발견하는데 결정적 역할을 있다고 보았다. 앞에서 말한 발견적 양식은 증명과 반박의 방법에 근거한 것이며, 반박의 과정에서 반례는 필수적인 것이라고 볼 수 있다. 이러한 주장은 우리의 사전 지식이나 관심을 기초로 하여 대상을 조사하는 과정에서 추측이 제안되고 새로운 다른 사례에 의해 반박되고 다시 새로운 추측이 제안되는 과정을 거쳐서 가장 강력한 추측이 남게 된다고 보는 오류주의 입장에 근거한 것이다.

라카토스는 추상화 또는 동치 관계에 의한 개념 형성과는 다른 증명과 반박의 과정에 의한 개념 형성이라는 새로운 이론을 제안하고 있다. 반례를 배제할 때 개념은 성장하지 못하지만, 반례를 진지하게 고려할 때 비로소 개념이 성장하고 새로운 발견이 이루어진다는 것이다. 또한 라카토스는 추측과 개념 모두 증명과 반박이라는 과정을 통과해야만 하며, 그래야만 소박한 추측과 소박한 개념이 증명과 반박의 방법을 통하여 성장하고 추측은 정리가 되고 소박한 개념은 증명 생성 개념, 곧 이론적인 개념이 된다고 주장하였다.

접선의 개념을 이해하는 단계에서도 여러 가지의 반례들이 등장한다. 때문에 접선의 개념을 지도하는 과정에서 접선이 아닌 예를 활용하는 것은 그만큼 중요하다고 생각된다. 예를 들어, 고등학교의 수학Ⅱ 과정을 마친 학생이라면 미분을 활용하여 주어진 접선의 방정식을 쉽게 구할 수 있을 것이다. 그러나 접선의 방정식을 구할 수 있고 이를 그래프로 그릴 수 있는 학생들 중에서도 일반적인 곡선의 접선에 대한 개념을 정확하게 이해하는데 어려움을 느끼곤 한다. 이는 단순히 기계적으로 미분계수를 구해서 접선의 기울기를 알고 이를 이용해서 접선의 방정식을 구하는데 초점이 맞춰져있기 때문이다. 물론 미분계수를 활용하고 접선의 방정식을 구할 수 있는 것도 중요하다. 그러나 일반적인 곡선의 접선에 대한 개념의 이해는 보다 중요하다고 생각된다. 다양한 접선의 예와 반례를 이용하여 접선의 개념을 설명한다면 보다 쉽고 명확하게 접선의 개념을 이해할 수 있을 것이다.



&lt;그림 III-17&gt; 다양한 접선 개념의 반례

## IV. 접선의 지도와 GSP의 활용

이 장에서는 수학용 S/W인 GSP를 활용한 접선의 단계별 교수 방안에 대하여 알아본다.

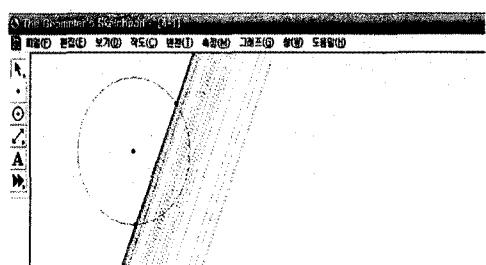
### IV-1. 교과서의 접선 개념을 고려한 단계별 교수 방안과 GSP의 활용

임재훈과 박교식(2004)은 접선 개념의 교수 방안을 7단계로 구분하고 있다. 그러나 실제 교육 과정상에서 학생들이 접선의 개념을 배우고 그 개념을 반성해 나가기 위해서는 그 반례에 해당하는 그 래프를 배우는 단계에 와서야 가능하다. 그러므로 임재훈과 박교식(2004)의 교수 방안의 단계를 교과서의 제시 순서를 고려하여 살펴볼 필요가 있다. 따라서 현재의 수학과 교육 과정을 따라 수학을 공부하는 학생들에게는 교과서 단계에 따라 다음과 같이 9단계로 접선 개념 교수 방안을 제시할 수 있다.<sup>9)</sup>

이에 기초하여 본 연구에서는 좀 더 효과적인 접선 개념의 지도를 위해 GSP를 활용한 다양한 교수 모델을 제시하고자 한다.

#### 가. 1단계 : 기하적 접선 개념 1의 형성

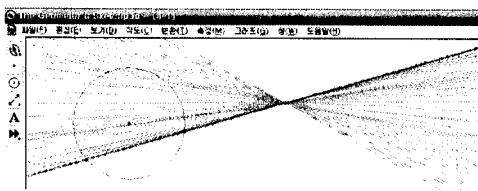
학교수학에서 접선이 처음으로 도입되는 단계인 ‘중학교 수학 1’의 ‘VII. 평면도형 단원’에서 학생들은 앞에서 소개한 접선의 개념인 곡선과 한 점에서 만나는 직선으로 접선의 개념을 형성하게 된다. 이 개념은 임재훈, 박교식(2004)의 기하적 접선 개념 1에 해당하는 개념을 형성하는 단계가 된다. <그림 IV-1>와 <그림 IV-2>는 원과 직선



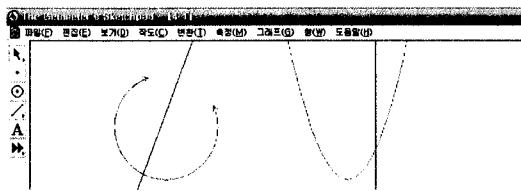
&lt;그림 IV-1&gt; 기하적 접선 개념 1의 예시 (1)

9) 김문정(2007), 접선 개념 인식에 대한 연구, 이화여자대학교 교육대학원

의 위치 관계를 이해하는데 GSP를 활용할 수 있는 예이다. 직선을 평행이동 또는 회전이동 시키면서 원과 직선이 만나는 점의 개수가 달라짐을 쉽게 확인할 수 있고, 원과 직선이 한 점에서 만날 때 접선이 된다는 것을 알 수 있다. 그러나 학생들은 원이라는 한정된 곡선을 통해서만 접선을 정의하게 되고 접선이란 곡선과 직선이 만나는 점의 개수에 의해 결정된다는 오개념을 가질 수 있다. 따라서 학생들이 다양한 곡선을 통하여 접선의 개념을 형성할 수 있도록 원이 아닌 다른 예시도 함께 제시해야 한다. <그림 IV-3>은 곡선과 직선이 한 점에서 만나지만 접선이 아닌 예이다.



&lt;그림 IV-2&gt; 기하적 접선 개념 1의 예시 (2)



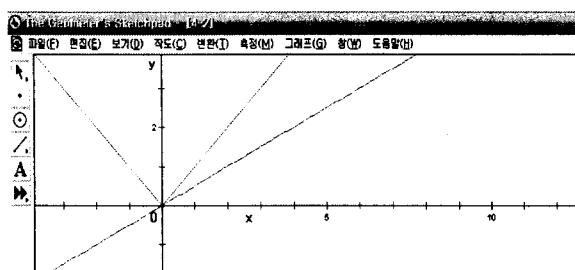
&lt;그림 IV-3&gt; 기하적 접선 개념 1의 반례

#### 나. 2단계 : 기하적 접선의 개념 2의 형성

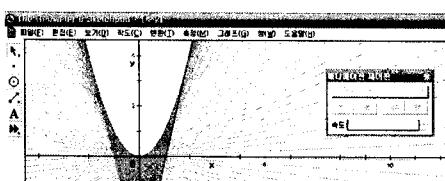
'중학교 수학 1'에서 학생들은 원과 직선의 교점의 개수로 정의되는 접선의 개념을 가지게 된다. 그러나 '고등학교 수학'에서 학생들은 다양한 곡선을 접하게 되면서 접선은 원에만 한정된 것이 아닌 다양한 곡선에서 그릴 수 있다는 사실을 깨닫게 된다.

'중학교 수학 1'에서 <그림 IV-1>과

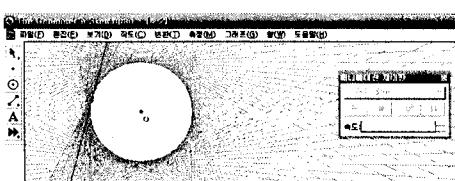
<그림 IV-2>등의 활동을 거치면 학생들은 곡선과 직선의 교점의 수에 주목하게 된다. 그러나 이러한 개념은 원에 국한되는 개념이므로 일반적인 다른 곡선에서는 적합하지 않다. 또한 학생들은 원이 아닌 포물선과 절댓값을 포함한 일차함수의 그래프를 배우게 된다. 따라서 학생들은 원에 국한되어졌던 개념의 한계를 스스로 파악하고 스스로 새로운 방법으로 접선의 개념을 형성해야 하는 필요성을 느끼게 된다.



