

# 등가 회로 모델을 이용한 압전 진동 에너지 수확 장치의 해석

## Analysis of Vibration-powered Piezoelectric Energy Harvesters by Using Equivalent Circuit Models

김 재 은\*  
Jae Eun Kim

(2010년 2월 11일 접수 ; 2010년 4월 9일 심사완료)

**Key Words** : Piezoelectric Energy Harvesting(압전 에너지 수확), Equivalent Circuit Model(등가 회로 모델), Nyquist Plot(나이퀴스트 선도), Electrical Admittance(전기 어드미턴스)

### ABSTRACT

The use of equivalent circuit models of piezoelectric energy harvesters is inevitable when power circuitry including rectifying and smoothing circuit elements is connected to them for evaluating DC electrical outputs. This is because it is difficult to incorporate the electro-mechanical coupling resulting from the additional circuitry into the conventional finite element analysis. Motivated by this observation, we propose a method to accurately extract the equivalent circuit parameters by using commercially available FEM software such as ANSYS which provides three-dimensional AC piezoelectric analysis. Then the equivalent circuit can be analyzed by circuit simulators such as SimPowerSystems™ of MATLAB. While the previous works have estimated the circuit parameters by experimental measurements or by analytical solutions developed only for limited geometries and boundary conditions, the proposed method has no such limitation because piezoelectric energy harvesters of any shapes and boundary conditions can be treated in FEM software. For the verification of the proposed method, multi-modal AC electrical power output by using a corresponding equivalent circuit is compared with that by ANSYS. The proposed method is then shown to be very useful in the subsequent evaluation of DC electrical output which is obtained by attaching a bridge diode and a storage capacitor to a piezoelectric energy harvester.

### 1. 서 론

진동 에너지는 주변 환경 어디에나 존재하기 때문에 쉽게 수집할 수 있고 또한, 출력 파워 밀도가 적지 않기 때문에 이를 이용한 에너지 수확 기술은 다른 에너지 원에 비해 상대적으로 많이 연구되어 왔다<sup>(1,2)</sup>. 이러한 진동 에너지를 전기 에너지로 변환하기 위해서는 정전기(electrostatics)<sup>(3)</sup>, 전자기 유도

(electromagnetic induction)<sup>(4)</sup>, 압전 (piezoelectricity)<sup>(1,2)</sup>, 자기 변형(magnetostriction)<sup>(5)</sup>현상 및 이들의 조합<sup>(6,7)</sup> 또는 다강성(multiferroic) 물질 기반의 자기 전기 효과(magnetoelectricity)<sup>(8)</sup>를 이용할 수 있다. 이 중에서 압전 물질을 이용한 에너지 수확 장치는 다른 에너지 변환 수단에 비해 상대적으로 높은 에너지 변환 효율, 구성의 간단함 및 소형화의 가능성 등으로 인해 많은 연구가 이뤄지고 있다.

압전 에너지 수확에 대한 초기 연구는 주로 수학적 모델의 정립으로 시작되었다<sup>(9-11)</sup>. 이러한 수학적 모델은 에너지 수확 장치의 개념 설계 및 성능 평

\* 교신저자; 정회원, 서울대학교 정밀기계설계공동연구소  
E-mail : jekim@idealab.snu.ac.kr  
Tel : (02)880-7130, Fax : (02)872-5431

가를 위해서는 필수적이다. 이를 위해 지난 10여 년간 다양한 모델이 제안되어 왔지만, 주로 간단한 형상 및 경계 조건을 가진 에너지 수확 장치의 교류 출력량에 대한 것이었다. 이는 압전 에너지 수확 장치의 직류 전기 출력을 얻기 위해 정류/평활 기능이 포함된 전력 관리 회로를 연결할 경우에는 발생하는 모든 전기-역학 연성을 고려하여 이론적인 해를 구하는 것이 불가능하기 때문이다.

