韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 24집 제 3호, 2010. 9. 793-806

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 3, Sep. 2010. 793-806

고등학교 수학의 방정식에 관련된 문제의 분석 및 해결에 관한 연구

유 익 승 (전주고등학교)
한 인 기 (경상대학교)[1)]

본 연구는 2007개정 교육과정에서 강조하는 창의적인 탐구, 문제해결에 관련된 문헌연구로, 본 연구에서는 문제의 이해 단계에서 수행하는 분석의 본질 및 유형을 문헌연구를 통해 고찰하였으며, 구체적인 방정식 문제들에 대한 분석을 제시하였고, 분석을 통해 얻어진 정보들을 활용한 다양하고 비정형적인 문제해결의 방법들을 제시하였다. 이를 통해, 고등학교의 수학교실에서 방정식 단원의 다양한 해법찾기 활동에 관련된 기초자료를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

1. 서 론

고등학교 교육과정 해설(교육인적자원부, 2008, p.64)에 의하면, '1980년대 수학교육에서 문제해결이 강조되면서 우리나라에서는 제4차 교육과정 이래로 수학 교과에서 문제해결을 강조해 오고 있다. 문제해결 교육에 대한 강조는 교육과정을 개편할 때마다 지속적으로 강조되고 있으며, 이는 세계적으로 공통된 경향'이라고 기술하면서, 수학 교수-학습에서 문제해결이 중요한 키워드임을 강조하였다.

수학 교과의 교육과정이 개정될 때마다 수학 문제해결에 대한 강조점이 약간씩 다르기는 했지만, 지속적으로 강조되어 왔다. 제 7차 수학과 교육과정의 교수-학습 방법에서는 문제해결 과정에서 사용가능한 구체적인 문제해결 전략(그림그리기, 예상과 확인, 표만들기, 규칙성찾기, 단순화하기, 식세우기, 거꾸로 풀기, 논리적 추론, 반례들기 등)을 명시하였고, 학생이 문제해결 전략을 자주적으로 세워 문제를 해결할 수 있도록 해야 한다고 강조하였다.

수학교육학 분야에서도 다양한 문제해결 전략의 탐구는 오랫동안 중요한 연구 주제가 되어왔다. 예를 들어, Lenchner(1983), Krulik & Rudnick(1987)은 다양한 문제해결 전략을 소개하고 이들 전략의 활용에 관련된 다양한 수학 문제들을 소개하여, 문제해결 전략에 대한 초창기 연구의 기틀을 다졌다. 국내에서는 성인서(1987), 양인환(1990) 등이 초창기에 문제해결 전략에 대한 입문적인 연구를

* 접수일(2010년 8월 30일), 심사(수정)일(2010년 9월 10일), 게재확정일자(2010년 9월 27일)
* ZDM 분류 : C34
* MSC2000 분류 : 97C30
* 주제어 : 분석, 종합을 통한 분석, 방정식, 문제해결
1) 교신저자

수행했으며, 그 이후로 김선유(1995), 방승진 · 이상원 · 황동주(2001), 양은경 · 황우형(2005) 등의 연구와 다양한 형태의 교수-학습 자료들이 시도 교육청을 중심으로 개발되었다. 이들 연구를 통해, 수학 교수-학습 과정에서 활용할 수 있는 구체적인 수준으로 수학 문제해결 전략에 관련된 이론 및 실제의 연구들이 진행되었다는 측면에서 교육적으로 높게 가치를 평가할 수 있을 것이다.

한편 2007개정 교육과정에서는 수학 문제해결에 관련하여 다양한 방법에 의한 창의적 문제해결, 문제만들기 활동, 문제해결을 통한 수학적 지식 및 방법의 일반화 등이 강조되었다. 그리고 교육인적자원부(2008, p.64)는 '문제해결 교육의 목적은 이미 배운 수학적 사실이나 알고리즘을 단순히 적용하는 것이 아니라 수학적 역량을 갖추게 하는 것'이라고 규정하였다. 이를 통해, 수학 문제해결에서는 정형적인 문제들에 대한 알고리즘적인 문제해결 및 반복연습이 강조되는 것이 아니라, 문제만들기, 다양한 방법에 의한 문제해결, 얻어진 지식과 방법의 일반화를 통한 수학적 역량의 신장을 바탕으로 비정형적인 문제, 비정형적인 해결 방법에 대한 창의적인 탐구를 가능하도록 하는 교수-학습이 중요하다는 것을 알 수 있다.

수학교육학 분야에서 문제만들기와 수학교육(김준겸 · 임문규(2001), 고상숙 · 전성훈(2009), 정동권 · 김수미 · 김지원(2009)), 다양한 방법에 의한 문제해결(권오남 · 방승진 · 송상헌(1999), 한인기 · 꾸쉬니르(2008)), 일반화(강현영(2007), 김남희(1997)) 등과 관련된 다양한 연구들이 폭넓게 진행되고 있는데, 이것은 개정된 수학 교육과정의 성공적인 구현이라는 측면에서 큰 의미를 부여할 수 있을 것이다.

