한국수학사학회지 제23권 제1호(2010년 2월), 25 - 40

구장산술의 방정식론의 교육학적 의미

수원대학교 고영미
ymkoh@suwon.ac.kr

수원대학교 이상욱
swree@suwon.ac.kr

사람의 인지능력의 성장 원리를 도출하고, 구장산술의 8장 방정의 1차 연립방정식 이론의 전개 방식을 살펴본다. 도출해낸 인지능력의 성장 원리에 입각하여 구장산술의 서술 방식의 교육학적 의미를 분석한다.

주제어 : 구장산술, 아동인지발달이론, 구성주의, 개념습득이론.

1. 서론

사람에게 있어서 교육은 삶의 일부이다. 특히 사람의 삶은 교육으로 시작된다는 의미에서 교육은 매우 중요하다. 그리고 교육의 주요 내용이 수학이었음을 인류문명의 역사에서 읽을 수 있다. 서양문명은 이집트와 메소포타미아에서 발생하였고, 동양문명은 인도(갠지즈강 유역)와 중국(황하강 유역)을 원류로 삼는다. 이집트문명은 기하로 대표되고 메소포타미아문명은 대수로 대표되면서, 서양문명의 근본이 수학으로 여겨짐은 지식의 역사 또는 문명의 기원을 설명함에 필히 수학이 언급된다는 사실로부터 쉽게 추정된다([8, 11, 19]). 그러면 동양문명은 어떠한가? 서양문명에 비하여 영향이 다소 적었지만, 동양문명에서도 역시 수학이 지대한 영향을 미쳤다. 특히, 산학과 천문학은 사회제도 및 사회운영에 영향을 미치며 발전하였다([7]).

서양수학이 유클리드(Euclid)의 원론(Elements)으로부터 발전하였다고 한다면 동양의 수학은 구장산술(九章算術)[4, 18]에서 그 기원을 찾을 수 있다. 그러한 의미로 동양수학사에서 구장산술은 원론에 상응하는 중요한 의미를 지닌다. 특히 중국, 한국, 일본의 일부 산서가 구장산술의 형식을 그대로 답습하였고, 일천수백 년이 지난 19세기에 조선산학가 남병길[1)]

1) 남병길(南秉吉, 1820-1869). 조선 말기의 문신, 천문서와 역법서 및 산서 등 약 30여권의 저술을

이 구장산술의 해설서 구장술해를 저술하였음으로부터도 그 영향력의 지대함을 느낄 수 있다([2, 9, 14]).

구장산술은 문제를 제시하고 그에 대한 답과 풀이를 주는 형식으로 구성되어 있는데, 문제의 풀이에 대한 주(설명)가 더해지면서 그의 중요성이 증대되었다. 구장산술은 9개의 장으로 구성되었으며, 각 장은 쉬운 문제로부터 점차 어려운 문제 또는 변형된 문제 순으로 배열되었음이 특기할만한 사실이다. 특히 일차연립방정식 문제를 다룬 <권8 방정>장이 교육학적 관점에서 사람의 인지능력의 발달이론을 고려한 듯한 배열을 잘 보여준다[12, 18]. 본 논문에서 우리는 근대적 인지발달이론에 입각한 인지능력의 성장 원리를 알아보고, 구장산술의 방정장의 문제들과 그의 배열을 인지능력의 성장 원리와 비교, 분석하면서 교육학적 의미를 살펴보고자 한다.

본 논문은 제 2절에서 교육학에서 의미 있는 교수 방법으로 인정받고 있는 구성주의의 의미와 함께 피아제의 아동인지발달이론 및 두빈스키의 개념습득이론을 포괄하는 사람의 인지능력의 성장 원리를 고찰한다. 제 3절에서 구장산술의 방정식론을 개괄적으로 살펴보고, 구장산술의 방정식 이론의 전개 과정을 인지능력의 성장 원리의 관점에서 고찰하여, 구장산술의 방정식 이론의 기술 방법이 시사하는 교육학적 의미를 추출한다. 마지막으로 수학사의 의미와 문화적 가치에 대한 시사점을 살펴본다.

2. 인지능력의 성장 원리

사람의 인지능력은 태어날 때부터 천부적으로 부여받은 능력이 아니라 교육과정을 겪으며 습득된 후천적 능력으로 이해해야 한다. 사람에게 요구되는 경험과 훈련에 의한 능력의 습득 과정을 우리는 교육이라고 부른다. 사람은 다른 동물과는 달리 교육의 과정을 거쳐야만 바른 사람으로 거듭날 수 있다. 그러므로 교육과정은 사람의 삶의 부분이며, 그 의미 또한 매우 중요하다. 이 절에서는 교육대상자의 지식(또는 능력) 습득의 바탕이 되는 인지 과정과 경험에 의한 학습 이론을 살펴본다.

2.1 피아제의 아동인지발달이론과 구성주의

피아제[2)]는 개개인의 성장은 단계적이며 성장과정의 각 단계 별로 뚜렷한 현상을 보인다는 인지발달이론을 제안하였다. 다시 말해서, 각 개인이 지적 성장을 해나가는 과정에서 각 단계마다 뚜렷한 차이를 보이는 공통적인 인지 패턴을 나타낸다는 인지발달이론이 그것이

남긴 조선산학가. 본관은 의령(宜寧), 자는 자상(字裳) 또는 원상(元裳), 호는 육일재(六一齋).

2) 피아제(Jean Piaget, 1896-1980). 스위스 출신 심리학자, 자연과학자. 아동인지발달이론과 유전적 인식론에 관한 이론으로 유명하다[23].

다. 피아제에 따르면 아동의 인지발달은 감각운동기, 전조작기, 구체적 조작기, 형식적 조작기의 4개의 단계로 나누어진다([15, 23]).

피아제는 또한 사람(아동)의 인지발달 과정에 대한 설명도 개괄적으로 제시하였다[23]. 아동은 외부 자극에 대한 반응(행동)을 보이면서 그러한 행동의 특성을 인지할 수 있는 단계를 거쳐, 행동의 대상에 대한 변화를 감지할 수 있게 된다. 이러한 자극과 반응의 반복에 따라 아동은 대상에 대한 생각과 지적 감각을 익혀 가게 되고, 결국 이러한 감각은 아동의 지식으로 형성되게 된다는 것이다. 하지만 이러한 단계가 항상 단계적으로 발생하는 것은 아니며, 자체적인 과정 내의 순환도 가능하고 사람에 따라 특정 단계가 생략되거나 신속하게 이루어질 수도 있음도 지적하였다.