이 연구에서는 이를 해결하기 위한 대안으로서 등가 회로 해석 방법 및 이를 위한 등가 회로 요소 값의 추출법을 제안하였다. 등가 회로 해석 방법은 압전 센서 및 액추에이터와 관련된 연구에서 이미 사용되어 온 방법으로서 Umeda의 연구<sup>(12)</sup>를 시작으로 압전 에너지 수확 장치에도 이용되어 왔다. 여러 다양한 형태의 등가 회로가 구성의 단순함, 편리함 등 각각의 목적에 따라 사용 될 수 있지만, 본 연구에서는 전기-역학 연성을 구체적으로 명시하기 위해 사용되는 변압기(transformer) 회로 요소를 필요로 하지 않으며, IEEE의 표준<sup>(13)</sup>으로 채택된 Van Dyke 등가 회로를 사용하였다<sup>(12-15)</sup>. 특히, 이 연구에서 제안한 Van Dyke 등가 회로 요소 값 추출법은 상용 유한 요소 프로그램인 ANSYS의 압전 해석을 통해 구성 요소인 저항(resistance), 유도 용량(inductance), 전기 용량(capacitance)의 값들을 추출함으로써 해석하고자 하는 압전 에너지 수확 장치의 기하 형상 및 경계 조건에 대한 제한이 전혀 없다. Yang<sup>(16)</sup> 등이 최근 이러한 개념의 등가 회로 해석 기법을 제안하였으나 이 방법에서는 변압기 회로 요소가 추가된 등가 회로 모델을 사용하여 회로 해석 소프트웨어를 사용할 때 모델링이 복잡해진다. 또한, 압전 에너지 수확 장치의 전기 어드미턴스에 대한 나이퀴스트 선도(Nyquist plot)를 주파수 스위프(sweep)하여 그린 후 등가 회로 구성 요소 값을 추출하였기 때문에 다소 비효율적이다. 이 연구에서 제안하는 등가 회로 해석 방법은 이러한 단점을 보완하였으며, 2장에서 자세히 다루었다. 3장에서는 제안된 등가 회로 해석 방법을 사다리꼴 형상의 다소 복잡한 압전 에너지 수확 장치에 대해 적용하여 교류 출력 결과를 ANSYS의 결과와 비교하였다. 또한, 정류/평활 회로가 연결된 압전 에너지 수확 장치의 경우에 적용하여 직류 출력 결과를 살펴보았다. 이는 등가 회로 해석 기법이 아니면 얻을

수 없는 결과이다.

## 2. 등가 회로 해석법

### 2.1 압전 지배 방정식 및 등가 회로

Fig. 1(a)에 나타난 압전 에너지 수확 장치의 기저(base)가 외부 조화 가진을 받는 경우  $r$ 번째 폐회로(Fig. 1에서  $R_e=0$ 인 경우) 고유진동수(short-circuit resonant frequency) 근처에서의 전기-역학 연성 지배 방정식은 다음과 같다<sup>(10)</sup>.

$$m_r \ddot{w}_r(t) + \eta_r \dot{w}_r(t) + k_r^{sc} w_r(t) + \alpha_r v_o(t) = -\mu_r m_r \ddot{w}_b(t) \tag{1a}$$

$$\alpha_r \dot{w}_r(t) - C_p \dot{v}_o(t) = \frac{v_o}{R_e} \tag{1b}$$

위 식에서  $m_r$ ,  $\eta_r$ ,  $k_r$  과  $\alpha_r$ 은 각각  $r$ 번째 모드에서의 질량, 감쇠, 감쇠 계수 및 압전 연성 계수를 나타내며,  $C_p$  및  $v_o$ 는 각각 압전체 내부의 전기 용량(capacitance) 및 압전 에너지 수확 장치의 출력 전압을 나타낸다. 또한,  $\mu_r$ 은 기저의 운동으로 인해