&lt;그림 IV-4&gt; 기하적 접선 개념 2의 예시 (1)



&lt;그림 IV-5&gt; 기하적 접선 개념 2의 예시 (2)



&lt;그림 IV-6&gt; 기하적 접선 개념 2의 예시 (3)

또한 ‘고등학교 수학’에서 <그림 IV-4>와 같은 절댓값을 포함하는 일차함수 단원을 배우게 되면서 ‘접선은 곡선을 스쳐지나가는 직선’이라는 의미를 조금씩 경험하게 된다. ‘접선은 곡선을 스쳐지나가는 직선’이라는 개념은 임재훈, 박교식(2004)에 의하면 기하적 접선 개념 2에 해당하는 개념이다. ‘접선은 곡선을 스쳐지나가는 직선’이라는 개념은 우리 교육과정에서는 정의하지 않고 있다. 때문에 교사는 학생들이 기하적 접선 개념 2를 발견하도록 도움을 주어야 한다. 학생들이 기하적 접선 개념 1인 원과 직선의 교점의 수에 국한되어 접선을 정의하지 않고 접선은 곡선을 스치고 지나가는 직선이라는 좀 더 포괄적인 접선의 개념을 생각할 수 있도록 교사는 <그림 IV-5>와 <그림 IV-6>과 같은 그림을 사용하는 것이 좋다. <그림 IV-5>와 <그림 IV-6>을 보면서 학생들은 접선이 ‘곡선을 스쳐지나가는 직선’이라는 개념을 형성하게 된다. 그리고 교사는 접선을 처음 도입하는 단계에서 원이 아닌 포물선 또는 여러 가지 곡선을 예로 제시하면서 원에 국한된 접선의 개념이미지가 학생들에게 굳어지지 않도록 교사는 다양한 곡선의 접선을 학생이 그려 볼 수 있도록 해야 한다.

#### 다. 3단계 : 함수적 접선 개념 1의 형성

‘고등학교 수학’에서 학생들은 원의 방정식과 이차함수를 배우면서 접선의 개념을 해석적인 관점에서 접근하게 된다. 학생들은 원의 방정식을 배우면서 원의 방정식  $x^2 + y^2 = r^2$ 과 직선의 방정식  $y = mx + n$ 을 연립한 방정식  $(m^2 + 1)x^2 + 2mnx + n^2 - r^2 = 0$ 의 해는 원과 직선의 교점의  $x$  좌표이므로 방정식의 실근의 개수에 따라 원과 직선의 위치 관계가 결정된다는 사실을 알게 된다. 이때 중근을 갖는 경우 즉, 판별식  $D = 0$ 인 경우가 접선이라는 사실을 배우면서 접선을 해석적으로 정의하게 된다. 이 개념은 임재훈, 박교식의 함수적 접선 단계 1의 형성으로 해석할 수 있다.

그러나 학생들은 함수적 접선 개념을 접선의 정의와 연관시키지 못하고 단순히 방정식이 중근을 갖는다는 방정식의 문제로만 인식할 수 있다. 왜냐하면 원과 직선의 교점이 하나임을 이용해서 연립 방정식의 근이 하나임을 유도하고 이때 판별식  $D = 0$ 인 경우가 접선임을 설명하기 때문이다. 결국 학생들은 접선을 구하기 위해서 기계적으로 판별식을 계산하려고 한다. 이러한 방법보다는 원의 방정식만을 주고서 접선이 되는 직선의 방정식을 찾아가는 방식이 적절할 것이며, 이 때 GSP를 활용하여 직선의 방정식을 구하는데 복잡한 계산을 생략할 수 있다.

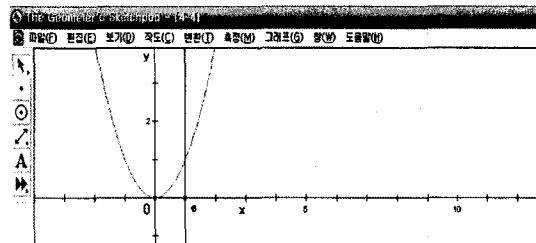
#### 라. 4단계 : 기하적 접선 개념 1의 부정 (1)

기하적 접선 개념 1인 ‘접선은 곡선과 한 점에서 만난다.’는 원의 맥락에 한정되어 있는 것이므로 일반적인 곡선에서는 성립되지 않을 수 있다. 학생들이 원이 아닌 포물선과 축에 평행한 직선을 배우기 시작하는 ‘9-나 단계’와 포물선을 자세히 언급하는 ‘고등학교 수학’에 이르러 [그림 IV-7]의 그래프를 이해하게 되면서 기하적 접선 개념 1이 접선의 존재성이 성립하기 위한 충분조건이 아니라는 사실을 이해하게 된다.

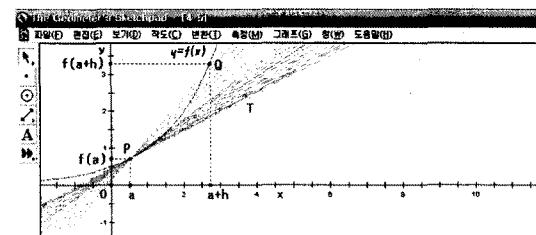
### 마. 5단계 : 기하적 접선 개념 3의 형성 (할선의 극한)

‘고등학교 수학’에서 2차 함수의 접선의 방정식을 판별식을 이용해서 형성한 다음에 학생들은 ‘수학II’에서 미분계수와 도함수에 관하여 배우게 된다. 미분계수는 할선의 극 한이라는 기하학적 의미를 통하여 학생들에게 도입된다. 그러나 교과서에서는 이 내용을 미분계수의 기하학적 의미로 소개하고 있을 뿐 할선의 극한이라는 용어는 사용하고 있지 않다. 학생들은 미분계수의 기하학적 의미를 배우면서 곡선 위의 한 점에서의 미분계수는 그 점에서의 접선의 기울기와 같다는 사실을 다음과 같이 ‘할선의 극한’의 원리로 이해하게 된다. 할선의 극한은 <그림 IV-8>와 같이 함수  $y = f(x)$ 의 그래프에서  $x$ 의 값이  $a$ 에서  $a+h$ 까지 변할 때, 그래프 위의 두 점  $P(a, f(a))$ ,  $Q(a+h, f(a+h))$ 에 대하여 점  $P$ 를 고정하고  $h \rightarrow 0$ 이면 점  $Q$ 는  $y = f(x)$ 의 그래프 위를 움직이면서 점  $P$ 에 한없이 가까워지며, 직선  $PQ$ 는 점  $P$ 를 지나는 한 직선  $PT$ 에 한없이 가까워진다. 이때 직선  $PQ$ 의 극한  $PT$ 가 곡선  $y = f(x)$  위의 점  $P$ 에서의 접선이라는 개념이다. 이 개념은 임재훈, 박교식(2004)의 기하적 접선 3이 형성되는 단계로 해석할 수 있다. 그리고 ‘할선의 극한’의 개념인 기하적 접선 개념 3이 접선을 구하는 가장 좋은 방법이라고 이야기하고 있다. 또한 이 방법은 유클리드의 <원론>에서 다루고 있는 원의 접선도 포함한다. 이 정의에서 볼 수 있는 또 다른 독특함은 이 곡선에는 운동개념이 들어 있다는 것이다.  $a+h$ 가  $x$ 축 위에서  $a$ 에 한없이 가까워지면, 점  $Q$ 는 곡선에 따라 점  $P$ 에 한없이 가까워진다.