피아제의 인지발달이론은 인식론적 관점에서 구성주의(constructivism) 이론의 바탕이 된다. 구성주의는 인간은 경험으로부터 지식과 의미를 생성한다는 인식에 관한 심리학 이론이다([22]). 구성주의에 따르면 지식은 인간의 경험으로부터 형성된다. 다시 말하면, 인간의 지식은 환경으로부터 수동적으로 받아들여지는 것이 아니라 각 개인이 능동적인 구성활동을 통해 자신에게 의미 있는 지식을 구성해 나간다는 것이다. 즉, 개인이 어떤 새로운 것을 경험하게 될 때 그것을 자신이 이미 가지고 있던 생각이나 경험과 조화시키거나, 믿고 있던 생각을 바꾸거나, 아니면 새로운 정보를 가치가 없는 것으로 취급하여 버리는 등, 각 개인이 지식의 능동적인 창조자가 된다(또는 되어야 한다)는 것이다.

2.2 두빈스키의 개념습득이론

두빈스키[3]는 피아제의 아동인지발달이론을 수학에서 다루어지는 개념의 습득에 관한 인지이론으로 확장하려는 시도로서 개념습득이론, 즉, APOS 이론을 만들었다. APOS 이론은 수학적 개념을 습득하는 개인의 뇌 안에서 발생하는 논리체계의 구성 요소에 관한 일종의 구성주의 학습이론을 말한다([6, 16, 17]). 이 이론은 수학적 지식이 문제 상황을 이해하고 문제를 해결하기 위한 정신적 행동(action)과 논리적 과정(process) 및 과정에서 다루어지는 대상(object)으로 구성되는 인식상태를 스키마(schema)로 조직하는 개인의 성향에 기반을 둔다.

행동(action)은 개인이 외적으로 인식한 대상(자극)을 단계적으로 조작하여 변환시키는 활동을 말한다. 행동이 반복되고 그것에 관한 감각이 생길 때 개인은 정신적으로 어떤 (논리적) 절차를 구성하게 되는데 이것을 과정(process)이라고 한다. 이러한 과정의 구성에서 인지되는 특정 개념을 대상(object)이라고 한다. 그래서 새로운 개념을 접하는 개인은 그의 인식 속에 대상을 가지고 어떤 행동을 어떠한 과정으로 다루는지 알게 되고, 그에 따라 인지

3) 두빈스키(Ed Dubinsky, 1935년 미국 펜실베니아 출생). 1962년 미시간대학교(U. of Michigan)에서 박사학위 취득. 수학교육학자. http://www.math.kent.edu/~edd/.

된 개념을 사용할 수 있게 되는데, 인지된 개념의 사용에 발생되는 지적 인식 상태를 스키마(schema)라고 한다. 다시 말해, 스키마란 인식(깨달음)의 대상인 (추상적) 개념을 올바르게 사용할 수 있는 논리적 체계적 사고방법, 즉, 생각의 틀을 의미한다.

2.3 동양의 논리학 : 순자와 묵자

서양 논리학의 기원은 소크라테스 또는 아리스토텔레스에 있지만, 심리학적 관점에서 사람의 (머리 속에서 일어나는) 인지 논리에 대한 이해는 피아제의 연구에 기원을 둔다고 할 수 있다. 그러나 동양에서는 그보다 훨씬 이전, 춘추전국 시대의 제자백가 이론 중에 이미 사람의 인지 작용을 논리적으로 풀어 이해하고자 하는 노력이 있었다. 대표적으로 순자와 묵자를 예로 들 수 있다.

홍성사, 홍영희는 [13]에서 유휘의 수학적 사고가 전국시대의 철학을 바탕으로 구성되었음을 밝히며, 그의 수학에 대한 철학적 배경을 세술하였다. 특히, 이론의 전개에 있어 本(근거), 原(실증), 用(이용)이 있어야 한다는 묵자[4]의 주장을 언급하고, 묵가들이 그들의 이론을 방어하고 상대방의 이론을 공박하기 위하여 조잡하지만 인식론, 정의, 논증의 기초를 세웠다고 설명하였다. 또한 순자[5]도 논리적인 관점을 강조하여, 지식이 감각에 의하여 얻어진 후에 지각에 의하여 정리되어야 한다는 주장을 언급하였다.

순자의 글은 체계적이고, 논증도 비교적 세밀한데, 그는 특히 인간 마음의 작용을 性, 情, 慮, 僞의 4단계를 거쳐 일어난다고 하였다([5]). 이때 性은 만물의 태생 자체적 성질, 즉, 본성을 말하며, 情은 본성을 받아들이는 사람의 마음(인지능력), 慮는 인지에 따른 사고능력, 그리고 僞[6]는 사고능력의 활용을 말하는 행동의 실천을 의미한다. 순자와 묵자의 논리학에 관한 설명은 [3]을 참조한다.

2.4 인지능력의 성장 원리

교육은 사람의 인지능력 및 지적능력의 확대와 함께 지식을 쌓아 나가는 과정이다. 교육은 사람의 삶에 있어서 지식을 습득해가는 과정을 포함하며, 이 과정에서 각 개인은 그 나름의 사고체계를 정립해 나가게 된다. 이때 사고체계의 정립이란 개인의 인지능력에 따라 습득된 개념의 구체적인 조작능력을 말하며, 여기서 인지(cognition)는 단순히 '안다(智)'라

---

4) <墨子>, <非命上> 然則明辨此之說將柰何哉？ 子墨子言曰：“必立儀，言而毋儀，譬猶運鈞之上而立朝夕者也，是非利害之辨，不可得而明知也．故言必有三表.”何謂三表？子墨子言曰：“有本之者，有原之者，有用之者．… ”[21]

5) <순자>, <正名> 散名之在人者：生之所以然者謂之性；性之和所生，精合感應，不事而自然謂之性。性之 好、惡、喜、怒、哀、樂 謂之情．情然而心為之擇謂之慮．心慮而能為之動謂之偽；慮積焉，能習焉，而後成謂之偽．[21]

6) 僞(속일 위)는 人(사람 인)과 為(할 위)의 합자로서 '속이다'라는 뜻보다 '사람이 행동하다'(실천)의 뜻으로 쓰였다.