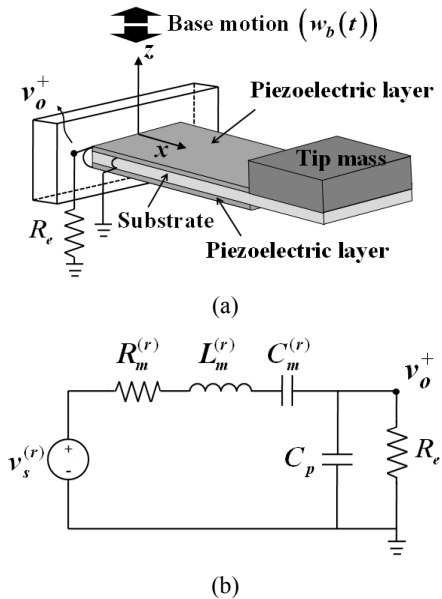


Fig. 1 (a) Cantilevered piezoelectric energy harvester and (b) its equivalent circuit model employed in this work



선도는 Fig. 2와 같다. 이와 같은 가정에 의해  $Y_p(\omega)$ 는 허수축 상에 존재하면서,  $Y_m(\omega)$ 은  $Y_p(\omega)$ 의 끝점을 시작점으로 하여 원의 궤적을 그린다. 따라서, 식 (5)에 나타난 전기 어드미턴스의 실수부는 다음과 같다.

$$\text{Re}(Y_{elec}) = \frac{\omega^2 R_m^{(r)} C_m^{(r)}}{(1 - \omega^2 L_m^{(r)} C_m^{(r)})^2 + (\omega R_m^{(r)} C_m^{(r)})^2} \quad (7)$$

즉, 실수부의 최대값은  $\omega = \omega_r^{sc}$ 에서 발생하고 이때의 실수부 및 허수부 값은 각각 다음과 같으며, 이를 Fig. 2에 나타내었다.

$$\text{Max}(\text{Re}(Y_{elec}(\omega))) = \text{Re}(Y_{elec}(\omega_r^{sc})) = \frac{1}{R_m^{(r)}} \quad (8a)$$

$$\text{Im}(Y_{elec}(\omega_r^{sc})) = \omega_r^{sc} C_p \quad (8b)$$

### 2.3 새로운 회로 구성 요소 추출법의 제안

앞에서 설명된 이론들을 이용하면 상용 유한 요소 해석 소프트웨어를 이용하여 Fig. 1(b)에 나타난 등가 회로의 구성 요소 값들을 간단하면서도 정확하게 추출할 수 있다. 그 과정을 다음과 같이 정리할 수 있다.

Step 1: 폐회로 및 개회로 상태의 고유진동수 해석을 통해  $\omega_r^{sc}$  및  $\omega_r^{oc}$ 를 구한다.

$$\omega = \omega_r^{sc}; \quad \omega = \omega_r^{oc} \quad (9)$$

Step 2: 식 (8a)에 의해 다음과 같이 등가 저항  $R_m^{(r)}$ 의 값을 구한다.

$$R_m^{(r)} = \frac{1}{\text{Re}(Y_{elec}(\omega_r^{sc}))} \quad (10)$$

이를 얻기 위해서는 주파수  $\omega = \omega_r^{sc}$ 의 단위 전압을 가한 후 출력된 전류에 대해 실수부를 취하고 그의 역수를 구한다.

Step 3: 폐회로 상태의  $r$ 번째 모드에서 모드 감

쇠 계수를  $\zeta_r$ 이라고 하면 식 (1a)에서 다음과 같은 식이 성립한다.

$$2\zeta_r \omega_r^{sc} = \frac{\eta_r}{m_r} = \frac{\eta_r / \alpha_r^2}{m_r / \alpha_r^2} = \frac{R_m^{(r)}}{L_m^{(r)}} \quad (11)$$

따라서, 등가 유도 용량을 다음 식에 의해 구한다.

$$L_m^{(r)} = \frac{R_m^{(r)}}{2\zeta_r \omega_r^{sc}} \quad (12)$$

식 (12)에서 모드 감쇠 계수의 값은 일반적으로 실험으로 측정하기 전에는 경험에 의한 추정값을 사용한다.

