

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2010.34.4.487

탄성체 경계 트랙션을 구하는 문제에서 상호 수직 기저 함수를 사용한 역문제 해석 방법의 개발

김 사 영* · 김 현 규**†

* 서울산업대학교 에너지환경대학원, ** 서울산업대학교 기계공학과

Development of an Inverse Method Using Orthogonal Basis Functions for the Evaluation of Boundary Traction on an Elastic Body

Sa-Young Kim* and Hyun-Gyu Kim**†

* The graduate school of Energy & Environment, Seoul Nat'l Univ. of Technology,

** Dept. of Mechanical Engineering, Seoul Nat'l Univ. of Technology

(Received December 29, 2009 ; Revised February 18, 2010 ; Accepted February 23, 2010)

Key Words: Finite Element Method(유한요소법), Inverse Problem(역문제), Pseudo-inverse Matrix (유사 역행렬)

초록: 대부분의 구조해석 문제는 외부에서 주어진 하중에 대한 변형과 응력에 관심을 두고 있지만 많은 경우에서 표면 또는 내부에 주어진 응력이나 트랙션을 구하는 역문제 해석이 필요하게 된다. 본 연구에서는 구하고자 하는 트랙션에서 멀리 떨어진 영역의 변위를 측정하여 미지의 트랙션을 평가하는데 유한요소법을 사용한 역문제 수식화를 적용하였다. 일반적으로 역시스템의 불안정으로 인하여 측정 변위의 작은 오차는 해석 결과에 큰 영향을 주게 된다. 이와 같은 역시스템의 불안정성을 개선하기 위하여 본 연구에서는 구하고자 하는 트랙션에 가까운 단면의 변위를 Gram-Schmidt 수직화 기법을 통한 수직 기저함수 사용하여 예측하고 보다 안정된 역문제를 해석하는 방법을 개발하였고 장점들을 수치 예제를 통하여 보여주었다.

Abstract: Most structural analyses are concerned with the deformations and stresses in a body subjected to external loads. However, in many fields, inverse problems have to be interpreted to determine surface tractions or internal stresses from displacements measured on a remote surface. In this study, the inverse processes are studied by using the finite element method for the evaluation of internal stresses. Small errors in the measured displacements often result in a substantial loss of stability of an inverse system. In order to improve the stability of the inverse system, the displacements on a section near the region of the unknown tractions are predicted by using orthogonal basis functions. We use the Gram-Schmidt orthogonal technique to determine two bases for the displacements on a section near the region of the unknown tractions. Advantages over previous methods are discussed by using numerical examples.

1. 서 론

대부분의 구조해석 문제는 주어진 경계조건과 하중조건에 대한 변형과 응력을 해석하는 문제인데, 반대로 일부분의 변위를 측정하여 표면이나 내부의 응력 또는 트랙션(traction)을 평가해야 하는 역문제(inverse problems)를 정의할 수 있게 된다. 이와 같이 일부 영역의 변위를 측정하여 미지의 트랙션을 구하는 공학적 문제가 자주 나타

나게 되는데, 대표적으로 구조물 내부의 잔류응력을 구하기 위하여 역문제 해석이 요구되게 된다. 구조물의 경계에서 변위를 측정하는데 필연적으로 측정 오차가 발생하게 되고 역시스템의 불안정성으로 인하여 평가되는 응력이나 하중에 큰 영향을 줄 수 있게 된다. 그러므로 내부의 응력이나 하중을 평가하기 위하여 효율적인 역문제 해결 방법이 절실히 요구되고 있다.