본 연구는 2007개정 교육과정에서 강조하는 창의적인 탐구, 문제해결에 관련된 문헌연구로, 본 연구에서는 문제의 이해를 위해 수행하는 분석활동의 본질 및 유형을 문헌연구를 통해 고찰하며, 구체적인 방정식 문제들을 분석하고, 분석을 통해 얻어진 정보들을 활용해 다양하고 비정형적인 문제해결의 방법들을 제시할 것이다. 이를 통해, 고등학교의 수학교실에서 방정식 단원의 다양한 해법찾기 활동에 관련된 기초자료를 제공할 수 있을 것이며, 문제의 이해를 위한 분석 활동, 문제해결의 탐색 수행, 문제해결 사이에 존재하는 긴밀한 연결성을 구체적인 예를 통해 밝힐 수 있을 것으로 기대된다. 특히 본 연구에서 얻어지는 구체적인 분석 방법 및 문제해결 방법들은 학생들의 개인차를 고려한 수학교실에서 교수-학습 자료로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

2. 연구의 방법 및 절차

고등학교 수학의 방정식에 관련된 문제의 분석 및 해결방법 탐구를 위해, 본 연구에서는 첫째 분석활동의 본질 및 유형에 관련된 문헌연구를 수행하며, 둘째 문헌연구에서 얻어진 결과를 바탕으로 방정식 문제들의 분석을 수행하여, 이들 문제의 비정형적인 해결 방법을 제시할 것이다.

(1) 문헌연구

문헌연구에서는 문제해결과 관련하여 Polya, Krutetski의 연구들을 중심으로, 문제해결의 이해 단계, 수학 문제해결과 정보 등에 대한 개별적인 고찰을 수행할 것이다. 그리고 문제해결의 이해 단계와 정보의 개념을 결합시켜, 문제해결을 위한 정보의 수집과정을 심리학적 개념인 '분석'과 관련지을 것이다. 특히 심리학의 연구 중에서 루빈슈타인의 '종합을 통한 분석'의 본질을 밝힐 것이다.

(2) 방정식의 비정형적인 해결 방법 탐구

문헌연구로부터 얻어진 '문제의 이해', '정보', '분석', '종합을 통한 분석' 등에 대한 고찰을 바탕으로, 고등학교 수준에서 다루어지는 다양한 방정식 문제들에 대한 체계적인 정보수집 활동을 수행할 것이다. 이때 얻어진 정보들을 바탕으로, 방정식의 다양한 해결 방법들을 탐구할 것이다.

본 연구에서는 고등학교 수준에서 다루어지는 분수방정식, 무리방정식, 고차방정식의 몇몇 전형적인 문제들을 중심으로, 문제에 대한 정보의 수집과 문제해결 방법의 상호 관련성을 구체적으로 제시할 것이다.

3. 고등학교의 방정식에 관련된 문제의 분석

수학 문제해결은 문제의 이해, 계획수립, 실행, 반성의 단계로 구성된다. 이때 문제의 이해 단계에서 얻어진 정보들은 문제해결을 위한 계획수립, 탐색수행을 위한 바탕이 되므로, 문제의 이해 단계는 성공적인 문제해결을 위해 매우 중요할 것이다.

Polya(2005, p.xiv)는 문제의 이해에 관련하여, 다음과 같은 발견술적인 발문들을 제시하였다: 미지인 것은 무엇인가? 자료는 무엇인가? 조건은 무엇인가? 조건은 만족될 수 있는가? 조건은 미지인 것을 결정하기에 충분한가 또는 불충분한가 또는 과다한가 또는 모순되는가? 그림을 그려보아라. 적절한 기호를 붙여라. 조건을 여러 부분으로 분해하라. 그것을 써서 나타낼 수 있는가?

한편 Krutetski(1968)는 문제의 이해 단계를 문제에 대한 정보의 수집으로 이해하였다. 즉 문제의 이해를 위해 Polya가 제시한 다양한 활동들은 문제에 대한 다양한 정보를 수집하는 활동이라고도 할 수 있을 것이다.

Polya가 문제의 이해를 위해 제시한 활동들 중에서 '미지인 것은 무엇인가', '자료는 무엇인가', '조건은 무엇인가', '조건을 여러 부분으로 분해하라'는 활동은 분석에 밀접하게 관련된다. 수학교육학에서 분석은 크게 두 가지 의미를 사용된다. 한인기 · 꼴랴긴(2006, p.60)에 의하면, '유클리드나 파푸스에 의해 폭넓게 사용된 발견술로서의 분석은 문제해결을 위한 탐색활동이 구하려는 것 또는 증명해야 할 것으로부터 시작되는 탐구 활동을 포괄적으로 의미'하는 것이다. 반면에 심리학에서의 사고과

정의 구성요소로의 분석(한인기 · 꼴랴긴, 2006, p.59)은 '전체를 구성하는 부분들, 요소들로 분해하는 사고조작, 전체에서 개별적인 징표들, 속성들, 성질들, 측면들, 연결 및 관련성들을 추출하는 사고조작'을 의미한다. Polya의 발견술적인 발문 '미지인 것은 무엇인가', '자료는 무엇인가', '조건은 무엇인가', '조건을 여러 부분으로 분해하라'는 두 번째의 사고과정의 구성요소로써의 분석이 될 것이다. 예를 들어, 다음 문제를 살펴보자.

문제 1. 분수방정식 $x-\frac{6}{x-1}=2$를 풀어라.

문제 1을 분석하면, 분수방정식, x, 6, $x-1$, 2, $\frac{6}{x-1}$, $x-\frac{6}{x-1}$, $x-\frac{6}{x-1}=2$ 등의 정보를 얻을 수 있을 것이다. 이들 정보는 문제 1에 명시적으로 기술된 정보로, 문제해결자가 문제 1을 읽으면서 직접적으로 얻을 수 있는 정보들이다. 유익승(2010)은 이들을 1차적 정보라고 규정하였다.