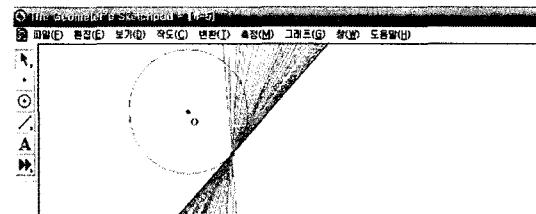
그러나 학생들은 할선의 극한의 개념이 미분의 기하학적 개념과 함께 소개되고 있기 때문에 미분계수를 도입하기 위한 보충 개념 정도로 취급할 뿐, 중요하게 생각하지 않을 수 있다. 그래서 할선의



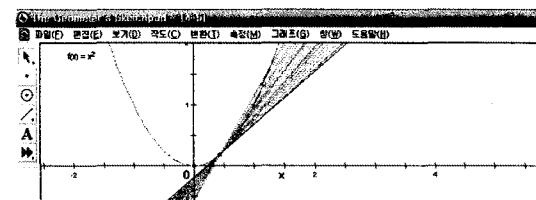
<그림 IV-7> 기하적 접선 개념 1의 반례 (1)



<그림 IV-8> 기하적 접선 개념 3 (할선의 극한)의 예시 (1)



<그림 IV-9> 기하적 접선 개념 3 (할선의 극한)의 예시 (2)



<그림 IV-10> 기하적 접선 개념 3 (할선의 극한)의 예시 (3)

극한의 개념은 학생들 기억에 오래 남지 않는다. 교사 또한 '할선의 극한' 개념을 학생들에게 강조하지 않기 때문에 '할선의 극한'이라는 개념이 생소한 학생들도 있다.

따라서 교사는 '할선의 극한'이 접선을 그리는데 가장 유용한 방법이며 미분 계수의 원리임을 강조하여 학생들이 '할선의 극한'의 개념을 자유자재로 사용할 수 있도록 교수해야 할 것이다.

#### 바. 6단계 : 함수적 접선 개념 2의 형성

미분계수의 기하학적 의미인 '할선의 극한'을 배운 후 학생들은  $x = a$ 에서 함수  $y = f(x)$ 의 미분계수  $f'(a)$ 는 곡선  $y = f(x)$ 위의 점  $P(a, f(a))$ 에서 이 곡선에 그은 접선의 기울기와 같다는 사실을 알게 된다. 따라서 곡선  $y = f(x)$ 위의 점  $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ 이다. 이 단계는 임재훈, 박교식(2004)의 함수적 접선 개념 2의 형성으로 해석할 수 있다. 이 방법은 학생들이 접선을 구하기 위해 가장 많이 사용하는 방법으로 학생들에게 매우 친숙한 방법이다.

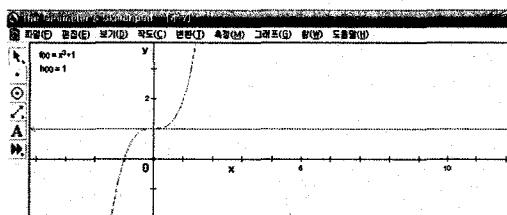
이러한 방법으로 미분계수가 존재하지 않는 특수한 점을 제외하고는 거의 모든 곡선의 접선을 구할 수 있기 때문에 교육과정을 거의 이수한 학생들은 함수적 접선 개념 2에 대한 접선의 개념 이미지가 가장 강하게 남아 있게 된다. 이는 함수적 접선 개념 2가 미분의 공식을 통하여 가장 간단히 접선의 방정식을 구할 수 있기 때문이다. 그러나 이 방법은 결국 '할선의 극한'의 개념에서 비롯된 것이므로 교사는 학생들이 함수적 접선 개념 2가 고착화 되지 않도록 주의하면서 이 사실을 강조할 필요가 있다.

#### 사. 7단계 : 기하적 접선 개념 2의 부정

학생들은 '고등학교 수학'에서 <그림 IV-11>와 같은 간단한 삼차 함수의 그래프인  $y = ax^3$ ,  $y = a(x - m)^3 + n$ 의 형태를 접하게 된다. '고등학교 수학'에서는 직선이 곡선을 뚫고 지나가므로 기하적 접선 개념 2에 의해서 접선이 아닌 것처럼 여겨진다. 이 단계에서는 미분의 개념을 아직 배우지 않았기 때문에 이 직선이 정말 접선인지 아닌지 확인 할 수가 없는 것이다.

그러나 '수학II'에서 미분 계수를 구할 수 있게 되면서 <그림 IV-11>와 같은 직선은 곡선을 뚫고 지나가지만 접선이라는 사실을 알게 된다. 결국, 기하적 접선 개념 1보다 기하적 접선 개념 2가 더 타당하다고 느끼던 학생들은 스치고 지나가지 않아도 접선이 될 수 있음을 인식하게 되고 기하적 접선 개념 2가 접선이 존재하기 위한 충분조건이 아님을 깨닫게 된다.

또한,  $y = \frac{1}{2}x$ 는 곡선  $y = |x|$ 를 스치고 지나간다. 따라서 기하적 접선 개념 2에 따르면 이 직선



<그림 IV-11> 기하적 접선 개념 2의 반례 (1)

은 접선이 된다. 그러나  $y = |x|$ 는 원점에서 미분계수를 갖지 않는다. 따라서 이 곡선은 원점에서 접선을 갖지 않는다. <그림 IV-12>와 같은 예를 통하여 곡선에 스치고 지나가지만 접선이 아닌 예도 존재한다는 사실 또한 깨닫게 된다. 그러므로 기하학적 접선 개념 2는 접선이 존재하기 위한 필요조건도 아니라는 사실을 알게 된다.

#### 아. 8단계 : 기하적 접선 개념 1의 부정 (2)

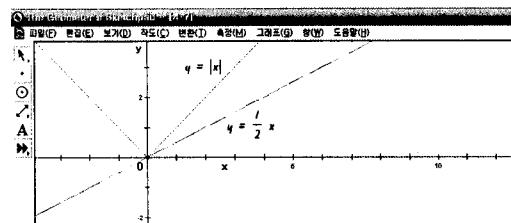
'수학II'에서 학생들은 미분을 배우면서 여러 가지 함수의 그래프 형태를 접하게 되고 기하적 접선 개념 1에 해당하는 '접선은 곡선과 한 점에서 만난다.'의 또 다른 반례를 접하게 된다. <그림 IV-13>같이 일반적인 곡선의 경우가 그러하다. 학생들은 일반적인 곡선의 접선의 방정식을 미분을 통하여 구하게 되면서 접선이 곡선과 두 점 이상에서 만날 수 있음을 깨닫게 된다.

따라서 학생들은 기하적 개념 1이 접선을 정의하기 위한 필요조건도 아님을 알 수 있다. 결국 학생들은 기하적 접선 개념 1과 기하적 접선 개념 2를 완전히 부정하게 되고 새로운 기하적 접선 개념인 '할선의 극한'을 생각하기 보다는 함수적 접선 개념 2인 미분 계수의 의미를 더 생각하게 된다.

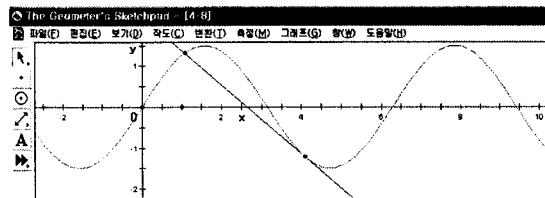
#### 자. 9단계 : 함수적 접선 개념 2의 반성

수학II에서 미적분을 다 배운 후 학생들은 이차 곡선에 대하여 배우게 된다.  $y^2 = 4px$ 와 같은 형태의 그래프는 함수적 접선 개념 2를 반성하게 하는 좋은 예가 된다. <그림 IV-14>은  $y^2 = 4x$ 이다. 이 곡선은  $x = 0$ 에서 미분이 불가능하므로 접선의 방정식을 구할 수 없다. 그러나 할선의 극한의 입장에서 보면 <그림 IV-14>의 아래 그림과 같이 직선  $x = 0$ 이 곡선의 접선이 된다.