기계 부품들의 내부에 과도한 잔류응력이 남아 있으면 부품의 피로 내구성의 저하와 더불어 제품 개발기간이 오래 걸릴 수 있다. 물체 내부의 잔류응

† Corresponding Author, khg@snut.ac.kr

력을 알아내기 위한 방법 중에는 구멍 주위의 국부적인 잔류응력을 알아내는 응력이완법의 일종인 구멍 뚫기 방법⁽¹⁾이 있고 X선을 사용하여 표면의 대략적인 잔류응력을 알아내는 방법⁽²⁾이 있는데 내부의 전체적인 잔류응력을 구해내는 것은 여전히 어려운 문제로 남아있는 실정이다. 잔류응력이 존재하는 물체를 절단하고 여기서 유발되는 다른 일부 영역의 변위를 측정하여 절단면의 트랙션을 구하는 역문제를 효율적으로 해결 할 수 있으면 고체 내부의 잔류응력을 평가하는 혁신적인 방법이 될 것이다. 측정된 변위를 사용하여 표면 트랙션을 역유한 요소법으로 구하는 연구들^(3,4)이 수행되었다. 역문제 해석에서 측정 변위의 작은 오차가 결과에 큰 영향을 주는 불안정이 발생하게 되는데 역시스템의 ill-posedness로 인하여 나타나게 된다. 역시스템의 불안정성을 개선하기 위하여 일반적으로 Tikhonov 또는 truncated SVD(singular value decomposition) 정규화(regularization) 방법이 사용되게 된다. 대각 정규화 방법과 반복 과정을 통해 역유한요소를 사용한 방법이 제시 되었다.⁽⁵⁾ 정규화 방법의 도입은 역시스템을 안정하게 만들 수 있지만 역문제를 왜곡시켜서 원하지 않는 결과를 줄 수 있게 된다. 최근에 국부적인 탄성체 표면의 변위를 측정하여 유한요소를 이용한 방법들이 제시되고 있다.⁽⁶⁾ 특히, 측정 변위로 부터 경계 트랙션을 구하는 문제는 정규화 방법을 적용 하여 개선하는 것은 한계가 있고 측정 위치의 선정이 중요하다는 것을 알 수 있다.⁽⁷⁾ 탄성체 표면의 트랙션을 평가하는 안정적인 방법이 개발이 되어 측정/해석 과정의 표준화가 이루어진다면 산업계 전반에 큰 영향을 줄 수 있을 것으로 기대한다.

본 연구에서는 탄성체 내부 단면의 트랙션을 보다 안정적으로 평가하기 위하여, 알고자 하는 트랙션과 거리가 있는 표면 변위를 측정하고 구하고자 하는 트랙션 근처의 변위를 예측하고 Gram-Schmidt 직교화를 이용하여 상호 수직한 기저 함수를 사용하여 역문제를 해석하였다. 변위 측정은 ARAMIS 장비를 사용하여 3차원 변위를 적용하였으며 본 연구에서 제시하는 역문제 해석 방법의 결과를 기존 방법의 결과와 비교하였다. 본 연구에서 제안하는 방법은 기존의 방법에 비하여 상당히 안정적인 결과를 보여주고 있다.

2. 이 론

2.1 역문제의 이론적 배경

선형탄성 문제의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

여기서 Ω 는 고체 영역이고 Γ 는 경계이며 σ_{ij} 는 응력, λ 와 μ 는 Lamé 상수이다. 주어진 경계 조건은 다음과 같다.

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } \Gamma_u \quad (4)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \text{ in } \Gamma_t \quad (5)$$

여기서 Γ_u 와 Γ_t 는 변위와 트랙션이 주어진 경계를 나타낸다. 역문제의 중요한 목표는 트랙션이 주어진 경계의 일부 $\Gamma_c \in \Gamma_t$ 에서 다른 부분 $\Gamma_m \in \Gamma_t$ 의 변위를 측정하여 구하는 것이다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^m(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_m \quad (6)$$

여기서 $\Gamma_c \cap \Gamma_m = \emptyset$ 이다. Fig. 1에 변위를 측정하는 영역 Γ^m 와 구하고자 하는 하중 영역 Γ^c 을 보여주고 있다. 기본적으로 역문제의 이론해는 다음과 같은 적분방정식으로 나타나게 된다.

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}) = \int_{\Gamma_c} \mathbf{G}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) \mathbf{t}(\mathbf{x}) dS \quad (7)$$

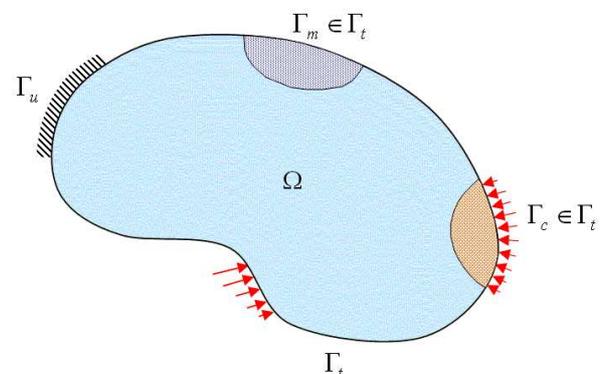


Fig. 1 Schematics of inverse problems

여기서 $\mathbf{z} \in \Gamma_m$ 이고 $\mathbf{G}(\mathbf{z}, \mathbf{x})$ 는 kernel 함수이다.