심리학에서는 살펴본 것과 같은 1차적 정보의 추출에 관련된 분석 이외에, 좀더 고차적인 형태의 분석인 '종합을 통한 분석'이 연구되고 있다. 한인기(2006, p.14)에 의하면, 러시아의 심리학자인 루빈슈타인은 종합을 통한 분석과 관련하여, '사고 과정에서 어떤 대상은 새로운 관계들 속에 포함되며(종합), 이로 인해 그 대상은 새로운 개념들 속에서 정해지게 되는 새로운 특성을 드러내게 된다. 이와 같은 방식으로, 대상으로부터 모든 새로운 내용들이 형상되며, 대상은 새로운 방향을 향하며, 어기서 새로운 성질들이 밝혀진다'고 주장하였다. 즉 문제에서 주어진 정보들은 서로 결합되어 새로운 정보, 새로운 성질을 생성하게 된다. 물론 이들 새로운 정보들, 성질들은 문제해결자에게 문제해결의 새로운 방향, 새로운 해법의 가능성을 제공할 것이다.

문제 1의 분수방정식 $x-\frac{6}{x-1}=2$에서 우변으로부터 1을 좌변으로 이항하면 $(x-1)-\frac{6}{x-1}=1$이 되는데, 이때 분수식 $\frac{6}{x-1}$의 분모 $x-1$과 분수식 $\frac{6}{x-1}$ 앞의 다항식 $(x-1)$이 같게 된다. 이 새로운 정보(분수방정식에서 다항식 $(x-1)$에 관련된)는 문제 1로부터 직접적으로 얻어지지는 않지만, 분수방정식 $x-\frac{6}{x-1}=2$의 우변으로부터 1을 이항하여 좌변의 식 $x-\frac{6}{x-1}$에 결합시키는 조작(종합)을 통해 얻어질 수 있었다. 즉 종합을 통한 분석으로 새로운 정보를 찾아냈다.

한편 분수방정식 $(x-1)-\frac{6}{x-1}=1$에서 $x-1=t$로 치환하면, 분수방정식은 $t-\frac{6}{t}=1$과 같은 새로운 형태로 변형되며, 변형된 방정식 $t-\frac{6}{t}=1$도 종합을 통한 분석으로 얻어지는 새로운 정보가 된다. 유익승(2010)은 주어진 문제에 대한 2차적인 탐구(종합을 통한 분석)를 통해 얻어지는 정보를 2차적 정보라고 하였다.

Krutetski(1968)에 의하면, 학생들은 문제의 이해 단계에서 커다란 개인차를 보이며, 재능있는 학생들은 문제의 이해 과정에서 문제의 구조적인 요소들인 문제의 어떤 유형을 다른 유형들로 구별되도록 하는 징표들, 같은 유형 안에서 주어진 문제를 다른 문제와 구별되도록 하는 특징들, 문제해결에서 과잉 또는 불필요한 양들에 대한 정보를 정확하고 체계적으로 획득하였다고 한다. 즉 재능있는 학생들은 주어진 문제로부터 1차적 정보의 파악 뿐만 아니라, 종합을 통한 분석의 방법으로 2차적 정보를 체계적으로 탐색하여 발견할 수 있는 가능성이 있음을 추측할 수 있다.

4. 방정식 문제들의 분석과 다양한 문제해결

주어진 문제에 대한 이해는 그 이후의 문제해결 탐색 수행에 영향을 미치게 된다. 즉 문제의 이해 단계에서 수행하는 분석과 이를 통해 얻어지는 정보의 양과 수준은 문제해결자가 선택하게 되는 문제해결의 방향을 결정하는 중요한 요인이 된다. 문제의 이해 단계에서 얻어진 정보들과 이에 관련된 다양한 문제해결의 방법을 살펴보자. 우선 문제 1의 해결을 살펴보자.

문제 1의 분수방정식에서 분수방정식, x, 6, $x-1$, 2, $\frac{6}{x-1}$, $x-\frac{6}{x-1}$, $x-\frac{6}{x-1}=2$ 등의 정보를 분석한 문제해결자는 전형적인 풀이 방법인 통분을 이용한 해법을 찾을 것이다. 즉 $x-2-\frac{6}{x-1}=0$에서 등식의 좌변을 통분하면 $\frac{(x-2)(x-1)-6}{x-1}=0$이 되며, 이로부터 $x^2-3x-4=0$이 얻어진다. 이제 방정식을 풀면, $x=4$ 또는 $x=-1$을 근으로 얻게 된다.

한편, 문제의 이해 단계에서 주어진 분수방정식을 $t-\frac{6}{t}=1$와 같이 변형시킬 수 있음을 파악한 문제해결자는 방정식 $t-\frac{6}{t}=1$으로부터 $t^2-t-6=0$을 얻을 수 있다. 이제 이차방정식을 풀면, $t=3$ 또는 -2이며, 이로부터 $x=4$ 또는 $x=-1$가 얻어진다. 이러한 문제해결 방법에서는 방정식 $x-2-\frac{6}{x-1}=0$을 통분하여 $\frac{(x-2)(x-1)-6}{x-1}=0$을 얻고, 이 분수방정식의 분자를 전개하여 이차식 $x^2-3x-4=0$을 유도하는 복잡한 계산과정을 피할 수 있다.

문제 2. 분수방정식 $\frac{5}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}=1$을 풀어라.

문제 2로부터 우선 5, 1, $x+1$, x, x^2+x, $\frac{5}{x+1}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+x}$, $\frac{5}{x+1}+\frac{1}{x}$, $\frac{5}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}$, $\frac{5}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}=1$과 같은 정보들을 전형적으로 분석할 수 있다.