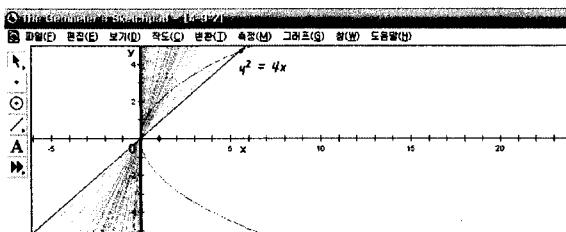
비슷한 예로  $y = a\sqrt{|x|}$ 와 같은 형태의 그래프는 함수적 접선 개념 2를 반성하게 하는 좋은 예가 된다. <그림 IV-15>은  $y = 2\sqrt{|x|}$ 이다. 이 곡선은  $x = 0$ 에서 미분이 불가능하므로 접선의 방정



<그림 IV-12> 기하적 접선 개념 2의 반례 (2)



<그림 IV-13> 기하적 접선 개념 1의 반례 (2)



<그림 IV-14> 함수적 접선 개념 2의 반례 (1)

식을 구할 수 없다. 또한 기하적 접선 개념 1이나 2의 입장에서 보면  $y = 0$  이나  $x = 0$  모두 접선이 되는 것처럼 보인다. 보통  $y = 0$ 을 접선으로 보는 학생이 많을 것으로 예상된다. 그러나 실제로 이 곡선의  $x = 0$ 에서 접선은 직선  $x = 0$ 뿐이다. 이것은 할선의 극한의 입장에서 보았을 때

직선  $x = 0$ 이 접선이 되는 것과 일치한다. 이것은 미분가능성이 접선 존재성의 충분조건은 되지만 필요조건은 아니라는 점을 시사한다. 결국 학생들은 이러한 반성의 단계를 거치면서 학교 수학의 초기 단계에서 접선의 본질로 생각되었던 ‘곡선과 한 점에서 만난다.’는 것은 접선이기 위한 충분조건도 필요조건도 아니며 접선을 구하기 위한 절대적인 방법으로 여겨오던 미분 계수를 가지고 접선을 구하는 함수적 접선 개념 2의 방법도 접선이 존재하기 위한 필요조건은 아니라는 것을 생각하는 수준에 이르게 된다. 그리고 할선의 극한이 이전의 기하학적 접선 개념에 비해 가지는 장점을 인식할 수 있게 된다. 따라서 ‘할선의 극한’이라는 접선에 대한 적절한 개념이미지가 형성될 수 있다.

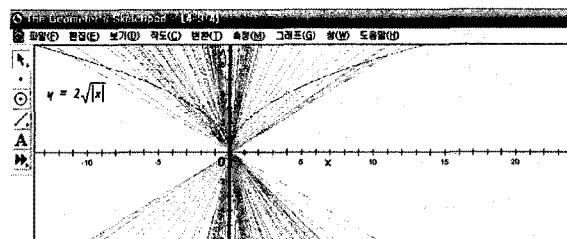
#### IV-2. 수업모형설계 (학습지도안 작성)

수학 II의 ‘III. 다항함수의 미분법-2. 도함수의 활용’을 배운 학생들은 이전 수업에서 접선을 구하는 기본 개념에 대해서 학습하였다. 대부분의 학생들이 미분계수를 이용하여 곡선의 접선의 방정식을 구할 수는 있지만, 접선의 개념을 제대로 이해하지 못하는 경우가 많다. 주어진 식을 미분하여 접선에 대한 식을 구하는 과정만의 기계적 학습이 주로 이루어지는 경향을 보인다.

접선을 구하는 기본적인 내용에 대해서 배운 수업의 다음으로 이어지는 수업에서 좀 더 효과적이고 접선의 개념에 대한 정확한 이해를 돋는 수업에 대해서 생각해보자 한다. 이제까지 이루어진 모든 접선에 대한 학습을 통해서 학생들이 갖게 된 개념 이미지를 다시 이끌어 낼 수 있도록 유도해서, 학생들의 잘못된 개념 이미지들을 수정하고, 올바른 접선 개념을 형성하도록 돋고자 한다. 이 수업에서 이루어지는 지도는 라카토스의 이론을 바탕으로 학생들에게 추측하도록 하고 그 추측에 대한 반박이 이루어질 수 있는 과정을 통해서 개념을 형성해 나가는 수업이다. 교사는 문제를 제기하고, 학생의 추측에 대하여 권위적인 가치판단을 유보해야 하며, 조심스럽게 안내역을 하면서 학생들을 격려하여 자신이나 다른 학생들의 추측에 대해 독립적으로 비판적 검사를 하고, 토론을 인도함으로써 반례를 발견하여 그들의 수학적 지식이 성장하도록 하는 것이 바람직 할 것이다. 또한 이 수업은 적절한 이해와 효과적인 반례를 사용하기 위해서 GSP를 활용하는 수업이다.

##### 가. 단원명

- 대단원 : III. 다항함수의 미분법



<그림 IV-15> 함수적 접선 개념 2의 반례 (2)

- 중단원 : 2. 도함수의 활용
- 소단원 : (1) 접선의 방정식

#### 나. 학습지도안

<표 IV-1> 학습지도안 (III-2. 도함수의 활용)

단원	대단원	III. 다항함수의 미분법	차시	/	관련
	소단원	2. 도함수의 활용 (1) 접선의 방정식	교과서	p.92~94	
학습 목표		1. 접선의 방정식을 구할 수 있다. 2. 함수의 증가, 감소, 극대, 극소를 판정하고 그래프의 개형을 그릴 수 있다. 3. 방정식과 부등식, 속도와 가속도에 관한 문제에 도함수를 활용하여 풀 수 있다.			
지도 단계 (시간)	교수-학습 활동		학습자료		비고
	교사		학생		
도입 (5분)	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 인사한다.</li> <li>· 출석점검</li> <li>- 빈자리를 확인한다.</li> <li>· 학습 분위기 조성</li> <li>- 자세를 바로 하게 한다.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 인사한다.</li> <li>· 출석점검</li> <li>- 자세를 바로 한다.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 교과서</li> <li>· 분필</li> <li>· 출석부</li> <li>· 컴퓨터</li> <li>· 빔프로젝터</li> </ul>		
도입 (5분)	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 실생활에서 활용되는 접선의 예를 제시하면서 수업의 참여를 유도 한다.</li> <li>- 클로소이드 곡선과 접선의 관계 클로소이드 곡선이란 : 중심으로부터의 거리가 곡률 반지름에 반비례하는 나선. 고속도로 따위의 완화 곡선으로 이용된다.</li> <li>· 학습목표를 편서한다.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 교사의 설명을 들으며 이번 시간에 배울 내용을 미리 짐작해 본다.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 교과서</li> <li>· 분필</li> <li>· 출석부</li> <li>· 컴퓨터</li> <li>· 빔프로젝터</li> </ul>		
전개 (10분)	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 원의 접선에 대한 그림 제시 후 접선에 대한 개념 질문           <ul style="list-style-type: none"> <li>- 접선이란 무엇인가?</li> <li>- 예상반응:</li> </ul> </li> <li>1. 곡선과 접하는 직선</li> <li>2. 곡선과 한 점에서 만나는 직선</li> <li>· 곡선과 한 점에서 만나지만 직선이 아닌 예 제시           <ul style="list-style-type: none"> <li>- 곡선의 접선인지 확인</li> <li>- 곡선과 한 점에서 만나지만 접선이 아님을 확인</li> </ul> </li> <li>· 다시 원의 접선에 대한 그림 제시 후 접선에 대한 개념 질문           <ul style="list-style-type: none"> <li>- 접선이란 무엇인가?</li> <li>- 예상반응:</li> </ul> </li> <li>1. 한 점에서 만나지만 곡선을 관통하</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 교사의 질문에 귀 기울이고, GSP에서 제시된 그림을 보면서, 물음에 대하여 생각해보고 의견을 제시한다.</li> <li>· 앞에 제시된 의견에 대한 반례를 확인해보고 자신의 생각한 개념이 맞는지 확인해본다.</li> <li>· 다시 생각해본 자신의 개념을 토대로 GSP에서 제시된 그림을 보면서 교사의 물음에 대하여 생각해보고 의견을 제시한다.</li> </ul>	<p>GSP 활용 &lt;그림IV-1&gt; &lt;그림IV-2&gt;</p> <p>GSP 활용 &lt;그림IV-3&gt;</p> <p>GSP 활용 &lt;그림IV-5&gt; &lt;그림IV-6&gt;</p>		