Step 4: 등가 전기 용량  $C_m^{(r)}$ 은 식 (6)을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$C_m^{(r)} = \frac{1}{(\omega_r^{sc})^2 L_m^{(r)}} \quad (13)$$

Step 5: Fig. 1(b)의 개회로 상태에서는  $C_m^{(r)}$ 과  $C_p$ 가 직렬 연결된 상태이므로 이 경우의 고유진동수는 등가 회로를 이용하면 다음과 같이 구해진다.

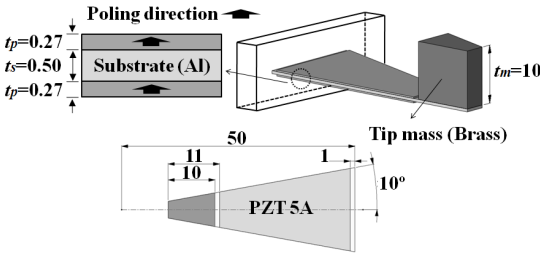
$$\omega_r^{oc} = \sqrt{\frac{1}{L_m^{(r)} \frac{C_m^{(r)} C_p}{C_m^{(r)} + C_p}}} \quad (14)$$

따라서, 위 식을 이용하면 압전 물질 자체의 전기 용량  $C_p$ 는 다음과 같다.

$$C_p = \frac{C_m^{(r)}}{(\omega_r^{oc})^2 L_m^{(r)} C_m^{(r)} - 1} \quad (15)$$

Step 6: 폐회로 상태에서 고유진동수  $\omega_r^{sc}$ 와 같은 주파수로 기저를 변위  $|\tilde{W}_b|$ 의 값으로 가진 할 경우에 출력 전류를  $I_R$ 이라고 하면, 이 값에  $R_m^{(r)}$ 을 곱한 결과가 다음과 같이 등가 전력원의 크기가 된다.

$$\tilde{V}_s^{(r)} = I_R \cdot R_m^{(r)} = \frac{\omega^2 \mu_r m_r |\tilde{W}_b|}{\alpha_r} \quad (16)$$



**Fig. 3** Cantilevered trapezoidal shaped piezoelectric energy harvester in bimorph connected in parallel

위의 식에서 가진력 또는 등가 가진 전력원의 위상은 0으로 가정하였으며,  $I_r$  (또는  $\alpha_r$ )의 부호에 따라서 등가 전력원의 부호는 음수가 될 수 있다. 식 (16)의 결과를 얻기 위해서 식 (1)의 폐회로 상태에서의 단위 가진력에 대한 출력 전류의 주파수 응답( $Y_{couple}(\omega)$ )을 이용한다.

$$Y_{couple}(\omega) = \frac{j\omega\alpha_r}{k_r^{sc} - \omega^2 m_r + j\omega\eta_r} \quad (17)$$

위 식 (17)에  $\omega = \omega_r^{sc} = k_r^{sc} / m_r$  을 대입하면  $Y_{couple} = \alpha_r / \eta_r$  이 된다. 그런데, 이 결과는 단위 가진력에 대한 것이므로 실제의 가진력  $\omega^2 \mu_r m_r |\tilde{W}_b|$  에 대해서 출력 전류  $I_r$  은  $\omega^2 \mu_r m_r |\tilde{W}_b| \cdot \alpha_r / \eta_r$  이 된다. 여기에 식 (4a)의  $R_m^{(r)} = \eta_r / \alpha_r^2$  을 대입하면, 출력 전류  $I_r$  은 다음과 같으며 이를 이용하면 식 (16)의 결과를 얻을 수 있다.