위의 식은 Fredholm의 적분방정식으로 하중이 단지 Γ_c 에서만 주어지는 경우에 유효하게 된다. 식 (7)과 같은 적분 방정식을 해석적으로 구하는 것은 거의 불가능하므로 수치적인 방법을 도입하게 된다.

2.2 역유한요소 수식화

전체 해석 영역을 유한요소 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (8)$$

여기서 \mathbf{K} 는 전체 강성행렬(stiffness matrix)이고 \mathbf{u} 는 절점 변위, \mathbf{f} 는 절점하중이다. 측정 면 Γ_m 과 트랙션을 평가하고자 하는 면 Γ_c 의 변위를 $\mathbf{u}^m \in \mathbb{R}^m$ 와 $\mathbf{u}^c \in \mathbb{R}^n$ 로 나타내고 그 외의 변위를 \mathbf{u}^r 로 나타내면 식 (8)을 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rm} & \mathbf{K}_{rc} \\ \mathbf{K}_{mr} & \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{mc} \\ \mathbf{K}_{cr} & \mathbf{K}_{cm} & \mathbf{K}_{cc} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^r \\ \mathbf{u}^m \\ \mathbf{u}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^r \\ \mathbf{f}^m \\ \mathbf{f}^c \end{pmatrix} \quad (9)$$

식 (9)에서 \mathbf{K}_{rr} 의 역행렬을 구할 수 있으므로 다음과 같이 축약하여 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{mm} & \bar{\mathbf{K}}_{mc} \\ \bar{\mathbf{K}}_{mc}^T & \bar{\mathbf{K}}_{cc} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^m \\ \mathbf{u}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}}^m \\ \bar{\mathbf{f}}^c \end{pmatrix} \quad (10)$$

여기서

$$\bar{\mathbf{K}}_{mm} = \mathbf{K}_{mm} - \mathbf{K}_{mr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}_{rm} \quad (11a)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{mc} = \mathbf{K}_{mc} - \mathbf{K}_{mr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}_{rc} \quad (11b)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{cc} = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{cr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{K}_{rc} \quad (11c)$$

$$\bar{\mathbf{f}}^m = \mathbf{f}^m - \mathbf{K}_{mr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{f}^r \quad (11d)$$

$$\bar{\mathbf{f}}^c = \mathbf{f}^c - \mathbf{K}_{cr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{f}^r \quad (11e)$$

위에서 $\bar{\mathbf{K}}_{mm}$ 와 $\bar{\mathbf{K}}_{cc}$ 는 각각 $m \times m$ 와 $n \times n$ 의 대칭 행렬이고 $\bar{\mathbf{K}}_{mc}$ 는 $m \times n$ 의 사각형 행렬이다.

식 (10)과 같은 역문제의 해는 Moore-Penrose 유사(pseudo) 역행렬⁽⁸⁾을 일반적으로 적용하게 된다.

$$\mathbf{u}^c = \bar{\mathbf{K}}_{mc}^+ (\bar{\mathbf{f}}^m - \bar{\mathbf{K}}_{mm} \mathbf{u}^m) \quad (12)$$

여기서

$$\bar{\mathbf{K}}_{mc}^+ = (\bar{\mathbf{K}}_{mc}^T \bar{\mathbf{K}}_{mc})^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{mc}^T \quad \text{for } m > n \quad (13)$$

측정 변위가 구하고자 하는 하중보다 많은 $m > n$ 의 경우는 다음과 같은 최소화 문제의 결과와 같게 된다.

$$(\mathbf{u}^c)_{LS} = \arg \min_{\mathbf{u}^c \in \mathbb{R}^n} \|\bar{\mathbf{K}}_{mm} \mathbf{u}^m + \bar{\mathbf{K}}_{mc} \mathbf{u}^c - \bar{\mathbf{f}}^m\| \quad \text{for } m > n \quad (14)$$

위의 식에서 Moore-Penrose 유사 역행렬은 $\bar{\mathbf{K}}_{mc} \mathbf{u}^c$ 이 최소자승의 개념으로 $\bar{\mathbf{f}}^m - \bar{\mathbf{K}}_{mm} \mathbf{u}^m$ 에 가장 근접한 해를 구하게 된다. 구하고자 하는 트랙션은 식 (12)를 식 (10)에 대입하여 다음과 같이 나타내게 된다.