	<p>지 않는다.</p> <p>2. 곡선을 스치듯 지나는 직선</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>곡선과 한 점에서 만나고 곡선을 스치듯 지나지는 않지만 접선인 예(<math>y = x^3</math>) 제시</li> <li>미분계수를 이용하여 <math>x</math>값이 0에서 접선의 방정식을 구하고 접선이 맞는지를 확인</li> <li>실제로 학생 1명을 시켜 칠판에 접선을 그리도록 유도</li> <li>접선 중에는 곡선을 관통하는 것도 있다는 사실을 확인</li> <li>미분계수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있음을 상기 시켜주고, 과연 미분계수를 이용하여 모든 접선을 구할 수 있을지에 대한 의문을 제기한다.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>곡선 <math>y = x^3</math>일 때 <math>x</math>값이 0에서 접선의 방정식을 구한다.</li> <li><math>x</math>축(직선 <math>y = 0</math>)이 접선임을 확인</li> <li>학생 중 1명은 직접 칠판에 접선을 그린다.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>교사의 질문에 대하여 생각해보고 자신의 의견을 제시한다.</li> </ul>	<p>GSP 활용 &lt;그림IV-11&gt;</p> <p>GSP 활용 &lt;그림IV-8&gt; (단 그림에서 접선이 할선의 극한이 된다는 사실은 나중에 제시)</p>
전개 (20분)	<ul style="list-style-type: none"> <li>접선을 구하는 새로운 문제 제시</li> </ul> <p>1. <math>y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x + 1</math> <math>x = 2</math>에서 접선의 방정식 구하기</p> <p>2. <math>y = \frac{1}{2}\sin(x)</math> <math>x = \frac{5}{3}\pi</math>에서 접선의 방정식 구하기</p> <p>3. <math>y = 2\sqrt{ x }</math> <math>x = 0</math>에서 접선의 방정식 구하기</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>문제1과 2의 경우, 접선의 방정식을 구할 수 있지만 실제로 접선을 그려보면 곡선과 두 점에서 만난다는 사실을 확인 시켜준다.</li> <li>문제3의 경우, 미분계수를 구할 수 없기 때문에 접선의 방정식을 구할 수 없음을 확인 시켜 준다.</li> <li>문제 3과 비슷한 다른 예도 있음을 제시한다. (예: <math>y^2 = 4x</math>)</li> <li>미분계수의 개념에 대하여 다시 복습해보고, 이전에 배웠던 내용 중 평균변화율, 할선, 접선의 기울기에 대하여 다시 생각해보도록 한다.</li> <li>접선이란 무엇인가?</li> <li>예상반응: 교과서의 내용을 다시 확인해 보면서 접선의 기울기와 할선의 극한의 기울기가 같게 됨을 알게 된다.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>주어진 문제를 풀고 각 곡선의 접선을 그려본다.</li> <li>기존에 알고 있는 접선의 개념을 토대로 접선을 구하는데 어려움을 확인한다.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>기존에 알고 있는 접선의 개념이 잘못된 것임을 확인 한다.</li> <li>일반적인 접선의 개념에 대해서 생각해본다.</li> </ul> <ul style="list-style-type: none"> <li>교사의 질문에 대하여 생각해보고 교과서를 다시 확인해보면서 접선의 개념에 대해서 다시 생각해본다.</li> <li>기존에 가지고 있었던 접선의 개념과 다른 점이 무엇인지 확인해본다.</li> </ul>	<p>GSP 활용 &lt;그림IV-13&gt; &lt;그림IV-15&gt; (단 그림에서 접선이 할선의 극한이 된다는 사실은 나중에 제시)</p> <p>GSP 활용 &lt;그림IV-14&gt;</p> <p>교과서 (p.80~p.81)</p>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>기존에 막연하게 알고 있었던 접선의 개념과 실제 접선선의 개념에 대해서 비교해준다.</li> <li>- 기존의 접선의 개념 :</li> <ol style="list-style-type: none"> <li>한 점에서 만난다.</li> <li>곡선을 스쳐지나간다.</li> <li>곡선의 방정식과 직선의 방정식의 연립방정식에서 판별식 <math>D=0</math>이다.</li> <li>곡선 위의 한 점을 지나고 기울기가 그 점에서의 미분계수와 같은 직선</li> </ol> </ul>		
전개 (5분)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- 실제 접선의 개념 : 할선의 극한</li> <li>· 할선의 극한을 실제 접선의 개념으로 확인시켜주고 이를 이용하여 기존의 모든 곡선에 대해서 접선의 실제 접선을 쉽게 구할 수 있음을 확인시켜준다.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>GSP 활용</li> <li>&lt;그림IV-8&gt;</li> <li>&lt;그림IV-9&gt;</li> <li>&lt;그림IV-10&gt;</li> <li>&lt;그림IV-14&gt;</li> <li>&lt;그림IV-15&gt;</li> </ul>	
정리 (5분)	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 학습정리 내용을 보여주고 이번 시간에 배운 내용을 상기시키면서 학생들에게 읽게 한다.</li> <li>· 의문점이 있는지 학생들에게 확인한다.</li> <li>· 질문 사항에 대해 대답해준다.</li> <li>· 다음 시간에 배울 내용을 간략히 소개한다.</li> <li>· 수업을 마치고 인사한다.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 이번 시간에 배운 내용을 생각하며 큰 소리로 읽는다.</li> <li>· 의문사항이 있으면 질문한다.</li> <li>· 교사의 설명에 귀 기울인다.</li> <li>· 인사한다.</li> </ul>	학습정리내용

## V. 실제현장에서의 적용과 교수실험

본 논문의 내용과 학습지도안에 대한 학생들의 반응과 변화를 알아보기 위하여 서울시내 인문계 고등학교인 양정고등학교에서 2학년 자연계학생을 대상으로 2010.8.26일 수업을 실시하였다. 수업 전 접선의 개념에 대한 설문을 하고, 수업 후 설문을 실시하였다. 수업전 설문내용과 수업 후 설문내용에 대한 통계와 내용은 다음과 같다.

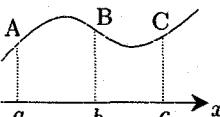
### <수업 전 설문>

1. ‘접선’의 개념에 대하여 알고 있는가?

①매우 그렇다	②그렇다	③보통이다	④아니다	⑤매우 아니다
3	27	37	11	0

2. 본인이 알고 있는 접선의 정의에 대하여 구체적으로 기술하시오.

○ 그래프  $f(x, y) = 0$  위의 점  $(x_1, y_1)$ 에서의 접선은  $(x_1, y_1)$ 을 지나고  $(x_1, y_1)$ 에서의 미분

- 계수를 기울기로 갖는 직선.  $(x_1, y_1)$ 에서 미분불가일 경우 점  $(x_1, y_1)$ 를 지나는 모든 직선
- $x = a$ 에서 접선은  $f'(a)$ 를 기울기로 갖고  $(a, f(a))$ 를 지나는 직선
  - 임의의 그래프의 임의의 한 점  $(a, f(a))$ 에 대해 무한소만큼 좌우로 빼 점을 이은 직선
  - 임의의 곡선 위의 한 점을 스쳐 지나는 직선
  - 직선과 곡선이 통과하지 않고 만날 때 직선
  - 임의의 함수  $f(x)$  위의 점  $(a, f(a))$ 에 대하여 점  $(a+h, f(a+h))$ 와 점  $(a, f(a))$ 를 잇고, 점  $(a+h, f(a+h))$ 를 점  $(a, f(a))$ 에 한없이 가까이 보낼 때의 직선
  - 그래프상의 임의의 한 점에서 그 점의 미분계수를 기울기로 하고 그 점을 지나는 직선
  - 어느 한 도형에 임의의 직선이 접근하여 도형의 한 점에서 접하는 순간의 직선
  - 미분 가능한 함수  $f(x)$ 에 대하여 직선  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
  - 그래프와 한 점에서 만나는 직선
  - 임의의 함수  $f(x)$  위의 점  $(a, f(a))$ 에서의 접선은  $f(x)$ 가  $x = a$ 에서 미분가능하고 연속일 때,  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ 이며,  $x = a$ 에서의 좌우극한이 다른 경우 첨점을 지나는 직선은 유일하지 않으므로 접선이라 할 수 없음
  - 그래프의 임의의 한 점에서 만나며 그 점과 이웃하는 점과는 만나지 않는 직선
  - 도형과 한 점에서 공통된 좌표(교점)를 가지고 서로 교차되지 않는 직선
  - 기하학적으로  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 를 만족하고 점  $(a, f(a))$ 을 지나는 직선
  - 어떤 구간에서 직선과 곡선이 만나지만 직선과 곡선의 부등호 관계가 바뀌지 않는 직선
- 
○ 모든 실수에서 연속인 곡선에서 점  $a$ 가 점  $b$ 로 한없이 가까워질 때 직선  $AB$ 가 근접해지는 직선과 점  $c$ 가 점  $b$ 로 한없이 가까워질 때 직선  $BC$ 가 근접해지는 직선이 같아지면 그 직선을 곡선 위의 점  $B$ 에서의 접선이라 정의한다.
- 이차곡선과 오직 한 점에서 만나는 직선( $D=0$ )
  - 곡선은 모두 점으로 이루어져 있고 접선은 곡선 위의 한 정점과 동점의 변화율에서 동점이 정점에 한없이 가까워질 때의 극한값??
  - 직선이 곡선의 어떠한 점에서 만났을 때, 그 점의 순간기울기와 직선의 기울기가 일치하는 직선
  - 곡선의 어느 한 점을 교차하지 않고 스쳐지나가는 직선
  - 두 점 사이의 기울기를 구하는 과정에서  $\Delta x \rightarrow 0$  일 때의 기울기의 극한이 존재할 때의 직선

#### <수업 후 설문에 대한 내용과 통계>

'접선'의 용어에 대한 개념 정립을 주제로 하는 본 수업을 듣고 난 후 다음 설문에 답하시기 바랍니다.