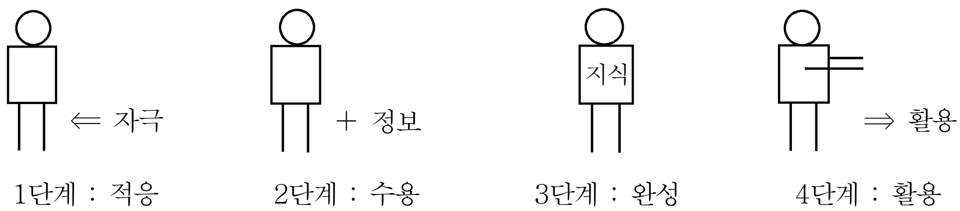
는 개념보다 강한 '깨달음(識)' 또는 그 깨달음에 이르는 과정을 의미한다. 그래서 인지능력이 향상됨은 외부 자극에 의한 자신의 지적능력의 성장을 의미하며, 이러한 지적능력의 성장을 유도하는 일련의 활동을 우리는 교육이라고 판단한다.

우리는 지적능력의 성장에 요구되는 **인지능력의 성장과정**을 적응기, 수용기, 완성기, 활용기 등의 4 단계로 나누어 이해하고자 한다.

적응기(감각기)는 새로운 개념이나 방법, 정보 등의 외부 자극에 대한 인지 주체의 적응을 의미한다. 이때 인지의 주체인 각 개인은 외부 자극에 대하여 수동적 태도를 취하며 자극을 감각하는 수준의 행동을 취한다. 그러나 감각된 외부 자극이 모두 개인의 지식으로 남는 것은 아니다. 예를 들어, 누군가(외부 자극의 행동 주체)가 나(인지 주체)의 손등을 꼬집는다면, 나는 아픔을 느끼지만 잠시 후 그 아픔을 잊어버려 감각 결과가 사라진다. 마찬가지로 개념과 정보 등도 인지 주체 내에서 숙성되지 않으면 자극에 대한 적응 결과가 사라지게 된다. 이러한 숙성 단계를 우리는 **수용기**(성장기)라고 부르기로 한다.

수용기 동안 인지 주체는 개념과 방법을 이해하려는 능동적 태도를 보이며 사고 주체로서의 태도 변화를 나타낸다. 이때 자극이 자기 안에서 숙성되는 단계 동안 인지 주체는 그 자극(개념, 정보 등)의 가치를 인정하고 기억하게 된다. 이때의 숙성 과정의 필요성을 우리는 **무르익음의 법칙**이라고 말한다. 즉, 새로운 개념의 습득에는 무르익음의 시간(단계)이 요구된다는 것이다.

완성기(정착기)는 수용기가 반복되면서 인지 주체 내에서 개념의 이해가 완성되어 그 개념을 인지 주체가 자유로이 사용할 수 있는 수준에 이름을 뜻한다. 또한 개념이 완전하게 습득되어 자기와 하나가 되면 그 개념은 비로소 '지식'이 되어 활용이 가능한 단계에 이르게 된다. 그러면 개인은 자연스럽게 **활용기**(실천기)에 이르게 되고 습득(체득)한 지식을 실용문제 등에 응용을 할 수 있는 수준에 이르게 되어, 능력을 갖추게 되는 것이다.



<인지에 의한 지적능력의 성장 과정>

인지능력의 성장 원리에서 눈여겨볼 점은 바로 적응기와 수용기의 구분이다. 적응기와 수용기의 차이는 인지 주체의 행동 태도의 차이를 말하는데, 적응기에서는 인지 주체는 수동적 태도를 보이며 수용기에서는 능동적 자세로 태도가 변화하는 것이다. 예를 들어, 반복 및 기억에 의한 기계적 학습이 적응기의 인지 상태를 의미하며, 구성주의 원리에 따른 자기주도적 학습은 수용기의 상태를 의미한다. 대개 지식의 습득 내지 완성은 수용기를 거쳐 발

생하게 되는데, 수용기에 빠르게 접근하는 방법이 바로 경험을 제공하는 것이고, 이것이 구성주의에 의한 학습효과를 설명해준다.

이상에서 설명한 사람의 인지능력의 발달과정을 앞서 설명한 인지이론들과 비교하면 다음의 표와 같다. 단, 묵자의 이론은 인지발달 이론이라기보다는 논리의 구성 이론에 가깝기에 비교대상에서 제외한다.

	1단계 : 적응기	2단계 : 수용기	3단계 : 완성기	4단계 : 활용기
Piaget	감각운동기	전조작기	구체적 조작기	형식적 조작기
Dubinsky		Action Process Object	Schema	
순자	性	情	慮	僞

<인지능력의 성장 원리의 비교>

피아제가 말하는 형식적 조작은 추상적 개념의 조작(사용)을 의미하며, 이는 두빈스키의 APOS 이론의 스키마에 해당한다. 또한 두빈스키의 이론에서 행동, 과정, 대상 등은 개념의 수용에 필요한 논리의 구성요소를 말하며, 그들을 제대로 인지하면 새로운 개념의 습득이 완성되어 사용 가능한 사고체계를 갖게 되는데, 그것이 바로 스키마이다. 특히, APOS 이론에는 적응기에 해당하는 과정이 나타나 있지 않다. 이는 새로운 개념의 학습에 적용되는 이론인 만큼, 새로운 개념이 주어진다는 전제를 가정하는데, 이러한 전제조건이 바로 적응기에 해당한다. 결국 수용기를 보다 구체적으로 설명한 것이 APOS 이론이라고 할 수 있다.

앞서 설명한 우리의 인지능력의 성장 원리는 순자의 이론과 가장 흡사하다. 그는 性(본성)을 감각의 대상으로서 외부 자극을 의미하고, 외부 자극에 대한 감각을 수용함을 情(감정)으로 설명하여 인지 주체의 수동에서 능동적 태도로의 변화를 설명한다. 또한 慮는 감정에 따른 행동방침의 선택을 의미하여 외부 감각에 의한 인지의 완성을 말하며, 그로 인한 실천을 僞로 설명하였다.