$$\mathbf{f}^c = (\bar{\mathbf{K}}_{mc}^T - \bar{\mathbf{K}}_{cc} \bar{\mathbf{K}}_{mc}^+ \bar{\mathbf{K}}_{mm}) \mathbf{u}^m + \bar{\mathbf{K}}_{cc} \bar{\mathbf{K}}_{mc}^+ \bar{\mathbf{f}}^c + \mathbf{K}_{cr} \mathbf{K}_{rr}^{-1} \mathbf{f}^r \quad (15)$$

식 (15)의 오른쪽 항에서 첫 번째 항은 측정 변위와 구하고자 하는 트랙션의 관계를 나타내는 민감성 행렬(sensitivity matrix)이 된다. 또한 나머지 영역의 변위는 다음과 같이 나타나게 된다.

$$\mathbf{u}^r = \mathbf{K}_{rr}^{-1} (\mathbf{f}^r - \mathbf{K} \mathbf{u}^m - \mathbf{K}_{rc} \mathbf{u}^c) \quad (16)$$

결과적으로 식 (15)와 식 (16)은 측정된 변위를 사용하여 구하고자 하는 트랙션과 변위를 얻는 최종적인 관계식이 된다.

2.2 Tikhonov 정규화(regularization)

Tikhonov 정규화 방법은 다음과 같이 최소화 하는 문제가 된다.

$$(\mathbf{u}^c)_\alpha = \arg \min [\|\bar{\mathbf{K}}_{mm} \mathbf{u}^m + \bar{\mathbf{K}}_{mc} \mathbf{u}^c - \bar{\mathbf{f}}^m\|^2 + \alpha \|\mathbf{u}^c\|^2] \quad (17)$$

여기서 α 는 정규화 변수이다. 식 (17)을 적용하면 유사 역행렬은 다음과 같다.

$$\bar{\mathbf{K}}_{mc}^+ = (\bar{\mathbf{K}}_{mc}^T \bar{\mathbf{K}}_{mc} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{K}}_{mc}^T \quad (18)$$

정규화 변수는 $\| \bar{K}_{mm} \mathbf{u}^m + \bar{K}_{mc} \mathbf{u}^c - \bar{\mathbf{f}}^m \|$ 이 최소화 되고 또한 $\| \mathbf{u}^c \|$ 이 최소화를 위한 균형이 되도록 선정해야 하는데, 일반적으로 α 가 크게 되면 역시스템의 condition은 좋아지지만 왜곡된 결과를 주게 된다. 따라서 역시스템의 condition을 향상시키며 최적의 정규화 변수를 설정하는 것이 중요하다. 일반적으로 최적의 정규화 변수는 L-곡선을 구성하여 결정하게 된다.⁽⁹⁾

3. 상호 수직 기저함수를 사용한 역문제 해석 방법

참고문헌(Kim and Lee, 2009)⁽⁷⁾에서 자세히 언급한 바와 같이 기존의 역문제에서 측정 위치와 트랙션을 구하고자 하는 면이 거리가 먼 경우 안정되지 않은 값을 얻게 된다. 하지만 구하고자 하는 트랙션에서 가까운 영역의 변위를 측정하게 되면 상대적으로 안정된 결과를 얻을 수 있게 된다. 본 연구에서는 측정면의 정보를 이용하여 트랙션을 평가하고자 하는 면에서 가까운 단면의 변위를 예측하여 안정된 역문제 해석 방법을 제시하고자 한다. 평가하고자 하는 트랙션에 가까운 단면의 변위에 대한 수직 기저(orthogonal basis)를 Gram-Schmit 수직화 방법을 사용하여 선정하였고 측정 변위와 오차가 최소화되는 수직 기저의 선형 결합을 구하여 역문제를 해석하였다. 측정된 변위를 이용하여 직접 역문제를 해석하는 것 보다, 미지의 트랙션 근처의 변위를 사용하여 역문제를 해석하는 것이 역시스템을 상당히 안정하게 만들게 된다.