1. 수업 전 본인이 알고 있었던 '접선'의 정의가 명확하였다고 생각하는가?

①매우 그렇다	②그렇다	③보통이다	④아니다	⑤매우 아니다
3	12	25	30	8

2. 1번에서 ④ 또는 ⑤번을 선택한 학생은 그 이유를 설명하시오.

- 본 수업을 듣기전, 사실 접선에 대한 명확한 개념이라는 것을 가지고 있지 않았던 것 같습니다. 또한, '접선'이라는 것은 이미 사람들이 정의해 놓은 것으로, 어떠한 모양에 대한 접선이 있다 없다가 나오는 것인데 정의와 사례가 없어 추측을 할 수가 없다고 생각합니다.
- 접선의 정의를 이렇게 깊게 생각해본 적 자체가 없었다.
- 내가 생각한 접선이란 그냥 한 직선과 원이 접한다고만 생각했다
- 학교에서 접선이라는 주제만으로 수업을 한 적이 없었기 때문에 내가 기준에 알고 있었던 접선의 정의가 명확한지 아닌지 몰랐다.
- 학교수업에서는 미분값이 접선의 기울기라고만 했지만, 정확히 접선의 개념에 대해서 설명을 해주지 않았고 여지껏 접선의 정의를 말해주지 않았기 때문이다.
- 전까지는 접선의 정의에 대해 깊이 생각해본 적이 없었다

3. 미분계수에 대한 용어를 학습한 경험이 있는가?

①매우 그렇다	②그렇다	③보통이다	④아니다	⑤매우 아니다
13	52	9	3	1

4. '할선의 극한'이라는 용어를 들어본 경험이 있는가?

①매우 그렇다	②그렇다	③보통이다	④아니다	⑤매우 아니다
1	3	6	41	27

5. 접선의 정의에 대하여 수학교육 이론과 GSP를 이용한 수업이 기존의 교실 수업과 비교하여 접선을 이해하기에 적합하다고 생각하는가?

①매우 그렇다	②그렇다	③보통이다	④아니다	⑤매우 아니다
18	39	21	0	0

6. 5번에서 ① 또는 ②번을 선택한 학생은 그 이유를 설명하시오.

- 그래프의 움직임을 보니까 접증이 잘 되고 이해가 잘 된다.
- 생각만으로는 이해가 어려운 경우가 있기 때문에 실제로 보는 것이 도움이 되는 거 같다.
- 이론으로 한 번 듣고 시각으로 보니까 이해가 잘 된다.
- 평소에 생각하지 않던 면밀한 그림이 나와서 좋다.
- 접선에 대한 나의 정의에 대한 반례를 정확히 볼 수 있다.
- 여러 가지 예를 볼 수 있어서 좋다.
- GSP를 이용한 수업을 다양하게 듣고 싶다.
- 기준에 생각하고 있던 것을 구체적, 기하적으로 볼 수 있어서 좋다.

- 새로운 경험이다. 개념을 쉽게 생각할 수 있었다.
  - 얼마 전 책에서 고정된 그림을 이용하여 한없이 가까워지는 움직임의 결과인 접선, 미분에 대한 개념을 이해하는 것 보다 GSP를 이용하여 실제로 움직이는 것을 보니 더 이해가 잘된다고 생각 한다.
  - 접선이 어떤 식으로 어떤 모양으로 생기는지 개형을 잘 이해할 수 있었다.
7. 5번에서 ④ 또는 ⑤번을 선택한 학생은 그 이유를 설명하시오.
8. 주어진 곡선상의 어떤 점에서 미분가능성과 그 점에서 접선의 존재에 대한 정확한 이해가 되었는가?

①매우 그렇다	②그렇다	③보통이다	④아니다	⑤매우 아니다
11	33	31	2	1

9. 8번에서 ① 또는 ②번을 선택한 학생은 그 이유를 설명하시오.
- 미분가능하지 않아도 접선은 존재할 수 있다는 것을 알 수 있었다.
  - 수업을 들으면서 내가 알던 접선의 정의에 오류가 많다는 것을 알았다.
  - 적절한 이유와 반례가 이해를 도왔다.
  - 여러 가지 예를 들면서 반론을 제기하고 알고 있는 정의의 모순을 알게 되었기 때문에 명확한 정의의 이해 접근이 쉬웠다.
  - 미분가능성을 배운 상태였고, 접선의 정의도 많은 학생들에게 친숙한 용어였으므로 보다 쉽게 접선을 이해할 수 있었다.
  - 수업을 통해 여러 의견이 나왔는데 그에 대한 반론을 제기하면서 접선의 정의에 대해 의미를 좀 혼나갔기 때문에 접선의 이해가 되었다.
  - 나는  $f'(a)$  와 직선  $l$  이 만날 때 접선이라고 했는데  $f'(a)$  이 존재하지 않으면서 접선일 수 있음을 생각했다.
  - 여러 가능성과 경우의 수를 두고 여러 가지 반례를 찾아 성립이 왜 안 되는 이유를 알았다.
10. 8번에서 ④ 또는 ⑤번을 선택한 학생은 그 이유를 설명하시오.
- 아직 미분을 정확히 알지 못하고 있다. 이후에 다시 듣고 싶다.
11. 본 수업을 듣고 난후 접선의 개념이해와 관련하여 반성하는 점이 있으면 기술하시오
- 접선을 구하는 방식이 생각보다 많다는 것을 알았다.
  - 접선을 명확하게 이해하지 못하고 문제를 풀때만 사용했다는 것이 반성할 점이라고 생각한다.
  - $x = k$  형태의 접선을 간과했다.
  - 기하학적인 정의, 즉 그림을 이용하는 방법에 대해서는 알았지만 그것을 국한을 사용한 수식으로 고쳐서 정확하게 표현하는 것을 잘하지 못했다. 또한  $y$ 축에 평행한 접선이나 곡선을 관통하는 접선에 대해서 많이 생각해 보지 않은 것이 반성할 점이다.
  - 내가 원래 알고 있었던 접선의 개념은 너무 문제푸는 데에만 국한되어있었던 것 같다.

- 개념을 알지 못한채 그냥 기계처럼 문제를 풀고 있다가 개념을 명확히 알고나니 문제가 이해가 가기 시작함
- 수업을 듣기 전에는 접선은 판별식이 0이라고만 생각하고 그다지 심히 생각해보지 않았는데 수업내용을 듣고 조금만 더 생각하면 듣기 전에 알 수 있었을 텐데 라고 생각하고 후회된다.
- 특수한 경우에 대한 접선을 정의할 수 없었음에도 그냥 쓰고 있었다.
- 수학은 어렵듯이 아는 것은 모르는 것이라는걸 알았다.
- 정확한 개념도 모르면서 공식만 단순 암기하여 사용한 것이 부끄럽습니다.
- 접선으로 알고 있었던 것은 단지 그림과 판별식만 연상되었는데 색다르다.
- 수학을 공부하기 위해서는 기본적인 정의에 대해 잘 알고 있어야 한다고 생각한다.
- 내가 알고 있는 접선은 완전한 접선이 아니라는 것을 깨달았다. 그냥 기계적으로 배웠다는 생각이 들었다.