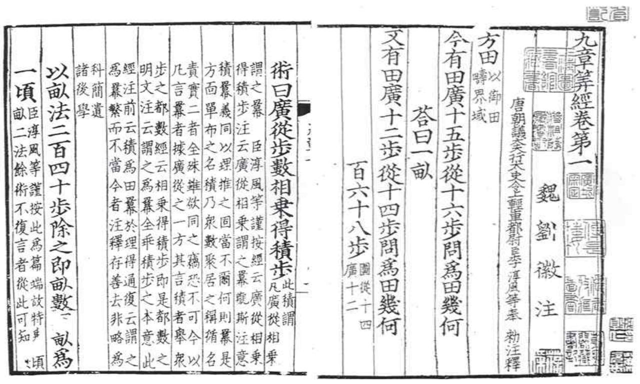
3. 구장산술의 방정식론

3.1 구장산술 소개

구장산술(또는 구장산경)은 동양수학사에서 수학의 세계를 여는 문과 같은 역할을 한 최초의 算書로 여겨진다. 실제로 구장산술은 중국 고대 산경십서 중의 하나로 중국 고대 수학

체계 형성의 지표를 제시한 매우 중요한 명저로 평가되고 있다([4,20]). 그러나 저자와 저작 시기는 분명치 않고, 구장산술에 주를 단 魏나라 劉徽7)의 서문에 따르면 漢의 張蒼과 耿壽昌에 의하여 처음 제작된 것으로 여겨진다. 구장산술이 처음에는 竹簡에 쓰여졌으며 周(1045-256BC), 秦(221-206BC), 漢(202BC-220AD) 대에 걸친 수학적 연구 결과를 집대성한 先秦 이래의 遺文을 모은 것이라는 의견이 일반적으로 받아들여진다([7]). 이러한 견해는 최근(1984년)에 張家의 묘에서 算數書가 죽간 형태로 출토됨에 따라 믿을 만한 사실임이 입증되었다.

구장산술은 유휘가 주(注)를 단 南宋刻本(南宋鮑澣之刻本)의 영인본8)이 전해지고 있는데, 현재 상해도서관에 보존되어 있다[아래 그림 참조]. 이 판본의 유휘의 주가 매우 높은 평가를 받고 있으며, 이 판본이 세계 최초의 인쇄본 수학책으로 평가된다([20]).


九章筭經卷第一
魏 劉 徽 注
唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勅注釋
方田 以御田疇界域
今有田廣十五步從十六步問爲田幾何
荅曰一畝
又有田廣十二步從十四步問爲田幾何
荅曰一畝 百六十八步
術曰廣從步數相乘得積步
以畝法二百四十步除之即畝數 百畝爲
一頃

<九章算經 卷 第一 方田>

구장산술은 동양수학의 발달에 선구적 역할을 하였다. 중국, 한국, 일본을 포함한 동양수학의 기반이 되었으며, 문예부흥 시기에 유럽으로 전해지기도 했다. 예를 들어, 구장산술은 조선산학가 남병길로 이어져 九章術解(철종 재위 기간(1849-1863) 중)가 저술되기도 하였다. 구장산술의 시대적 배경은 [1]을 참조하고 학문적 또는 철학적 배경은 [13]을 참조한다. 구장산술9)에 관한 자세한 설명은 [4,18,20]을 참조한다.

구장산술은 유휘에 의한 서문과 함께 총 9개 장10)으로 구성되어 있으며, 각 장은 일련의 문제와 그에 대한 답과 풀이를 간략히 제시한 문제 풀이집 형태를 취하고 있다. 문제는 今

7) 유휘(劉徽, Liu Hui,), 중국 위(魏, 220-265)나라 수학자. 魏, 景元 4년(263), 구장산술에 주를 달아 편찬. 저서로 구장산술, 해도산경 등이 있음.

8) 卷一부터 卷五까지만 전해지는데, 卷五의 끝자리에는 다른 권의 끝자리와 달리 終이 쓰여 있다.

9) 구장산술의 출판 간사[4] : 張蒼, 耿壽昌 → 劉徽(263, 魏) → 李淳風(唐) → 戴震(淸) → 錢寶琮(1963, 中華書局 出版) → 白尙恕(1983, 科學出版社).

10) 권1 方田(38문), 권2 粟米(46문), 권3 衰分(20문), 권4 少廣(24문), 권5 商功(28문), 권6 均輸(28문), 권7 盈不足(20문), 권8 方程(18문), 권9 句股(24문). 총 264문.

有 또는 又有로 시작하고, 답은 答曰, 풀이는 術曰로 문장이 시작된다.

구장산술의 각 장은 쉬운 문제로 시작하여 점차 어려운 문제를 제시하거나 새로운 개념이 포함되거나 변형된 문제를 점진적으로 제시하는 방식으로 구성되어 있다([18]). 이러한 문제의 제시 방식을 내용적으로 살펴보아도 구장산술의 각 장의 구성은 현대 수학책처럼 수학 이론의 이해를 잘 유도하는 체계를 갖추고 있다. 특히 일차연립방정식 이론을 다룬 <권8 방정>장이 교육학적 관점에서 사람의 인지능력의 성장 원리를 고려한 듯한 배열을 잘 보여준다([12, 18]). 구장산술 방정장의 문제들과 그의 배열을 인지능력 성장 원리와 비교, 분석하면서 교육학적 의미를 살펴보기로 하자.

3.2 구장산술의 방정식론

구장산술 제 8 장 方程은 18 개의 일차연립방정식 문제를 다룬다. 여기서 方程[11])은 方程 : 以御 錯糅正負 로 여러 종류의 물건들이 섞여 있는 정도를 표현하는 방법을 의미한다. 이에 따른 문제의 풀이 방법은 선형대수학에서 다루는 가우스 소거법의 첨가행렬(augmented matrix)을 사용한 연립방정식의 풀이법에 해당하며, 方程術로 불린다. 이와 같은 연립방정식 이론은 서양수학보다 동양수학(구장산술)에서 먼저 소개되었다.