구하고자 하는 트랙션 근처의 단면 영역 S_s 에서의 두 개의 상호 수직 변위 ϕ_1^s 와 ϕ_2^s 의 선형 결합을 사용한 역문제를 나타내면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}^c = \Phi_\alpha(\beta_1 \phi_1^s + \beta_2 \phi_2^s) \tag{19}$$

$$\Phi_\alpha(\mathbf{u}^s) = \min_{\mathbf{u}^c} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^s - \mathbf{B} \mathbf{u}^c\|^2 \right\} \tag{20}$$

여기서 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ 은 식 (7)의 convolution을 대표하는 선형 함수이고, 변위 공간 S_s 에서의 기저 수직 변위를 $\phi_1^s \in \mathbb{R}^k$, $\phi_2^s \in \mathbb{R}^k$ 로 나타내었다. 식 (20)

은 역유한요소법에서 식 (14)와 같은 의미를 갖게 된다.

본 연구에서 구하고자 하는 트랙션 근처의 단면 S_s 의 변위는 순(forward)와 역(inverse) 해석을 통하여 예측하게 된다. 우선 Γ_m 에서 측정된 변위를 경계조건으로 적용한 순(forward) 해석을 통해 근접한 위치의 변위를 예측하였다.

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_1, \mathbf{f}^c = 0 \tag{21}$$

식 (21)에서 도출된 S_s 에서의 변위로 역문제를 풀어보면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_1^c = \Phi_\alpha(\mathbf{u}_1^s) \tag{22}$$

본 연구에서 변위 \mathbf{u}_1^s 가 S_s 영역에서 첫 번째 상호 수직 기저 벡터가 된다. 두 번째로 측정된 Γ_m 의 \mathbf{u}^m 과 앞서 구한 S^s 의 $\mathbf{u}_1^s \in \mathbb{R}^k$ 를 이용하여 S_s 영역의 새로운 변위를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{u}_2^c = Z_\alpha(\mathbf{u}_1^{s+m}) \tag{23}$$

$$Z_\alpha(\mathbf{u}^{s+m}) = \min_{\mathbf{u}^s} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{s+m} - \mathbf{C} \mathbf{u}^c\|^2 \right\} \tag{24}$$

여기서 $\mathbf{u}_1^{s+m} = \mathbf{u}_1^s \cup \mathbf{u}_m$ 은 두 개 변위 영역의 합이고 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(k+m) \times n}$ 는 convolution을 대표하는 선형 함수이다. 변위 \mathbf{u}_1^s 와 \mathbf{u}^m 를 사용한 역 시스템은 측정된 변위 \mathbf{u}^m 만을 이용한 역 시스템 보다 상당히 안정적이다. 결과적으로 식 (23)의 역문제는 측정 변위와 식 (22)의 첫 번째 예측 변위를 사용한 두 번째 예측 변위를 구하게 된다. 여기서 구해진 Γ_c 의 \mathbf{t}_2 를 순(forward) 문제로 풀어서 \mathbf{u}_2^s 를 구해낸다. Fig. 2에 식 (22)과 식 (24)의 순(forward)문제와 역문제 해석을 통하여 구해지는 S_s 에서의 변위를 도식적으로 보여 주고 있다. 최종적으로 Gram-Schmidt 직교화를 이용하여 두 개의 수직 변위 ϕ_1^s 와 ϕ_2^s 를 구할 수 있게 된다.

$$\phi_1^s = \mathbf{u}_1^s \tag{25}$$

$$\phi_2^s = \mathbf{u}_2^s - \frac{\mathbf{u}_2^s \cdot \mathbf{u}_1^s}{\mathbf{u}_1^s \cdot \mathbf{u}_1^s} \mathbf{u}_1^s \tag{26}$$