12. 본 수업을 듣고 난 후 특히 좋았던 점이 있으면 기술하시오.

- 평소에는 이런 토론식(반증식 수업)을 해본 적이 없어서 수학적인 궁금증이 생겨도 풀 기회가 없었는데 이런식의 수업을 한다면 좋을 것 같다.
- 평소에 생각지 않는 독특한 주제가 좋았다.
- 책에 있던 대로 그냥 단순하게 넘어갔던 수학 용어를 자세하게 듣고 또 스스로 생각할 수 있어서 좋고, 흥미롭고 재미있었다.
- 접선에 대하여 잘 몰랐는데 새롭고 다양한 시각으로 정의를 알 수 있게 되었다.
- 보기만 하는 강의식 수업에서 토론식 수업이 되어 많은 참여를 하게 되었던 것 같다.
- 새로운 용어(할선의 극한)에 대하여 학습한 부분이 좋다.
- 시각적인 자료와 토론식 수업으로 인하여 집중이 잘 되고 이해가 쉬웠다.
- 수업을 하는 방식이 완전히 바뀌어 지겹지 않고 흥미로웠다.
- 당연하다고 생각되는 것을 돌아보는 계기가 되었다.
- 식상한 교육이 아닌 새롭고 신선한 수업을 받은 느낌이다. 접선을 새로운 관점에서 볼 수 있었다.
- 창의적인 수업인거 같다. 학생에게 의문점을 유발하고 풀어가는 방식이 좋다.
- 수시 입시를 준비하는 수험생으로서 다양한 사고를 하게해주는 수업이었다.
- 토론식으로 서로 의견을 말하면서 수업을 해서 인상적이었다. 이와 같은 수업이 자주 있었으면 한다.
- 접선에 대한 나의 잘못된 개념과 정의를 정확히 정립할 수 있었다.
- 단순한 정의로부터 생각하지 못한 개념들을 스스로 생각해가면서 정의를 찾아내어 더 이상의 의문이 없다. 생각할 수 있는 기회를 주는 것이 가장 좋은 수업인거 같다.
- 생각에 대한 이야기와 발표, 반론 등을 통해 정확한 개념을 잡아주는 수업이 좋다.
- 선행을 한 학생만 알 수 있는 수업이 아니라 어느 누구라도 시작으로 보면서 함께 공부할 수 있

어서 좋다.

- 답이 아닌 자신의 생각을 자유롭게 말할 수 있어서 좋았다.

13. 본 수업에 대하여 고쳐야 하거나 보완해야 할 점이 있다고 생각한다면 그 점을 기술하시오.

- 조작하기가 조금 어려운 것 같다.

- 보완할 것은 잘 모르겠으나 이런 수업자체가 별로 없다는 것이 문제인 것 같다.

- 이와 같은 형태의 깊이있고 명료한 정의는 정작 학교내 중간, 기말시험에서 중요시하지 않는다.

- 일단 학교체제의 문제이긴 하지만 학생이 많다보니 개개인의 생각을 다 말할 수 없다는 것이 아쉬웠습니다.

- 좀더 다양한 학생들의 의견을 들었으면 좋았을 것 같다.

- 반례를 들어준 것이 좋았는데 반단위로 수업해서 전체의 의견을 묻지 못했던 것이 조금 아쉬웠다. 그 점을 조금 보완해주었으면 합니다.

14. 본 수업을 듣고 수학의 다른 개념이해 또는 창의적 사고의 신장에 도움이 되었다고 생각한다면 그 점을 기술하시오.

- 할선의 극한이란 용어를 듣고 곡선과 할선에 대해 다시 한 번 생각해보게 되었다.

- 여러 가지 수학 공식의 근원, 다시 말해 그 공식이 나온 이유에 대한 생각을 자주해보게 되었다.

- 특정한 개념에 대해 이해를 하기 쉬웠다. 수학을 할 때 정의에 관한 문제와 증명을 하는 것이 어려운데 좀 더 쉽게 접근할 수 있을 것이다.

- 내가 알고 있었던 좌미분계수, 우미분계수의 정의를 이용해서 접선의 기울기를 정의했기 때문에 좌극한, 우극한에 대해 잘 알 수 있었다.

- 단순히 접선 방정식, 접선 구하는 공식 등등 이런 것을 배우기보다는 접선의 개념을 먼저 공부하는 게 더욱 효율적이었다.

- 수업을 듣고 난 후 일단 수학을 하기 위해서는 어떤 개념의 정의를 정확하게 알아야 한다는 생각이 들었다. 반례를 들어 설명을 해주셔서 수업이 잘 이해가 되었다.

- 네. 토론식은 재미나요. 창의력이 증가한 거 같음

- 항상 틀에 박힌 수업을 하다가 색다른 경험을 하니 재밌었다.

- 접선이라고 하는 것을 그냥 단순하게 문제집이나 어디서 들어서 접선이란 뭐구나라고 알았는데 수업을 들으면 여러 방면으로 생각해보기도 하고, 친구들이 생각했던, 내가 생각지 못했던 방법도 생각해보고 알 수 있었다.

- 다른 개념보다 접선을 개념을 생각해보면서 수학이 개념에 깊이 생각해보는 시간을 가질 수 있었다.

- 잘못된 개념에 대해 조금씩 고쳐가는 점을 통해 수업 주제에 대해 이해가 잘 되었다.

- 단순히 계산기처럼 계산만 하는 수업보다 수학이 무엇을 하는 것인지를 배운 것 같습니다.

- 교과서에도 실렸으면 좋겠다.

- 수학의 개념을 한 면만 보고 배우는 게 아니라 다양한 측면에서 다른 점이 도움이 되었다.

- 논술에 대한 기초적인 사고를 가지게 되었다.
  - 접선의 완벽한 정의를 통해 조금 더 난이도 있는 수학의 개념을 쉽게 접근할 수 있을 것 같다.
  - 창의적 사고력이 증진될 거 같다.
  - 접선을 생각할 때 처음에는 막연히 생각했지만 접선에서 미분, 미분에서 극한으로 생각을 확장할 수 있게 되어 사고 신장에 도움이 되었던 것 같다.
15. 본 수업에 대한 기타 의견이나 느낀 점이 있으면 자유롭게 기술하시오.
- 이런 수업이 자주 있었으면 좋겠다.
  - 다른 주제를 가지고 이런 수업을 받았으면 한다.
  - 학생과 상호교류하는 수업이 많았으면 좋겠다고 생각합니다.
  - 이해하는 시간을 주고 설명하시는게 이 강의의 의미가 더 깊어졌을 것 같았다.
  - 일회성으로 끝나는 수업이 되지 않길 바란다.
  - 모두의 반례를 조금 더 수식과 기하학적으로 보여주셨으면 합니다.

비록 서울의 한 학교의 결과이므로 일반적인 결과라 보기에는 무리가 있을 수 있겠으나 일반계 고교라는 점을 감안한다면 본 수업을 통한 설문의 결과를 통하여 평균적인 고등학생들의 지금까지의 접선의 개념에 대한 이해가 정확하지 못한 부분이 많았음을 알 수 있으며 고등학생의 경우 거의 미분가능성과 접선의 존재 또는 접선을 구하는 문제를 동일시하는 등 이해에 대한 오류가 있었음을 알 수 있다, 그러나 수업 후 설문을 통하여 수학교육이론에 의한 학생자신들의 참여와 경험, 토론과 비판 및 GSP를 활용한 수업이 기존의 수업에 비하여 개념의 이해에 많은 효과가 있었음을 알 수 있다. 또한 지금까지의 학생들의 접선에 대한 이해가 단편적이었고, 충분히 알지 못하면서 이해한 것으로 생각하는 등 반성점도 알아볼 수 있었으며 이와 같은 수업이 좀 더 자주 있었으면 하는 점과 토론식 수업에 대한 학생들의 희망을 두어볼 수 있었다는 점에서 의미가 있었다고 생각한다. 마지막으로 창의력신장과 관련하여서는 다양한 의견이 나왔지만 대체적으로 수학에서 개념이해의 중요성, 심층적 사고, 대화와 토론에 의한 수업, 반례제시에 의한 개념의 정확한 이해 등을 통하여 완벽한 이해 추구를 해야 한다는 점과 다른 개념에 대해서도 적용할 수 있다는 점과 창의력 신장에 도움이 될 것 같다는 대답이 많았다는 점에서 상당히 긍정적이라고 판단된다. 물론 수업현장에서 수업시간, 전산설비, 장소의 문제 등 여러 현실적 문제가 있겠지만 본 실험을 통한 학생들의 반응이 좋았고 수업효과 및 본인들의 수학이해에 대한 반성과 창의력신장 등에 기여하는 점이 있었다고 판단되므로 여건이 허용되는 범위 내에서 계속적으로 활용이 된다면 접선의 개념뿐만 아니라 다른 수학 개념에 대한 이해에도 유용할 것으로 생각된다.