방정장에서 다루는 18 개 문제는 문제 자체와 그의 풀이 방법에 있어 수학 수준이 단계적으로 높아가며 문제의 이해 또는 풀이에 요구되는 개념이 점진적으로 추가되어 나감을 볼 수 있다. 이러한 점진적 진행의 특성은 첫째, 문제에 사용된 수학 내용, 둘째, 풀이 방법의 점진적 수준의 고양, 셋째, 문제 상황에 사용된 개념의 점진적 확대 등의 관점에서 관찰할 수 있다. 예를 들면, 문제와 풀이에 양수만 사용되다가 점차 음수를 사용하는 문제로 확장되거나, 풀이 방법이 행렬의 단순 풀이법에서 정부술(正負術)로 확대되고, 또한 문제 상황에 사용된 개념이 곡식의 양 등의 구체적 개념에서 가격, 마력 등의 추상적 개념으로 확대되는 양상을 보여 준다. 이러한 사실을 확인하기 위하여 방정장에서 다루는 문제들을 개괄적으로 살펴보기로 한다.

제 1 문. **今有 上禾三秉 中禾二秉 下禾一秉 實三十九斗. 上禾二秉 中禾三秉 下禾一秉 實三十四斗. 上禾一秉 中禾二秉 下禾三秉 實二十六斗. 問上中下禾一秉各幾何?**

문제에서 화(禾)는 곡물을 의미하고, 병(秉)은 곡물의 묶음을 의미한다. 여기서 실(實)은 곡물의 총량을 뜻하고, 두(斗)는 단위로서 '말'을 뜻한다. 그러면 문제는

문 1. 상화 3단, 중화 2단, 하화 1단은 합해서 39말이고, 상화 2단, 중화 3단, 하화 1단은 34

11) 구장산술에 사용된 용어의 발음과 의미를 설명한 **九章算術音義**에서는, 방정을 "方程 : 直成切. 方者 左右也, 程者 課率也. 左右課率 總統羣物, 故曰 方程."이라 설명한다. 즉, '程'은 '直(직)'과 '成(성)'의 소리를 잘라 모아 '정'으로 발음하고, '方'은 좌우, '程'은 비율을 매김의 뜻이며, 다루는 전체 물건들의 비율을 풀어내는 방법을 '방정'이라 한다고 설명한다.

말이며, 상화 1단, 중화 2단, 하화 3단은 39말이다. 상, 중, 하화 1단(의 양)은 얼마인가?

를 묻는다. 이 문제는 처음으로 方程術을 소개하는 문제로서 3개 식의 3원 1차 연립방정식을 다룬다. 문제의 풀이에 앞서 방정(술)을 物數程之並列爲行 故稱之方程 으로 상, 중, 하화 등의 物의 數를 나란히 써서 行[12]을 (만들어 행렬을) 만드는 것으로 설명하고 있다.

풀이(術曰)에서는 少行減多行 反復相減 則 頭位必先盡 으로 큰 수로 이루어진 행에서 작은 수로 구성된 행을 반복하여 위쪽 수가 없어질 때까지 뺀다고 설명한다. 이는 문제를 기술하는 첨가행렬을 하삼각행렬(lower triangular matrix)로 만들어 문제를 푼다는 뜻이다. 이상의 설명을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 24 & 1 & 1 \\ 66 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

제 2 문. **今有 上禾七秉 損實一斗 益之下禾二秉 而實一十斗. 下禾八秉 益實一斗與上禾二秉 而實一十斗. 問上下禾實一秉各幾何?**

여기서 첫 문장은 ‘상화 7단 − 1말 + 하화 2단 = 10말’임을 말하며, 풀이에 방정술을 사용(如方程)하라고 쓰여 있는데, 損之曰益 益之曰損[13]이라 하여 상수항(1말)을 이항할 수 있음을 설명한다. 제시된 풀이에 따라 행렬을 나타내보면 $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 8 & 2 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$ 과 같이 주어진다.

제 3 문. **今有 上禾二秉 中禾三秉 下禾四秉 實皆不滿斗. 上取中 中取下 下取上 各一秉 而實滿斗. 問上中下禾實一秉各幾何?**

상화 2단, 중화 3단, 하화 4단은 각각 1말이 되지 않는다. 상화에 중화 1단을 보태니 1말이 되고, 중화에 하화 1단을 보태어 1말이 되었다는 등, 풀이에서 음수를 다룰 수밖에 없는 상황을 주고 행(즉, 열)에 음수를 곱하여 다른 행에 더하는 풀이 방법을 소개한다. 이를 正負術이라고 부르며, 자연스럽게 0 을 포함한 유리수의 덧셈과 뺄셈을 소개한다.

제 4 문. **今有 上禾五秉 損實一斗一升 當下禾七秉. 上禾七秉 損實二斗五升 當下禾五秉. 問上下禾實一秉各幾何?**

여기서도 첫 문장이 ‘상화 5단 − 1말 1되 = 하화 7단’을 설명한다.[14] 풀이는 ‘如方程. 置 上

12) 구장산술의 행은 세로로 쓰여 있어 열의 형태를 지니나, 가우스소거법에서의 행의 역할을 한다. 그래서 본 글에서는 행(구장산술)과 열(선형대수)을 같은 의미로 사용한다.

13) (나의) 손실이 곧 (상대편의) 이득이며, (나의) 이득이 곧 (상대편의) 손실이다.

禾五秉正 下禾七秉負 損實一斗一升正'이라 하여 수에 '正' 또는 '負'를 붙여 양수와 음수를 나타내고, 상수항(1말 1되)뿐만 아니라 미지수(하화 7단)도 이항이 가능함을 예시한다.

제 5문과 제 6문은 제 4문과 거의 같으나, 약간의 계수와 미지수의 위치에 변형을 주고 있으며, 계수에서도 음수와 양수가 같이 나타나는 문제이다.

제 7 문. **今有 牛五 羊二 直金十兩. 牛二 羊五 直金八兩. 問牛羊直金幾何?**

이 문제는 2원 1차 연립방정식 문제로, 오히려 제 1 문보다도 쉬운 문제이다. 그러나 풀이 과정에서 제 1 문은 편승(偏乘, 한 행에만 곱함)과 직제(直除, 뺄셈)을 사용하였음에 비해, 여기서는 양 행에 수를 곱하여 열연산(즉, 행연산)을 해서 문제를 해결한다.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 25 & 4 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 21 & 4 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}, \text{ 그래서 하화 } = \frac{20}{21}.$$

제 8문. **今有 賣牛二、羊五，以買十三豕，有餘錢一千。賣牛三、豕三，以買九羊，錢適足。賣羊六、豕八，以買五牛，錢不足六百。問牛、羊、豕價各幾何？**

둘째 문장이 소와 돼지를 3마리씩 팔고 양 9마리를 사니 돈이 딱 들어맞아 남음이 없다고 하여, 이를 행으로 쓰면 $(3 - 9\ 3\ 0)$이 되어 상수항이 0 인 1차식이 된다. 이 문제는 3원 1차 연립방정식을 다룬다.