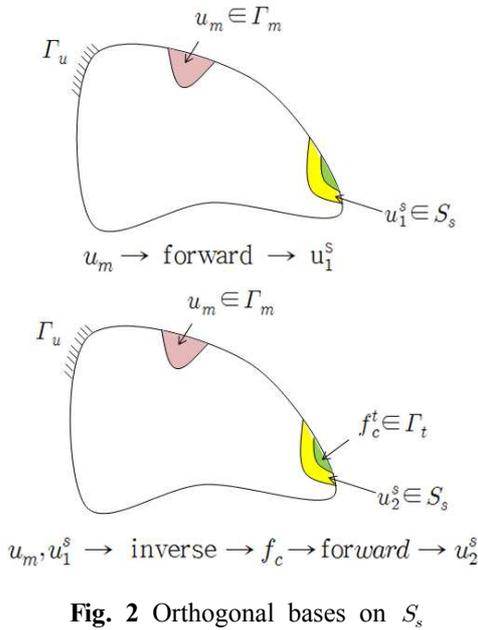


Fig. 2 Orthogonal bases on S_s

본 연구에서는 구하고자 하는 트랙션과 가까운 단면의 변위를 식 (25)와 식 (26)의 상호 수직인 변위의 조합을 사용하여 구하게 된다. 결과적으로 식 (19)의 역문제로 풀어서 얻어진 경계면 트랙션으로 순(forward) 문제를 풀어서 얻은 변위와 측정된 변위의 오차가 가장 작게 되는 값들로 선정이 된다.

$$(\beta_1, \beta_2) = \min_{\hat{u}^m} \|\hat{u}^m - u^m\| \quad (27)$$

여기서 \hat{u}^m 은 식 (17)에서 구한 트랙션을 적용하였을 때 측정 위치의 변위이다. 이렇게 구해진 β_1 과 β_2 으로 알고자 하는 트랙션 면에서 가장 가까운 최종 변위 u^s 를 구하여 역문제를 해석하고 트랙션을 구하게 된다.

4. 변위 측정과 역문제 해석 결과

본 연구에서는 시편의 강제 운동을 줄이기 위해 Fig. 3과 같이 아래 면을 고정하기 위한 구멍과 한쪽 면에 일정한 틈을 가공한 시편을 제작하여 하중을 부여하고 일부 면의 변위를 측정하였다. 측정된 변위 데이터를 이용하여 역문제를 해석하고 내부 단면의 트랙션을 평가하였다.

4.1 변위 측정

역문제 해석을 위한 시편의 재료는 알루미늄 재

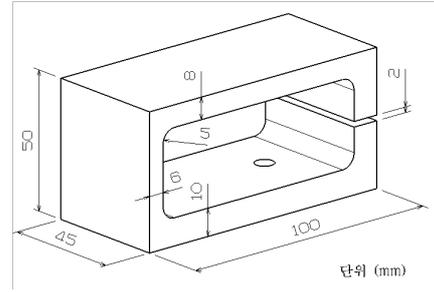


Fig. 3 Specimen specification

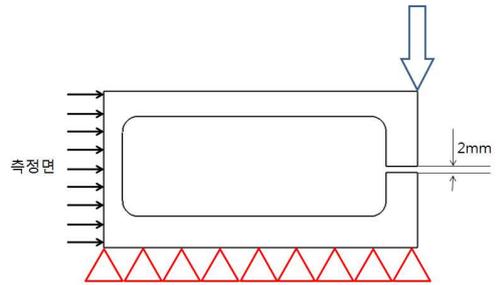


Fig. 4 Boundary conditions

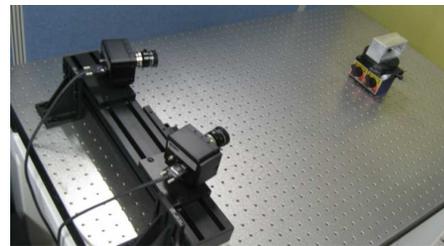


Fig. 5 Measurement system with ARAMIS

질이고 탄성계수 $E=71700$ Mpa과 푸아송 비 $\nu=0.33$ 이다. Fig. 3과 같은 형태의 시편을 제작하여 Fig. 4와 같이 시편 아래는 모두 구속하고 시편의 윗면 끝부분을 벌어진 틈만큼 변위하중을 아래로 부여하였다. 하중을 부여하는 위치의 반대편 면에서 변위를 측정하여 역문제 해석의 측정값 데이터로 활용하였다.

변위 측정으로 ARAMIS 장비를 이용하였는데 ARAMIS는 3차원 변위 측정 장비로서 두 개의 렌즈를 이용하여 측정면의 변위를 계측하여 3차원 측정면의 위치, 변위, 변형률 등을 측정할 수 있다. Fig. 5에 ARAMIS 장비를 사용한 측정 모습을 보여주고 있다. Fig. 6은 상단에 측정면, Γ_m 의 변위를 나타내고 있으며 하단에 두 개의 렌즈에서 하나씩 촬영된 화면을 보여주고 있다.