$$I_r = \frac{\omega^2 \mu_r m_r |\tilde{W}_b|}{R_m^{(r)} \alpha_r} \quad (18)$$

### 3. 수치 예제

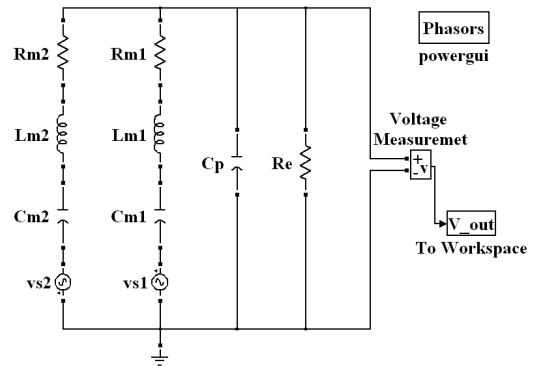
#### 3.1 다중 모드 전기 출력(교류) 해석

2장에서 제안한 등가 회로 해석법 및 구성 요소 추출법을 이용하여 Fig. 3에 나타낸 압전 에너지 수확 장치의 교류 출력 전기량을 구하고 ANSYS의 결과와 비교하였다. 압전 물질은 Piezo Systems, Inc의 PZT 5A4E를 사용하였고, 알루미늄 기판의 상, 하면에 부착 후 서로 병렬 연결하였다. 먼저 고

유 모드 해석을 수행하여 연속된 굽힘 모드 각각에 대한 고유진동수를 구하였고, ANSYS의 압전 해석을 통해 등가 회로 요소 값들을 추출하여 이 값들을 Table 1에 나타내었다. Fig. 4는 2개의 굽힘 모드가 존재하는 전 주파수 대역(120 Hz~780 Hz)에서의 전기 출력을 해석하기 위한 등가 회로 모델을 나타낸 것이다. 주목할 점은 Table 1의 2번째 모드에서의 등가 전력원 값이 음수이고 따라서, 등가 회로 모델상에서 등가 전력원  $v_s^{(2)}$ 의 상하 위치가  $v_s^{(1)}$ 와는 정반대가 된다는 것이다. 이를 고려하여 해석한 결과를 Fig. 5에 나타내었다. Fig. 4의 등가 회로에 대해 MATLAB의 SimPowerSystems<sup>TM</sup>라는 회로 해석 모듈을 이용하였으며, ANSYS의 압전 해석 결과와 비교하였다. Fig. 5의 결과는 기저의 가진 가속도가  $3 \text{ m/s}^2$ 일 때 각각의 가진 주파수에서 외부 저항이 압전 에너지 수확 장치의 내부 임피던스와

**Table 1** Equivalent circuit parameters of Fig. 4

	$r=1$	$r=2$
$f_r^{sc}(\omega_r^{sc}/2\pi)$	147.06 Hz	745.76 Hz
$f_r^{oc}(\omega_r^{oc}/2\pi)$	154.24 Hz	747.91 Hz
$R_m^{(r)}$	6508.56 $\Omega$	21715.79 $\Omega$
$L_m^{(r)}$	352.19 H	231.72 H
$C_m^{(r)}$	3.33 nF	0.20 nF
$C_p$	33.27 nF	
$v_s^{(r)}$	3.95 V	-1.22 V



**Fig. 4** Equivalent circuit for the model shown in Fig. 3 constructed from SimPowerSystems<sup>TM</sup> in MATLAB

같은 경우의 출력 전력량이다<sup>(18)</sup>. ANSYS의 해석 결과를 실선으로, 등가회로를 이용한 결과는 점선으로 나타내었으나 그 결과가 거의 동일하여 그래프 상으로는 구분이 어렵다는 것을 알 수 있다.

### 3.2 전기 출력(직류) 해석

앞에서 살펴본 바와 같이 등가 회로를 이용한 해석법은 ANSYS를 이용한 압전 해석법과 비교하면, 정확성은 거의 비슷하나 해석 시간을 고려하면 상당한 장점이 있다. 따라서, 해석 주파수 영역이 넓거나 전기 출력 향상을 위해 다수의 에너지 수확 장치를 연결한 경우에도 필요한 방법이다. 그러나, 등가 회로 해석법은 압전 에너지 수확 장치의 직류 출력을 구하기 위해서는 더욱 필수적이다. 따라서,