제 9문. **今有 五雀 六燕 集稱之衡 雀俱重 燕俱輕. 一雀一燕交而處 衡適平. 幷燕雀重一斤. 問燕雀一枚各重幾何?**

문제 상황이 제법 복잡하다. 참새 5마리와 제비 6마리를 천칭에 올려 놓아보니 참새가 제비보다 무거웠다. 참새와 제비를 1마리씩 바꾸니 평형을 이루었다. 참새와 제비 전체의 무게가 1근이면 참새와 제비 각각 1마리의 무게는 얼마인가를 묻고 있다.

풀이는 如方程, 交易質之, 各重八兩 으로 쓰여 있어서, 방정술을 쓰되, 4마리의 참새와 1마리의 제비의 무게가 1마리의 참새와 5마리의 제비 무게와 같고 이들의 무게를 모두 합한 것이 1근(=16량)이므로 각 편의 무게가 8량임을 이용하여 방정식을 풀도록 하고 있다.

제 10문. **今有 甲乙二人持錢不知其數. 甲得乙半而錢五十. 乙得甲太半而亦錢五十. 問甲乙持錢各幾何?**

---

14) 승(升)은 곡식의 양의 단위, 되. 10升 = 1斗, 즉 10되 = 1말.

이 문제는 갑이 을이 가진 돈의 반을 얻으면 50전이 되고, 을이 갑이 가진 돈의 태반(2/3)을 얻으면 또한 50이 될 때, 갑과 을이 가진 돈을 구하는 문제이다. 이 문제는 분수 계수를 다룬다. 제 11 문은 소와 말의 값을 구하는 문제로서 분수 계수를 포함하면서 항을 이항해서 풀이를 하는 연립방정식 문제이다. 제 12 문은 말의 힘을 묻는 문제로 풀이 과정에 0 이 나오는 3원 1차 연립방정식을 다룬다.

제 13 문. **今有五家共井. 甲二綆不足, 如乙一綆. 乙三綆不足, 如丙一綆. 丙四綆不足, 如丁一綆. 丁五綆不足, 如戊一綆. 戊六綆不足, 如甲一綆. 如各得所不足一綆, 皆逮. 問井深、綆長各幾何？**

이 문제는 우물을 공동으로 사용하는 다섯 집 갑, 을, 병, 정, 무가 있는데, 이들이 사용하는 두레박의 줄이 우물의 깊이에 모자라는 상황을 설명하고 있다. 예를 들어, 갑은 2경의 줄이 있어 을의 1경만큼의 줄을 더해야 우물의 물에 도달한다고 설명하고 있다. 이러한 상황이 5개가 주어져 5개의 식이 주어진다. 그런데 문제는 각 집의 두레박의 길이와 함께 우물의 깊이를 묻고 있어, 5개의 식으로 구성된 6원 1차 연립방정식 문제이다. 이는 일종의 부정방정식으로 이해할 수 있다. 미지수의 개수가 주어진 방정식의 개수보다 많지만 상수항이 모두 0인 방정식이어서 미지수(갑, 을, 병, 정, 무, 우물의 깊이) 간의 비례를 이용하여 해를 구한다.

이후, 제 14 문은 0 을 포함한 4원 1차 연립방정식, 제 15 문은 제 2, 4, 8 문과 관련된 3원 1차 연립방정식, 제 16 문은 3원 1차 연립방정식, 제 17 문은 4원 1차 연립방정식 등을 다룬다. 그리고 마지막으로 제 18 문은 다음과 같이 5원 1차 연립방정식을 다룬다. 하지만 18 문에서는 상수항을 제거하는 새로운 풀이 방법을 제시한다.

제 18 문. **今有麻九斗、麥七斗、菽三斗、答二斗、黍五斗, 直錢一百四十；麻七斗、麥六斗、菽四斗、答五斗、黍三斗, 直錢一百二十八；麻三斗、麥五斗、菽七斗、答六斗、黍四斗, 直錢一百一十六；麻二斗、麥五斗、菽三斗、答九斗、黍四斗, 直錢一百一十二；麻一斗、麥三斗、菽二斗、答八斗、黍五斗, 直錢九十五。問一斗直幾何？**

3.3 구장산술의 교육학적 의미

우리는 앞 절에서 18 개의 문제 중 10 개 문제 이상을 구체적으로 살펴보았고 나머지 문제들에 대하여는 그 문제가 다루는 수학을 피상적으로 기술하였다. 그럼에도 불구하고 우리는 수준을 점진적으로 높여가는 구장산술의 방정식 이론의 전개를 관찰해 볼 수 있다.

우선 제 1 문은 방정식(방정)을 소개하고, 그의 풀이 방법으로 방정술(행렬 계산법)을 소개한다. 제 2 문에서 문제의 내용은 오히려 쉬워졌지만 상수항을 이항할 수 있는 풀이 방법

을 추가하고, 또 제 3 문에서 정부술을 소개한다. 이들 문제들로 1차 연립방정식 문제와 기본적 풀이 방법들을 제시한다.

제 4, 5, 6 문 등은 제 2, 3 문 등에 소개된 개념을 수용할 수 있는 문제로서 음수의 사용과 이항 등이 포함된 수학을 다룬다.

제 7 문에서 문제 내용이 관찰 가능했던 곡식의 양 등의 구체적 대상에서 가격 등과 같은 추상적 대상을 다루는 문제로 변화된다. 이는 피아제의 인지발달이론에서 구체적 조작기에서 추상적 조작기로 단계가 넘어가는 과정과 흡사하다. 그러면서도 쉬운 문제 상황에서 새로운 풀이 방법을 소개함으로써 방정식론을 확장한다. 제 8 문에서는 0 의 개념을 계산 가능한 대상으로 도입한다.