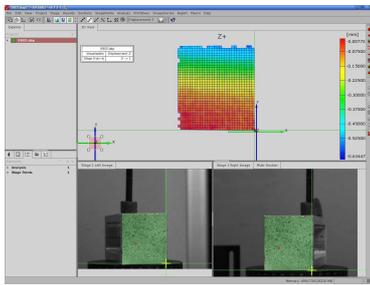


Fig. 6 Displacements measured by ARAMIS

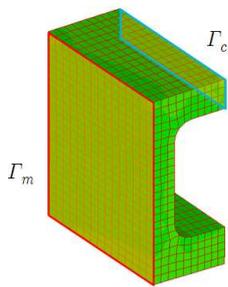


Fig. 7 Definition of Γ_m and Γ_c

본 실험에서는 이 화면에 나타난 측정 변위를 이용하여 역문제 해석에 사용하였다. Fig. 7과 같이 변위를 측정하는 면과 내부 단면의 트랙션을 예측하는 면을 선정하여 순(forward) 문제와 역문제를 해석하여 결과를 비교하였다.

4.2 역문제 해석 결과

Fig. 7과 같은 해석 모델을 사용하여 시험편 내부의 단면 Γ_c 의 트랙션을 Γ_m 에서 측정된 변위를 적용하여 역문제를 해석하였다. Fig. 8(a)는 시험과 동일한 경계조건을 사용하여 구조물을 해석하고 응력 σ_{33} 을 보여주고 있는데 역문제 해석을 통하여 구한 단면 Γ_c 의 트랙션을 부여한 해석 결과와 비교하였다. 역문제 해석은 앞에서 설명한 역유한요소법을 적용한 기존의 방법과 본 연구에서 제시하는 상호 수직기저 함수를 이용한 역해석 방법을 적용하였다. Fig. 8(b)는 역유한요소법을 기존의 역문제 해석 기법을 적용하여 얻은 결과로 Tikhonov 정규화 변수는 Fig. 9와 같이 L-곡선을 구성하여 결정하였는데 $\alpha = 1.0 \times 10^2$ 을 선정하여 적용하였다. L-곡선 방법에서는 곡선의 모서리 지점 근처를 선정하게 된다. 정규화 변수는 식 (17)의 구속 조건과 유사 역행렬의 특이값

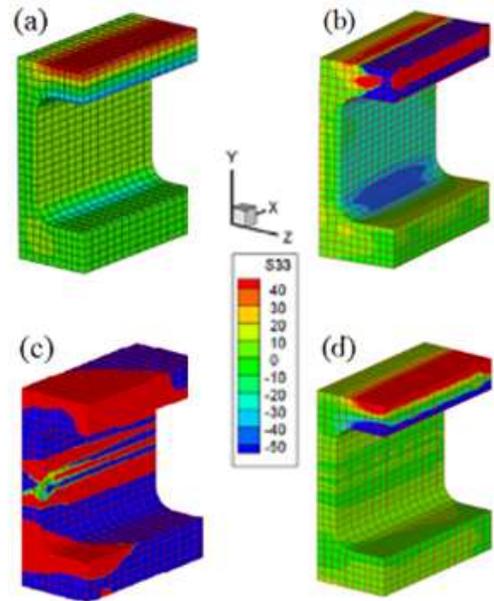


Fig. 8 Stress(σ_{33}) distributions: (a) forward results, (b) inverse results using FEM displacements (the previous method), (c) inverse results using measured displacements (the previous method), and (d) inverse results using measured displacements (the present method)

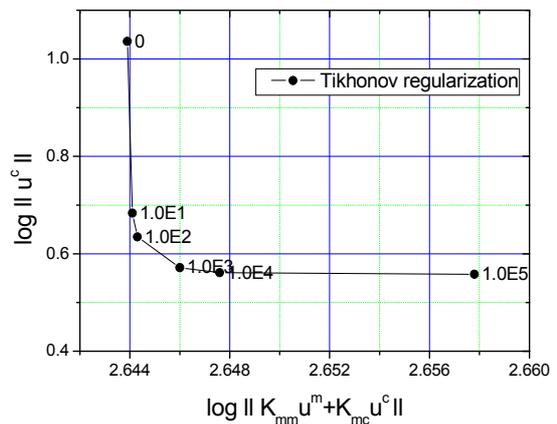


Fig. 9 L-curve for selecting the Tikhonov regularization parameter

필터링 효과에 의한 역해석 결과의 왜곡이 균형을 이루는 값을 선정해야 하는데 일반적으로 Fig. 9와 같은 L-곡선 방법을 사용하게 된다. Fig. 8(b)는 측정 변위를 유한요소 순(forward) 해석에서 얻은 변위를 적용하였고 Fig. 8(c)는 ARAMIS를 사용하여 측정된 변위를 적용하였으며 모두 동일한 정규화 변수를 적용하였다. 기존의 역문제 해