즉 문제해결자는 분수식 $\frac{5}{x+1}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+x}$을 포함하는 분수방정식을 가지게 되며, 분모의 최소공배수인 x^2+x으로 통분하여 문제를 해결하게 된다.

그런데 분수식 $\frac{5}{x+1}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+x}$의 분모에 주목하여, 분수식 $\frac{5}{x+1}$, $\frac{1}{x}$와 $\frac{1}{x^2+x}$을 결합시켜 생각하면(종합) $\frac{1}{x^2+x}$을 부분분수로 고쳐 $\frac{5}{x+1}$, $\frac{1}{x}$과 같은 분모를 가지는 분수식을 얻을 수 있음을 생각할 수 있다. 즉 종합을 통한 분석을 바탕으로, 분수방정식 $\frac{5}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}=1$의 다른 측면을 밝힐 수 있다.

$\frac{1}{x^2+x}$을 부분분수로 고치면, $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$이 되고, 이를 분수방정식 $\frac{5}{x+1}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}=1$에 대입하면 $\frac{6}{x+1}=1$이 된다. 이로부터 $x=5$를 곧바로 얻을 수 있다.

종합을 통한 분석을 바탕으로 탐구대상의 다른 측면을 밝혀내는 능력은 모든 학생들의 힘에 적합한 것은 아닐 것이며, 모든 학생들에게 똑같은 문제해결 접근을 요구할 수도 없을 것이다. 여기에 본 연구에서 제시하는 다양한 분석과 문제해결 방법의 교수학적 활용 가능성이 있다. 즉 수준별 교수-학습에서는 상집단, 중집단, 하집단의 학생들에게 학습내용의 깊이, 학습내용의 전개 등에서 개인차를 고려한 접근이 필요하다. 하집단이나 중집단의 학생들에게 전형적인 분석을 통한 정보의 수집 및 전형적인 문제해결이 적당하다면, 중집단이나 상집단의 학생들에게는 종합을 통한 분석에서 얻어지는 2차적인 정보를 바탕으로 다른 새로운 풀이로의 전환이 가능할 것이다. 이를 통해, 수준별 집단에서 다루는 학습내용의 차별화를 통해서가 아니라, 학습내용의 취급 방법을 통해 수준별 교육을 구현할 수 있을 것이다.

문제 3. 방정식 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$의 근을 구하여라.

문제 3에서 직접 주어진 식으로부터 대한 분석을 통해 x, 1, 2, 4, 5, 10, $x+1$, $x+2$, $x+4$, $x+5$, $(x+1)(x+2)$, $(x+1)(x+4)$, $(x+1)(x+5)$, $(x+2)(x+4)$, $(x+2)(x+5)$, …, $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)$, $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$을 얻을 수 있다. 분석을 통해, 방정식 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$에 포함된 항들, 다항식들에 대한 정보를 얻을 수 있다. 이제 전형적인 풀이로 나아갈 수 있다. 우선은 방정식 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$을 전개하여 4차식으로 나타낸 다음, 인수분해하여 근을 구하는 방법이 있다.

수학교과서에서 다루어지는 다른 해결방법을 살펴보자. $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$에서 항들의 순서를 바꾸어 $(x+1)(x+5)(x+2)(x+4)=10$로 나타내자. 이제 $(x+1)(x+5)=$

x^2+6x+5, $(x+2)(x+4)=x^2+6x+8$에서 $x^2+6x+5=t$로 치환하여 주어진 방정식을 $t(t+3)=10$의 형태로 변형시켜 방정식을 해결한다. 이 해결방법은 종합을 통한 분석에서 얻어진 2차적 정보를 활용하고 있다. 즉 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$의 항들의 순서를 적당히 바꾸어 $(x+1)(x+5)(x+2)(x+4)=10$와 같이 나타내면(종합), 주어진 방정식으로부터 $x^2+6x+5=t$으로 표현되는 방정식 $t(t+3)=10$이 유도된다(분석). 이로부터 간결한 풀이 방법이 얻어진다.

살펴본 바와 같이, 종합을 통한 분석으로부터 얻어지는 2차적인 정보는 좀더 간결한 풀이방법의 발명으로 연결될 가능성이 있다. 한편 주어진 문제에 대한 2차적 정보의 양은 일정하게 규정되어 있는 것은 아니다. 문제해결자의 수학적 지식, 분석 능력에 따라 다양한 2차적 정보를 분석할 수 있다.

문제 3의 새로운 풀이를 살펴보자. 방정식 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$에서 네 상수항 1, 2, 4, 5의 합은 12가 되는데, $t=x+\frac{12}{4}=x+3$이라 하자. 그러면 $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=(t-2)(t-1)(t+1)(t+2)=(t^2-4)(t^2-1)$이 된다. 이로부터 방정식 $(t^2-4)(t^2-1)=10$을 얻게 되며, 주어진 방정식의 근을 얻을 수 있다.

살펴본 풀이에서는 $x+1$, $x+2$, $x+4$, $x+5$에서 상수항 1, 2, 4, 5가 $1+5=2+4$가 되는 규칙성을 가지므로, 네 수 1, 2, 4, 5의 평균값을 이용한 치환을 이용하여(종합) 간단한 형태의 복이차식을 얻을 수 있었다(분석). 이러한 치환 방법을 일반화시키면, $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=k$인 방정식에서 $a+d=b+c$(단, $a<b<c<d$)이면 $t=x-\frac{a+b+c+d}{4}$로 치환하여 주어진 방정식을 복이차식으로 변형시킬 수 있음을 생각할 수 있다.