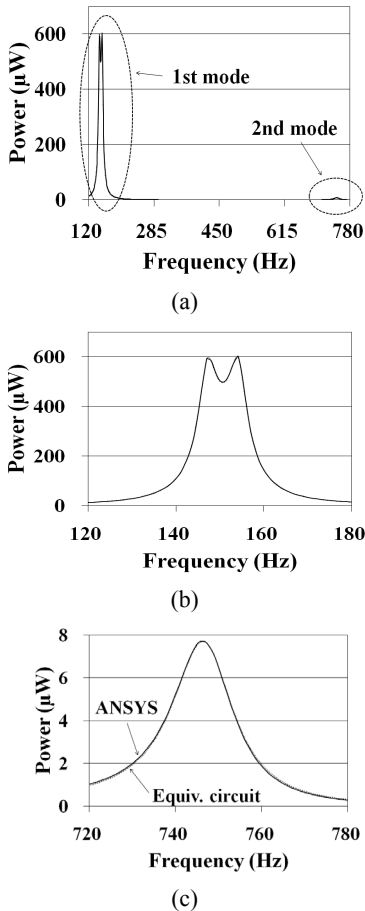


Fig. 5 Output power at frequencies (a) ranging from 120 Hz to 780 Hz, around (b) the first, and (c) the second resonant frequency

Fig. 3에 보인 압전 에너지 수확 장치에 전파 브리지 다이오드 정류 회로(full-wave bridge diode rectifier) 및 축전기(capacitor)를 연결하여 그 출력 전압의 특성을 살펴보았다. 이 해석을 위해 사용된 등가 회로를 Fig. 6에 나타내었으며, 전파 브리지 다이오드 정류 회로에 연결된 축전기의 전기 용량  $C_e$ 에 따른 출력 전압을 Fig. 7에 나타내었다. 그림에서 축전기의 전기 용량이 커질수록 출력 최대 전압에 이르기까지의 충전 시간이 길어지는 것을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 등가 회로 해석법을 사용하지 않으면 얻어질 수 없는 결과이다. 또한, 압전 에너지 수확 장치가 실제 응용 분야에 사용되어 기본 정류/평활 회로를 포함한 전력 관리 회로가 연결될 경우, 사용 가능한 직류 출력 전압은 각 회로 요소에서의 추가적인 전압 강하로 인해 교류 출력 전압보다 작아지게 된다. 따라서, 실제 압전 에너지 수확 장치를 설계함에 있어서 등가 회로를 이용하여 직류 출력량을 파악하는 것은 필수적이라 할 수 있다.

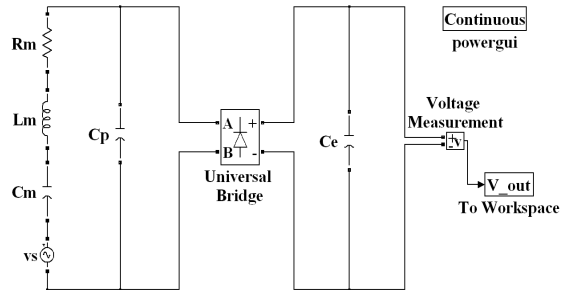


Fig. 6 Equivalent circuit model for the DC output voltage

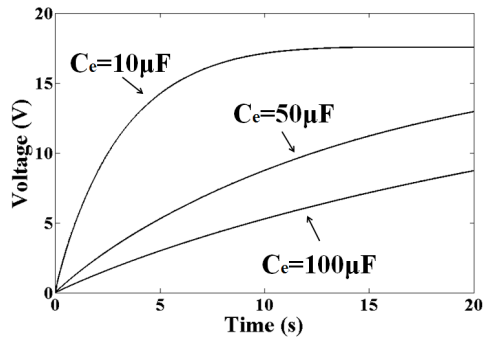


Fig. 7 DC output voltage with respect to varying values of the storage capacitance  $C_e$

#### 4. 결 론

이 연구에서는 등가 회로를 이용한 압전 에너지 수확 장치의 해석 기법에 대해 제안하였다. 상용 유한 요소의 압전 해석 결과를 이용하여 간단하면서도 효율적인 등가 회로 요소 추출 방법을 제안하였고 이를 이용하여 다중 모드의 전기 출력을 계산할 수 있는 등가 회로를 구성하였다. 제안된 방법은 계산량이 많은 압전 에너지 수확 장치의 교류 출력 해석에 있어서도 유용하지만, 특히 정류/평활 회로를 포함한 전력 관리 회로가 압전 에너지 수확 장치에 연결된 경우의 직류 전기 출력을 계산하기 위해서는 더욱 필수적이다.