석 방법을 적용하는데 정규화 방법을 적용하여 얻은 결과는 정규화 하지 않은 결과보다는 안정화 되었지만 Fig. 8(a)와 같이 많은 차이를 보여주고 있다. 하지만 본 연구에서 제시하는 역문제 해석 방법을 적용하면 Fig. 8(d)와 같이 상대적으로 안정된 결과를 얻었는데 구하고자 하는 트랙션에 가까운 영역의 변위를 예측하여 적용하게 되므로 역시스템이 안정된 결과를 보여주고 있다. 결과적으로 본 연구에서 제시하는 방법을 사용하면 기존의 역문제 해석 방법에 비하여 안정되고 정확한 결과를 얻을 수 있게 된다.

5. 결론

본 논문에서는 기존의 유한요소법을 사용한 역문제 해석에서 발생하는 불안정성을 개선하기 위하여 구하고자 하는 트랙션에 가까운 영역의 변위를 상호수직인 기저함수들로 근사하는 새로운 방법을 제시하고 있다. 기존의 역해석 방법을 적용하는데 안정적인 결과를 얻기 위해서는 구하고자 하는 트랙션 근처의 변위를 측정해야 하는 어려움이 있게 된다. 본 연구에서는 측정 변위를 직접 적용한 순(forward) 해석의 결과와 측정 변위와 순(forward) 해석으로 예측된 변위를 적용한 역문제 해석 결과를 사용하여 상호 수직인 기저함수들을 선정하였다. 결과적으로 알고자 하는 트랙션에서 가까운 영역에서 변위를 사용하여 안정된 역시스템을 구성할 수 있게 되며 기존의 역해석 방법에 비하여 상당히 안정적인 결과를 얻을 수 있게 된다. 본 연구를 바탕으로 구조물 내부의 잔류응력을 평가하는 방법이 정립되면 다양한 대상으로 확대 적용 될 수 있을 것이며 구조물 내부 강도 평가 및 해석에 활용될 수 있을 것이다.

후 기

이 논문은 2008년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(KRF-2008-313-D00021).

참고문헌

- (1) Kim, C., Yang, W. H., Seok, C. S. and Heo, S. P., 2001, "Influence of the Inclined Hole in Residual Stresses Measurement Using the Hole-Drilling Method," *Trans. of the KSAE*, Vol. 9, pp. 201~206.
- (2) Kang, W. J. and Kim K. H., 2006, "Residual Stress of the Lower Control Arm Subjected to Cyclic Loading," *Trans. of the KSME(A)*, Vol. 30, pp. 602~608.
- (3) Schnur, D. S. and Zabarar, N., 1990, "Finite Element Solution of Two-Dimensional Inverse Elastic Problems Using Spatial Smoothing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 30, pp. 57~75.
- (4) Martin, T. J., Halderman, J. D. and Dulikravich, G. S., 1995, "An Inverse Method for Finding Unknown Surface Traction and Deformations in Elastostatics," *Computers & Structures*, Vol. 56, pp. 825~835.
- (5) Maniatty, A., Zabarar, N. and Stelson, K., 1989, "Finite Element Analysis of Some Inverse Elasticity Problems," *Journal of Engineering Mechanical*, Vol. 115, pp. 1302~1316.
- (6) Burke, B. C. P., Kim, S. O. and Kim, K.-S., 2007, "Partial Polar Decomposition Inverse Method Applied to Determination of Internal Stresses in an Elastic Complex Structure," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44, pp. 2073~2086.
- (7) Kim, H.-G. and Lee, K. W., 2009, "A Study on the Influence of Measurement Location and Regularization on the Evaluation of Boundary Traction by Inverse Finite Element Method," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 45, pp. 569~582.
- (8) Aster, R. C., Borchers, B., and Clifford, H. T., 2004, *Parameter Estimation and Inverse Problems*, Elsevier Academic Press.
- (9) Hansen, P. C., 1992, "Analysis of Discrete Ill-posed Problems by Means of the L-Curve," *SIAM Review*, Vol. 34, pp. 561~580.