문제 4. $x^2-4x+2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 분수방정식 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$의 두 근의 합을 구하여라.

문제 3에서는 문제에서 주어진 정보들을 분석을 통해 추출했다. 문제 4에서는 다른 틀로 분석하여, 주어진 것, 구하는 것을 중심으로 문제의 정보들을 추출해 보자. 문제 4에서 주어진 것들은 이차방정식 $x^2-4x+2=0$, $x^2-4x+2=0$의 두 근 α, β, 분수방정식 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$, $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$의 두 근이며, 구하는 것은 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$의 두 근의 합이다.

이제 수행한 분석에 근거하여 문제 4의 전형적인 풀이를 살펴보자. 분수방정식 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$의 양변에 $(x-\alpha)(x-\beta)$를 곱하면, $x-\alpha+x-\beta=(x-\alpha)(x-\beta)$가 된다. 이제 등식의 좌변을 전개하여 정리하면, $x^2-(\alpha+\beta+2)x+\alpha\beta+\alpha+\beta=0$이 된다. 한편

$x^2-4x+2=0$에서 근과 계수와의 관계로부터 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$이므로 $x^2-(\alpha+\beta+2)x+\alpha\beta+\alpha+\beta=0$은 $x^2-6x+6=0$이 된다. 결국 분수방정식 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$의 두 근의 합은 6이 됨을 알 수 있다.

살펴본 전형적인 풀이에서는 분수방정식 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$에 $(x-\alpha)(x-\beta)$를 곱하여 정리한 다음, 문제의 조건으로부터 α, β에 대한 관계식을 찾아, 근과 계수와의 관계를 이용하여 해를 구하였다.

이제 문제 4에 대한 2차적 정보를 종합을 통한 분석으로 추출하여, 문제를 해결하자. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_k}$과 같은 모양의 식들은 흥미로운 수학적 성질을 가진다. 가령 $p(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\times\times\cdots(x-\alpha_n)$라 하고 $\frac{p'(x)}{p(x)}$를 계산하면 $\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{x-\alpha_n}$ $=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_k}$가 된다. 즉 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_k}$을 $p(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$와 결합시켜(종합), 새로운 등식인 $\frac{p'(x)}{p(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_k}$을 분석할 수 있다(분석-종합을 통한 분석).

문제 4에서 α, β를 근으로 하는 방정식을 $p(x)$라 하면 분수방정식의 좌변 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}$을 $\frac{p'(x)}{p(x)}$로 나타낼 수 있다. 문제의 조건에 의해 $p(x)=x^2-4x+2$이고, $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}$ $=\frac{p'(x)}{p(x)}=\frac{2x-4}{x^2-4x+2}$가 된다. 그런데 조건에서 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$라 했으므로, $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=\frac{2x-4}{x^2-4x+2}=1$이다. 이로부터 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$은 $x^2-6x+6=0$이 되고, 구하는 두 근의 합은 6이 됨을 알 수 있다.

살펴본 풀이에서는 종합을 통한 분석에서 얻어진 2차적 정보를 바탕으로 $p(x)=x^2-4x+2$이면 $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=1$은 $x^2-6x+6=0$이 됨을 유도하여, 문제를 해결하였다.

일반적으로 $\frac{1}{x-\alpha_1}+\frac{1}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{x-\alpha_n}=k$꼴의 분수방정식에서 $p(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\times\cdots(x-\alpha_n)$라 놓으면 분수방정식은 방정식 $p'(x)=kp(x)$를 푸는 문제로 귀착된다. 특히 $p(x)$가 중근을 갖지 않으면 $p(x)$와 $p'(x)$는 공통근을 갖지 않으므로, 얻어진 다항방정식은 무연근을 가지지 않게 된다.

문제 5. 분수방정식 $\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x-1}$의 두 근의 합을 구하여라.

문제 5를 주어진 것과 구하는 것을 중심으로 분석하자. 주어진 것으로 $x-1$, $x-2$, $\frac{x-1}{x-2}$, $2x-1$, $x-1$, $\frac{2x-1}{x-1}$, $\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x-1}$, $\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x-1}$의 두 근을 분석할 수 있으며, 구하는 것은 $\frac{x-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x-1}$의 두 근의 합이다.

문제 5도 분수방정식을 해결하는 전형적인 방법을 이용하여 해를 구할 수 있다. 전형적인 해결방법의 기술은 생략하고, 종합을 통한 분석으로 2차적인 정보를 추출하여 얻을 수 있는 새로운 해결방법을 살펴보자.

문제 5의 분수방정식에서 좌변과 우변 모두의 분자와 분모가 x를 포함하는 일차식이며, 좌변의 분자와 우변의 분모에 있는 식이 같다. 그리고 좌변의 분모에 있는 식의 일차항 계수, 상수항이 각각 우변의 분자에 있는 상수항, 일차항의 계수와 같다. 이러한 관련성을 바탕으로(종합), 주어진 분수방정식에 대한 새로운 정보를 찾아낼 수 있다(종합을 통한 분석).

$y=\frac{x-1}{x-2}$라 하면, $y=\frac{2x-1}{x-1}$은 $y=\frac{x-1}{x-2}$의 역함수가 된다. $f(x)=f^{-1}(x)$인 것은 $f(x)=x$와 동치이므로, 주어진 분수방정식을 $\frac{x-1}{x-2}=x$라 놓을 수 있다. 이제 방정식 $\frac{x-1}{x-2}=x$으로부터 이차방정식 $x^2-3x+1=0$이 유도되며, 구하는 두 근의 합은 3이 됨을 알 수 있다.