제 9 문은 1차방정식의 응용문제로 부등식을 조건으로 사용하는 문제 상황을 다룬다.

제 10, 11 문 등은 문제에 사용되는 수를 분수까지 확장하면서 방정식 이론을 보다 확장한다. 이하 제 12 문에서 제 17 문에 이르기까지 문제 상황을 변화시켜가며 다양한 문제들을 제시하여 방정식 이론의 확실한 인식을 유도한다. 특히 제 13 문에서는 부정방정식에 해당하는 상황을 제시하여 방정식 이론을 보다 더 확장한다.

마지막으로 제 18 문에서 5원 1차 연립방정식을 다루면서 이상의 문제들에서 다루었던 풀이 방법을 복잡한 상황에 적용할 수 있음을 확인하는 한편, (이 문제의 풀이에 대한 유휘의 주에서) 이전의 문제들을 다루면서 익힌 이론을 기계적으로 따라 하지만 말고 자기만의 생각으로 새로운 풀이를 개발할 수 있기를 권장하고 있다.

이상에서 구장산술 방정장의 18개 문제의 성격을 살펴보았는데, 이제 이 문제들이 방정을 공부하는 사람(학생)의 어떠한 인지 단계를 유도할 수 있는지 살펴보도록 하자.

우선 제 1, 2, 3 문은 방정식 이론의 기본적 소개에 해당하여 학생의 적응기를 목표로 삼았다고 할 수 있다. 이로써 방정식론을 소개받은 후 학생에게 풀이 방법에 이항이 포함된다거나 음수 또는 0 등이 사용되는 등 방정식론을 익힐 수 있는 문제로서 제 4, 5, 6 문 등이 제공된다. 이러한 문제들은 학생이 방정식론을 수용할 수 있는 상황을 유도한다.

제 7 문에서 문제가 다루는 대상이 관찰 가능한 구체적 대상에서 사고 가능한 추상적 대상으로 변화한다. 이는 새로운 개념의 소개로서 학생의 적응기를 유발하는 문제이기도 하고, 방정식론의 대상의 확대와 이전의 풀이 방법의 활용에 따른 새로운 풀이 방법의 소개라는 점에서는 방정식의 수용을 유발하는 문제이기도 하다.

이후 다소 구분이 어렵기는 하지만, 대부분의 문제(8, 10, 11, 12, 14, 17)들이 방정식론의 보다 확실한 이해를 유도하고, 실용문제(9, 12, 13, 14, 15, 16)를 제시하여 방정식론의 활용을 유도한다. 마지막으로 제 13 문은 부정방정식의 형태로 문제를 제시하여 학생의 입장에서는 방정식론의 활용 내지는 이론의 확대를 유도한다. 또한 제 18 문은 보다 복잡한 상황에서 이론을 적용할 수 있도록 하며, 학생 자신의 해법을 개발할 수 있도록 권장하는 이론의 활용을 유도한다.

이상의 방정장의 문제들과 인지능력의 성장 원리를 비교하여 본 결과를 다음의 표로 정

리할 수 있다.

※ 숫자는 문제의 번호를 의미하고, 화살표는 진행 방향을 의미함.

적응기	수용기		완성기	활용기
	↗ 2	↘ ↗ 4, 5, 6		→ 9, 12, 14, 15, 16
1	→ 3		↘ ↗ 12, 14, 17	
	↘ 7	↘ → 7, 8, 10, 11		→ 13, 18

<인지능력의 성장 과정과 비교한 문제의 성격>

위의 표로 제시한 문제들의 구분이 문제와 내용의 분석자의 관점에 따라 다소 다를 수는 있다. 특히, 활용기의 문제들은 완성기의 문제들과 뚜렷이 구분짓기는 어렵다. 하지만 3.2절에서 전술한 구장산술의 방정장의 문제들의 점진적 진행의 세 가지 특성, 즉 수학 내용과 풀이 방법의 점진적 수준 고양, 사용 개념의 점진적 확대 등의 관점에서 인지능력의 성장 원리과 비교하였을 때 상기 표와 같은 정도로 구분할 수 있을 것으로 사료된다.

구장산술은 사람의 인지능력을 이해하기 훨씬 이전에 저술된 책임에도 불구하고 사람의 인지성장 원리에 입각한 서술 형태를 보여주고 있다. 실제, 서양에서의 심리학이 20세기에 정립되고 연구되기 시작했지만 사람의 심리가 20세기 이전에는 없었던 것이 아닌 것처럼, 그래서 사람의 심리를 20세기 이전의 사람들이 인식하지 못했던 것은 아닌 것처럼, 구장산술의 수학 이론의 기술도 마치 교육학이 이미 개발되어 효율적인 교육과정을 적용한 듯한 이론의 전개를 보여주고 있다.

특히, 제 18문의 유휘의 주는 눈여겨볼 만하다. 그는 어리석은 사람은 자신의 생각이 없이 가르침을 받은 대로 기계적인 과정만을 되풀이를 한다[15]면서, 그런 경우 참으로 많은 계산을 반복해야 할 뿐만 아니라 많은 계산 과정에서 계산이 틀려 바른 답을 구할 가능성이 적어짐을 지적하였다. 그러면서 풀이 전체를 계획을 세워 보다 쉬운 방법의 계산과정을 유도해 낼 수 있음을 강조하며 그러한 입장에서 자기 나름대로의 새로운 풀이 방법을 제시하였다. 이는 수학을 단순풀이과정의 답습이 아닌 자신의 창의적 사고를 유도하는 훈련으로 이해하고 있음을 뜻하며, 이러한 의미가 바로 수학교육의 참 뜻임을 되새겨볼 필요가 있다.

4. 결론과 제언

우리는, 특히 한국 사람들은 어떠한 과거를 가졌을까? 본 저자는 1970년대 후반, 미국의 TV 드라마 '뿌리'[16]가 우리나라에서 방영되었을 때, 미국 흑인들의 역사찾기를 매우 흥미

15) *徒按本術者 或 用算而布氈方, 好煩而喜誤 會 不知其非反欲 以多爲貴 故 其算也.*[유휘의 주 중]

16) 미국 흑인노예의 역사를 다룬 알렉스 헤일리 원작 소설. 1977년 미국에서 TV 드라마로 제작, 방영됨. 이후 미국의 인종문제에 대한 태도가 획기적으로 변화됨. 피바디 상 등 수상.