#### 후 기

이 연구는 교육 과학 기술부 창의적 연구 진흥 사업 (과제 번호: 2009-0083279)의 지원을 받은 것으로 이에 감사 드립니다.

#### 참 고 문 헌

(1) Roundy, S., Wright, P. K. and Rabaey, J. M., 2004, *Energy Scavenging for Wireless Sensor Networks*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

(2) Priya, S. and Inman, D. J., 2009, *Energy Harvesting Technologies*, Springer Science+Business Media, LLC, New York.

(3) Mitcheson, P. D., Miao, P., Stark, B. H., Yeatman, E. M., Holmes, A. S. and Green, T. C., 2004, "MEMS Electrostatic Micropower Generator for Low Frequency Operation," *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 115, pp. 523~529.

(4) Glynne-Jones, P., Tudor, M. J., Beeby, S. P. and White, N. M., 2004, "An Electromagnetic Vibration-Powered Generator for Intelligent Sensor Systems," *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 110, pp. 344~349.

(5) Wang, L. and Yuan, F. G., 2008, "Vibration Energy Harvesting by Magnetostrictive Material,"

*Smart Materials and Structures*, Vol. 17, No. 4, 045009.

(6) Challa, V. R., Prasad, M. G. and Fisher, F. T., 2009, "A Coupled Piezoelectric-electromagnetic Energy Harvesting Technique for Achieving Increased Power Output through Damping Matching," *Smart Materials and Structures*, Vol. 18, No. 9, 095029.

(7) Cho, S.-W., Son, J.-D., Yang, B.-S. and Choi, B.-K., 2009, "Vibration-based Energy Harvester for Wireless Condition Monitoring System," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 19, No. 4, pp. 393~399.

(8) Bian, L., Wen, Y. Li, P., Gao, Q. and Zheng, M., 2009, "Magnetolectric Transducer with High Quality Factor for Wireless Power Receiving," *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 150, pp. 207~211.

(9) Erturk, A. and Inman, D. J., 2008, "Issues in Mathematical Modeling of Piezoelectric Energy Harvesters," *Smart Materials and Structures*, Vol. 17, 065016.

(10) Kim, J. E. and Kim, Y. Y., 2010, "Analysis of Piezoelectric Energy Harvesters of a Moderate Aspect Ratio with a Distributed Tip Mass," *Journal of Vibration and Acoustics*, in review.

(11) Kwak, M. K., Kim, K. Y., Kang, H.-Y. and Kim, N. S., 2008, "Dynamic Modeling of Piezoelectric Energy Harvesting Device and Experiments," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 18, No. 6, pp. 632~641.

(12) Umeda, M., Nakamura, K. and Ueha, S., 1996, "Analysis of the Transformation of Mechanical Impact Energy to Electric Energy Using Piezoelectric Vibrator," *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 35, pp. 3267~3273.

(13) 1987, *Standard on Piezoelectricity*, IEEE, New York.

(14) Goldfarb, M. and Jones, L. D., 1999, "On the Efficiency of Electric Power Generation with Piezoelectric Ceramic," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 121, pp. 566~571.

(15) Shu, Y. C. and Lien, I. C., 2006, "Analysis

of Power Output for Piezoelectric Energy Harvesting Systems,” *Smart Materials and Structures*, Vol. 15, pp. 1499~1512.

(16) Yang, Y. and Tang, L., 2009, “Equivalent Circuit Modeling of Piezoelectric Energy Harvesters,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 20, pp. 2223~2235.

(17) Ikeda, T., 1996, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, New York.

(18) Renno, J. M., Daqaq, M. D. and Inman, D. J., 2009, “On the Optimal Energy Harvesting from a Vibration Source,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 320, No. 1-2, pp. 386~405.