문제 5의 분석에서는 분수방정식과 역함수 개념을 결합시켜, 주어진 문제에 대한 새로운 정보를 추출하였다. 1차적인 정보를 얻는 분석에서는 문제에서 직관적으로 주어진 정보들을 추출하였고, 이때 정보들의 순차적인 나열이 중요한 역할을 했다면, 2차적인 정보를 얻는 종합을 통한 분석에서는 주어진 문제와 관련된 이론적 지식들이 중요한 역할을 수행하게 된다. 이미 기술했듯이 2차적 정보들의 추출이 모든 학생들의 수학적 힘에 적합한 것은 아닐 것이기 때문에, 개인차를 고려한 수학 교수-학습의 한 방법으로 사용될 수도 있을 것이다.

문제 6. 무리방정식 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}=5$를 풀어라.

주어진 것과 구하는 것을 분석하면, 주어진 것으로 x, 1, -4, 5, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x-4}$, $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}$를 추출할 수 있으며, 구하는 것으로 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}=5$를 추출할 수 있다. 얻어진 1차적 정보들을 바탕으로 전형적인 풀이를 생각하자.

$\sqrt{x-4}$을 우변으로 이항하면, $\sqrt{x+1}=5-\sqrt{x-4}$이 되며, 양변을 제곱하여 정리하여, 구하는 해로 $x=8$을 얻을 수 있다.

이제 종합을 통한 분석을 이용하여 2차적 정보를 추출하고, 이를 바탕으로 새로운 풀이 방법을 찾아보자. 항 $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x-4}$의 제곱근호 안에 모두 1차식이 있으며, x항의 계수가 같다. 그러므로 각 항들을 제곱하여 제곱근호를 없애면(종합), 연립하여 새로운 등식을 얻을 수 있을 것이다(종합을 통한 분석). 즉 $a=\sqrt{x+1}$, $b=\sqrt{x-4}$라 하고, 각 식을 제곱하면 $a^2=x+1$, $b^2=x-4$가 되므로, $a^2-b^2=5$가 된다. 그리고 주어진 무리방정식을 $a-b=5$로 나타낼 수 있다. 이제 방정식 $a^2-b^2=5$와 $a-b=5$을 연립하면, $a=3$을 얻을 수 있다. 이로부터 $\sqrt{x+1}=3$이고 $x=8$이 된다.

문제 6에서 종합을 통한 분석으로 얻어진 새로운 무리방정식의 해법은 다음 문제 7과 같은 무리방정식에도 일반화시켜 적용할 수 있다.

문제 7. 무리방정식 $\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2+3x}=5$를 풀어라.

문제 6에서와 같이, $a=\sqrt{x^2+3x+5}$, $b=\sqrt{x^2+3x}$라 놓고 제곱하면, $a^2-b^2=5$를 얻을 수 있다. 이제 주어진 방정식을 $a-b=5$라 놓고 연립하면, 구하는 해를 얻을 수 있다.

문제 8. 무리방정식 $\sqrt{5-x}=5-x^2$을 풀어라.

문제 8을 분석하면, 주어진 것으로 5, x, $5-x$, $\sqrt{5-x}$, x^2, $5-x^2$을 추출할 수 있으며, 구하는 것으로 $\sqrt{5-x}=5-x^2$을 얻을 수 있다. 이제 전형적인 접근 방법으로 $\sqrt{5-x}=5-x^2$의 양변을 제곱하여 정리하면, $x^4-10x^2+x+20=0$가 된다. 이제 20의 약수를 대입하여 인수정리를 이용하자. 이러한 접근에서 방정식의 해가 20의 약수이면 문제를 해결할 수 있지만, 이 문제처럼 그렇지 않은 경우에는 학생들은 곤경에 빠지게 된다.

물론 기술한 것과 같은 1차적 정보의 분석은 모든 학생들에게 유익한 활동이 될 것이다. 학생들은 문제의 분석을 통해, Polya가 의도했듯이 문제를 이해하고 그 이후의 문제해결 활동으로 진행해 갈 수 있을 것이다. 정형적인 문제의 경우에는 1차적 정보의 분석이 후속적인 성공적인 문제해결에 중요한 역할을 할 수 있지만, 비정형적인 문제의 경우에는 그렇지 못한 경우가 많이 있다. 비정형적인 문제에서는 학생들이 종합을 통한 분석의 방법으로 문제로부터 추가적인 정보인 2차적 정보를 추출하고, 이를 바탕으로 문제해결을 위한 자신의 탐색 방향을 결정해야 한다.

이제 종합을 통한 분석을 이용하여 새로운 2차적 정보를 찾고, 이를 바탕으로 문제를 해결하자. 우선 $\sqrt{5-x}=5-x^2$에서 등식의 양변에 5가 공통적으로 있으며, 좌변에는 제곱근호 안에 5가 있고, 우변에는 제곱근호가 없다. 이러한 관계를 바탕으로, 양변을 제곱하면 5에 관한 이차식이 얻어질 수 있음을 알 수 있다.

5를 a로 치환하면 $\sqrt{a-x}=a-x^2$이다. 이제 양변을 제곱하여 a에 대하여 주어진 방정식을 정리하면 $a^2-(2x^2+1)a+x^4+x=0$이다. 얻어진 식은 a에 대한 2차방정식이므로, 근의 공식을

이용할 수 있다.

$$a=\frac{(2x^2+1)\pm\sqrt{(2x^2+1)^2-4(x^4+x)}}{2}=\frac{(2x^2+1)\pm(2x-1)}{2}$$

이로부터 $a=x^2+x$, $a=x^2-x+1$이다. $a=5$이므로, $x^2+x=5$ 또는 $x^2-x+1=5$이다. 이제 x에 대한 이차식에 근의 공식을 이용하면, 구하는 해를 얻을 수 있다.