## VI. 결 론

본 연구에서는 접선 개념의 효과적인 이해를 돋는 데 있어서 세 가지 이론과 방법의 적용에 대하여 알아보았다. 첫째는 접선의 개념을 이해하는 과정에서 라카토스의 이론을 활용한 준경험주의적인 수업 방식을 도입하는 것이다. 둘째는 접선의 개념을 이해하는 과정에 임재훈, 박교식(2004)의 접선 개념의 이해 단계의 적용이다. 셋째는 접선의 개념을 이해하는 수업에서 다양한 접선들의 예시를 효과적으로 제시하기 위해 GSP 프로그램의 활용이다. 접선의 개념은 실생활이나 도형에서도 자주 이용되는 기초적인 개념이지만 실제로 일반적인 접선의 개념을 완벽하게 이해하는 것은 쉬운 일이 아니다. 특히 중학교에서 고등학교로 올라갈수록 학생들의 이해 수준이 달라지기 때문에 접선의 개념을 이해시키는데 있어서 학생들의 이해 수준을 고려하여야 한다. 또한 현재 교육과정에서 접선의 개념은 단계가 높아질수록 정의가 확장되는 개념이기도 하다. 이러한 이유로 본 연구는 먼저 현재 교육과정의 접선 개념을 단계적으로 분석해 보았다. 그리고 임재훈, 박교식(2004)의 「학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구」와 김문정(2007)의 「접선 개념 인식에 대한 연구」를 토대로 접선 개념의 이해 단계를 분석해보고 실제 수업의 적용에 관해서 연구하였다. 임재훈, 박교식(2004)은 접선 개념의 이해 단계를 7단계로 보았다. 1단계는 기하적 접선 개념 1의 형성 단계로 원과 직선의 위치 관계를 맥락으로 하여 ‘곡선과 한 점에서 만나는 직선’이라는 접선 개념을 형성하는 것이다. 2단계는 기하적 접선 개념 2의 형성 단계로 ‘직선이 곡선과 한 점에서 만나면 곡선을 스치고 지나가고, 곡선을 스치고 지나가면 곡선과 한 점에서 만나게 된다.’는 사실을 알게 되는 것이다. 3단계는 함수적 접선 개념 1의 형성 단계로 해석기하적인 관점에서 접선의 식을 구하는 단계이다. 4단계는 기하적 접선 개념 1의 부정 (1) 단계로 ‘한 점에서 만난다.’와 ‘스치고 지나간다.’ 사이의 필요충분의 관계가 일반적으로 성립하는 것은 아님을 아는 단계이다. 5단계는 기하적 접선 개념 2의 부정과 기하적 접선 개념 3의 형성 단계로 기하적 접선 개념 2에서 ‘스치고 지나간다.’는 개념이 부정되고 기하적 접선 개념 3인 ‘할선의 극한’이라는 새로운 개념이 형성되는 단계이다. 6단계는 기하적 접선 개념 1의 부정 (2) 단계이다. 7단계는 함수적 접선 개념 2의 반성 단계로 접선은 ‘곡선의 한 점을 지나며 기울기가 그 점에서의 미분계수와 같은 직선이다’라는 개념을 반성하고 결국 ‘할선의 극한’임을 아는 단계이다. 이러한 선행 연구들을 바탕으로 하여 단계별로 접선의 개념을 이해하고 이를 실제 수업의 적용에 관해서 연구하는데 라카토스의 이론을 활용한 준경험주의적인 수업 방식과 GSP 프로그램의 활용을 생각해 보았다.

다음으로 이런 수업을 실제 수업에서 보다 효과적으로 적용할 수 있도록 GSP를 활용하였다. 기초적인 접선의 정의에서부터 일반적인 접선의 정의까지 단계별로 등장하는 다양한 예시와 반례들을 보기 쉽고 편하게 볼 수 있도록 GSP를 활용하여 수업 모델을 제작하였다. 본 연구에서 제작된 GSP 수업 모델은 교사가 보여주는 정도의 수업에 맞게 제작되긴 하였지만 시간과 환경적인 여건이 맞는다면 학생들이 실제로 사용해보면 좀 더 효과적일 것으로 기대된다. 또한 본 연구의 마지막 부분에

작성된 학습지도안은 앞에서 제작된 GSP 수업 모델을 실제 수업과 상황을 생각하여 효과적으로 활용할 수 있도록 구체적으로 작성해 보았다.

끝으로 본 연구에서 제안한 방법에 대하여 현장에서의 학생들의 반응과 변화를 알아보기 위하여 인문계 고등학교 자연계 2학년을 대상으로 수업을 실시하고 수업 전과 수업 후를 비교하여 효과를 알아보았다(V장 참조). 이와 같은 현장적용을 통하여 그 효과를 알아볼 수 있었으며 본 수업방식에 의한 현장적용이 학생들의 이해에 도움이 되었으며, 학생자신들의 본인들의 개념이해에 대한 반성과 창의력증진에 기여하고 동시에 이와 같은 수업방식이 효과적이었음을 알 수 있었다. 이와 같은 관점에서 본 논문에서 제안한 방법이 학생들이 접선의 개념을 이해하는데 보다 체계적이면서 동시에 정확하게 개념을 이해할 수 있는 수업으로 활용될 수 있을 것이라고 기대한다. 또한 본 연구에서 작성한 수업 모델의방법이 다른 수학적 개념의 이해를 위한 수업에도 적용되어 효과적인 수업이 이루어 질 수 있을 것으로 생각하면서 수학교육학적으로 의미가 있을 것으로 생각한다.

**Acknowledgment.** 저자들은 본 논문에 대해 귀중한 논평과 제시를 해주신 referee께 감사의 뜻을 표합니다.

### 참 고 문 헌

- 강문봉 (1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구, 서울대학교 대학원 박사학위논문.
- 교육과학기술부 (2008). 2007년 개정 중학교 교육과정 해설(수학과), 한솔사.
- 교육인적자원부 (2007). 2007년 개정 교육과정(수학과), 대한교과서주식회사.
- 김문정 (2007). 접선 개념 인식에 대한 연구, 이화여자대학교 교육대학원.
- 우정호 외 9인 (2009). 고등학교 수학 교과서, 두산동아.
- 우정호 외 9인 (2009). 중학교 수학 1 교과서, 두산동아.
- 임재훈 · 박교식 (2004) 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구, 수학교육학 연구, 14(2), 171-185.
- 조영미 (1999). 접선 개념의 교육적 연구, 수학교육학 연구, 9(1), 229-237.
- 조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 이성재(2009). 수학 II, 금성교과서.
- Lakatos Imre (1978), *Mathematics, Science and Epistemology*. Edited by J. Worrall and G. Curie.  
London : Cambridge University Press.

## On effective way of teaching concept of tangent line using Lakatos theory and GSP

**Byung Kuk An**

Graduate School of Education, Kyung Hee University, Seoul 130-701, Korea

E-mail : cuckoo526@hanmail.net

**Byung Hak Kim**

Department of the Applied Mathematics, Kyung Hee University, Suwon 446-701, Korea

E-mail : bhkim@khu.ac.kr

**Youn Keun Park**

Yangchung High School, Seoul 158-055, Korea

E-mail : keenball@hanmail.net

The introduce and accurate understanding of the concept of tangent line is very important in Mathematics education and its applications. In this study, we investigated the introduction method in the textbook for tangent line and its concepts. And we studied the effective teaching methods for the accurate understanding using Lakatos learning theory, GSP and related precedence studies. Finally we suggest the teaching plan for the equation of for the tangent line in the high school and apply to the High school students.

---

\* ZDM Classification : G14

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30

\* Key Words : Tangent line, Lakatos theory, GSP(Geometer's Sketch Pad)