한편 문제 8에 대한 다른 2차적 정보, 다른 해법을 종합을 통한 분석을 이용하여 얻을 수 있다. 방정식 $\sqrt{5-x}=5-x^2$의 좌변과 우변을 각각 함수와 역함수라는 측면에서 비교하면(종합), 좌변인 $y=\sqrt{x-5}$와 우변인 $y=5-x^2$는 서로 역함수의 관계가 된다(종합을 통한 분석).

어떤 함수와 그 역함수는 $y=x$에서 만나므로 $\sqrt{5-x}=x$를 풀면 쉽게 주어진 무리방정식의 해를 구할 수 있다. 이때 $y=5-x^2$의 역함수가 존재하는 영역만의 해가 구해지는 것에 유의해야 한다.

살펴본 바와 같이, 다양한 2차적 정보의 분석은 다양한 해결방법으로 연결될 수 있으며, 이러한 탐구활동은 학생들의 지적 유연성을 기르는데 중요한 역할을 할 수 있다.

문제 9. 다음 무리방정식을 풀어라.

$$\frac{7}{\sqrt{x^2-10x+26}+\sqrt{x^2-10x+29}+\sqrt{x^2-10x+41}}=x^4-9x^3+16x^2+15x+26$$

문제 9를 사칙연산과 제곱연산만을 써서 푸는 것은 길고 복잡한 계산을 해야 하므로, 아주 어려운 문제가 될 것이다. 문제 9에서 주어진 식들의 결합시켜(종합), 이들의 특징을 추출하고(종합을 통한 분석) 이를 이용하여 문제를 해결하자.

좌변에 있는 무리방정식의 분모에는 이차식 $x^2-10x+26$, $x^2-10x+29$, $x^2-10x+49$이 포함되어 있는데, 이들은 모두 $x=5$일 때 최솟값을 갖는다는 공통점을 가지고 있다. 이를 이용한풀이 방법을 살펴보자.

$$\frac{7}{\sqrt{x^2-10x+26}+\sqrt{x^2-10x+29}+\sqrt{x^2-10x+41}}=$$
$$\frac{7}{\sqrt{(x-5)^2+1}+\sqrt{(x-5)^2+2^2}+\sqrt{(x-5)^2+4^2}}$$

이다. $\frac{7}{\sqrt{(x-5)^2+1}+\sqrt{(x-5)^2+2^2}+\sqrt{(x-5)^2+4^2}}$에서 분모에 있는 식들 $\sqrt{(x-5)^2+1}$, $\sqrt{(x-5)^2+2^2}$, $\sqrt{(x-5)^2+4^2}$은 각각 $x=5$에서 1, 2, 4를 최솟값으로 가지므로, 얻어진 식 $\frac{7}{\sqrt{(x-5)^2+1}+\sqrt{(x-5)^2+2^2}+\sqrt{(x-5)^2+4^2}}$의 최댓값은 1이다.

이제 주어진 무리방정식의 우변의 최댓값, 최솟값을 생각하자. $x^4-9x^3+16x^2+15x+26$은 최솟값을 가지므로, 최솟값을 조사하여 1보다 크면, 주어진 무리방정식은 해를 가지지 않는다는 결론을 얻을 수 있다. 식 $x^4-9x^3+16x^2+15x+26$을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$x^4-9x^3+16x^2+15x+26=(x^2+x+1)(x-5)^2+1 \geqq 1$$

즉 $x=5$에서 최솟값 1을 가진다. 결국 주어진 무리방정식의 좌변과 우변은 $x=5$에서 같은 값을 가지므로, $x=5$는 무리방정식의 근이 된다. 한편 무리방정식의 좌변은 $x=5$이외의 점에서는 항상 1보다 작은 값을 가지며, 우변은 1보다 큰 값을 가진다. 결국 $x=5$가 주어진 무리방정식의 유일한 해가 됨을 알 수 있다.

살펴본 바와 같이, 문제의 이해단계에서의 분석은 주어진 정보들의 나열만으로 충분한 것은 아니다. 문제해결자는 주어진 문제에서 자신이 가진 수학적 지식, 탐구능력을 바탕으로 종합을 통한 분석의 방법을 이용하여 다양한 형태의 추가적인 정보, 즉 2차적 정보를 추출해야 한다. 이러한 2차적 정보는 비정형적인 문제에 대한 탐색 방향의 설정, 효과적인 탐색의 수행에서 중요한 역할을 한다.

5. 결 론

수학 문제해결 교육은 교육과정을 개편할 때마다 지속적으로 강조되고 있는 수학 교수-학습의 핵심 개념들 중의 하나이다. 본 연구는 2007개정 교육과정의 문제해결 교육에서 강조하는 창의적인 탐구, 문제해결에 관련된 문헌연구로, 본 연구에서는 문제의 이해를 위해 수행하는 분석활동의 본질 및 유형을 문헌연구를 통해 고찰하였으며, 구체적인 방정식 문제들을 분석하고, 분석을 통해 얻어진 정보들을 활용해 다양하고 비정형적인 문제해결의 방법들을 제시하였다.

문제해결 단계 중에서 문제의 이해와 관련하여, 분석은 주어진 문제를 구성하는 부분들, 요소들로 분해하는 사고조작, 주어진 문제에서 개별적인 징표들, 속성들, 성질들, 측면들, 연결 및 관련성들을 추출하는 사고조작을 의미하며, 문제를 주어진 것과 구하는 것으로 구분하여 상응하는 요소들을 추출하는 것도 분석의 한 형태가 된다.

분석을 통해 문제에서 명시적으로 기술된 정보들을 직접적으로 추출할 수 있는데, 이러한 정보를 1차적 정보라 할 수 있다. 한편 분석의 한 형태로, 루빈슈타인은 종합을 통한 분석을 개념화했다. 종합을 통한 분석에서 어떤 대상은 새로운 관계들, 개념들 속에 포함되는데(종합), 이때 그 대상은 새로운 관계들, 개념들 속에서 새로운 특성을 드러낸다. 그리고 이 특성(2차적 정보)의 추출이 바로 종합을 통한 분석이다. 종합을 통한 분석의 방법으로, 문제에서 주어진 정보들은 서로 결합되어 새로운 정보, 새로운 성질을 생성하며, 이들 정보를 기반으로 문제해결자에게 문제해결의 새로운 방향, 새로운 해법의 가능성을 가지게 된다.

본 연구에서는 고등학교 수준에서 다루어지는 다양한 방정식들에 대해 분석, 종합을 통한 분석을

통해 1차적 정보, 2차적 정보를 구체적으로 추출하였다. 이때 1차적 정보의 추출은 주로 전형적인 풀이방법과 연결되며, 2차적 정보의 추출은 새로운 창의적 문제해결 방법과 연결될 수 있음을 보였다. 특히 본 연구에서는 이들 방정식에 대한 새로운 풀이 방법을 몇 가지 제시하였다.

본 연구를 통해 얻어진 결과들은 고등학교의 수학교실에서 방정식 단원의 다양한 해법찾기 활동에 관련된 기초자료가 될 수 있을 것이며, 문제의 이해를 위한 분석 활동, 문제해결의 탐색 수행, 문제해결 사이에 존재하는 긴밀한 연결성을 구체적인 예를 통해 밝힐 수 있을 것으로 기대된다. 특히 본 연구에서 얻어지는 구체적인 분석 방법 및 문제해결 방법들은 학생들의 개인차를 고려한 수학교실에서 교수-학습 자료로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강현영 (2007). 패턴탐구를 통한 일반화와 기호표현 -시각적 패턴을 중심으로-, 학교수학 **9(2)**, 313-326.

고상숙 · 전성훈 (2009). 방정식의 문제 만들기 활동에서 문제구조를 중심으로 문제해결에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **23(1)**, 109-128.

교육인적자원부 (2008). 고등학교 교육과정 해설, 서울: 교육인적자원부.

권오남 · 방승진 · 송상헌 (1999). 중학교 수학 영재아들의 다답형 문항 반응 특성에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **38(1)**, 37-48.

김남희 (1997). 일반화의 의미와 구성에 대한 이해, 대한수학교육학회논문집 **7(1)**, 445-458.

김선유 (1995). 문제해결의 전략과 평가 방안, 대한수학교육학회논문집 **5(1)**, 79-89.

김준겸 · 임문규 (2001). 문제 상황 제시에 따른 문제만들기 활동이 문제해결력에 미치는 영향, 한국초등수학교육학회지 **5(1)**, 77-98.

방승진 · 이상원 · 황동주 (2001). 소집단 토의학습을 통한 Polya의 문제해결 전략을 이용한 문장제 지도 방안-중학교 중심, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **11**, 201-233.

성인서 (1987). 교사 · 학생이 수학 문제해결에서 사용하는 전략에 관한연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **26(1)**, 9-13.

양은경 · 황우형 (2005). 수학 학습유형과 문제해결 전략, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **44(4)**, 565-586.

양인환 (1990). 산수과 문제해결의 Strategy에 대하여, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **29(1)**, 7-16.

유익승 (2010). 수학적 문제해결 과정에서 문제 정보의 분석과 활용에 관한 연구, 경상대학교 박사학위논문.

정동권 · 김수미 · 김지원 (2009). 수학 문제해결 지도의 이해, 서울: 학지사.

한인기 (2006). 수학교육학의 기초와 실제, 경남: 경상대출판부.
한인기 · 꼴랴긴 (2006). 문제해결의 이론과 실제, 서울: 승산.
한인기 · 꾸쉬니르 (2008). 뇌를 자극하는 수학공부, 서울: 경문사.
Krulik S., & Rudnick J. (1987). *Problem Solving: A Handbook for Teachers*, Boston: Allyn and Dacon, Inc.
Krutetski V. A. (1968). *Psihologiya matematicheskih sposobnoctei shkolnikov*, Moskva: Prosveshenie.
Lenchner G. (1983). *Creative Problem Solving in School Mathematics*, Boston: Houghton Mifflin Company.
Polya G. (2005). 어떻게 문제를 풀 것인가? (우정호 역). 서울: 교우사. (원전 1971년 출판).

A Study on Analyzing and Solving Problems Related with Equation of High School Mathematics

Lyou, Ikseung
Jeonju High School, 560-862, Korea
E-mail : infgrp@hanmail.net

Han Inki[2)]
Dept. of Math. Edu., Gyeongsang National University, 660-701, Korea
E-mail : inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we study meaning and methods of analyzing problems related with equation of high school mathematics. By analyzing problem we can get two types of informations. Based on these informations we suggest some problem solving methods. Especially we try to extract second type information using analysis through synthesis. This second type information can help us to find new non-routine problem solving method.

---

* ZDM Classification : C34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : analysis, analysis through synthesis, equation, problem solving
2) correspondent author