롭게 보았다. 그러면서도 우리의 뿌리에 대해서는 크게 관심을 가져 보지 못하였다. 우리는 동양 사람이면서도 서양문명의 사회 환경 속에서 살면서 동시에 동양문명에 대한 이해는 매우 부족한 듯하다. 특히 수학 또는 과학의 역사는 더욱 그러하다. 더욱이 한국의 수학사는 세계 역사 속에서의 인지도가 매우 낮다([10]).

우리가 불교와 유교 문화권의 과거를 지녔기에 우리가 인식하지 못하여도 우리의 생활 속에 그러한 문화가 살아 존재하듯이, 우리가 우리의 수학사를 잘 알지 못하고 세계 속에 우리의 수학사가 알려져 있지 않아도 우리에게는 그러한 역사가 존재하고 우리의 삶 속 어디인가에 아직도 살아 있을 것 같다.

구장산술의 방정장의 교육학적 의미를 살펴보면서 몇 가지 소득이 있었다. 우선, 유클리드의 원론에서 느끼는 옛 사람들의 지혜를 구장산술에서도 느낄 수 있었다. 첫째, 서양에 앞서 더 발전된 방정식론을 지녔던 동양문명이 놀라웠고, 둘째 그러한 수학 내용의 기술방법이 최근의 인지이론에 입각한 듯한 체계적 형태를 지니고 있음이 놀라웠고, 문제에서 다루어지는 문제 상황으로부터 느낄 수 있는 무릇 2천년 이전의 동양사회의 발전상이 놀라웠다. 다음으로, 옛 동양사회, 특히 지금의 동북아시아에서의 사회, 당시 국경이 확정되어 있지 않던 사회의 문명이 현재의 중국 영토 내에 속하였다고 하여 중국의 역사만으로 치부하여 관심을 덜어 버릴 것인가, 그들의 역사가 기실은 우리 역사의 일부임을 생각해봐야 하지 않을까 하는 생각을 해보았다. 마지막으로 정치, 사회의 역사가 아닌 수학과 같은 특수 분야에 대한 역사의 연구가 우리의 뿌리를 찾는 일에 의미가 있고 때로는 교육학적 가치도 제공할 수 있다는 생각이 들었다. 이에, 중국을 포함한 우리의 수학사에 관한 연구, 더 나아가 우리 내지는 우리 문명과 문화의 뿌리찾기가 힘을 쏟아부어볼 만한 일이라고 결론을 내리며, 수학사의 연구에 노력하기를 제언한다.

감사의 글. 방정의 교육학적 의미에 관한 문제를 소개해주시고, 관련 사료의 준비에도 많은 조언을 주신 홍성사 교수님께 심심한 감사의 뜻을 전합니다.

참고 문헌

1. 강신원, 역사 사회 환경과 구장산술의 구조, 한국수학사학회지 (2006)
2. 고영미, 이상욱, 조선 산학의 흐름, 한국수학사학회지 제22권 제3호 (2009. 8.), 61-78.
3. 고영미, 이상욱, 순자와 묵자의 논리학, 준비 중.
4. 郭書春 匯校, 九章算術, 療寧敎育出版社, 1990, 瀋陽.
5. 김교빈, 이현구, 동양철학에세이, 동녘, 초판 1993, 2판(개정증보판) 2009.
6. 김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 수학교육과정과 교재연구, 경문사, 2006.

7. 김용운, 김용국, 3. 구장산술의 세계, 한국수학사(개정판), 살림Math, (주)살림출판사, 2009, 95-106.
8. 김홍종, 문명, 수학의 필하모니, 효형출판, 2009.
9. 남병길, 구장술해, 한국과학기술사자료대계, 수학편 6, 려강출판사, 1985.
10. 이상욱, 고영미, 세계 속의 한국수학, 한국수학사학회지 제 22권 제 3호 (2009.8.), 103-112.
11. 이우영, 신항균, 수학사, 경문수학산책 4, 경문사.
12. 홍성사, 구장산술, 제 8 장 방정, 수학사학회 콜로퀴엄(2009년 4월 11일) 발표자료.
13. 홍성사, 홍영희, 劉徽와 九章算術, 수학사학회지 제 11 권 (제 1 호), 1998, 27-35.
14. 홍성사, 홍영희, 南秉吉의 方程式論, 한국수학사학회지 제 20 권 (제 2 호), 2007년 5월, 1-18.
15. 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽, 수학교육학신론(개정판), 문음사, 2007.
16. Ed Dubinsky, Using a Theory of Learning in College Mathematics Courses. http://ltsn.mathstore.ac.uk/newsletter/may2001/pdf/learning.pdf.
17. Ed Dubinsky, Michael A. McDonald, APOS : A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Matheamtics Education Research, www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf.
18. Shen Kangshen, John N. Crossley, Anthony W.-C. Lun, The Nine Chapters on the Mathematical Art, Oxford University Press and Science Press, Beijing, 1999.
19. Charles Van Doren, A History of Knowledge : Past, Present, and Future, A Ballantine Book, NY, The Random House Publishing Group, 1991.
20. 中國歷代算學集成, 上, 靖玉樹 編勘, 山東人民出版社, 1994, 濟南.
21. 中國哲學書電磁化計劃/ 算書/ 九章算術/ 方程/ http://chinese.dsturgeon.net/
22. Constructivism, wikipedia, http://www.wikipedia.org.
23. Piaget, wikipedia, http://www.wikipedia.org.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 23 No. 1 (Feb. 2010), 25-40

Educational Meaning of the Nine Chapters

University of Suwon **Koh, Youngmee**
University of Suwon **Ree, Sangwook**

We first seek a principle of cognitive development processes by reviewing and summarizing Piaget's cognitive development theory, constructivism and Dubinsky's APOS theory, and also the epistemology on logics of 墨子 and 荀子. We investigate Chapter 8 方程 on the theory of systems of linear equations, of the Nine Chapters, one of the oldest ancient Asian mathematical books, from the viewpoint of our principle of cognitive development processes. We conclude the educational value of the chapter and the value of the research on Asian ancient mathematical works and heritages.

Key words : The Nine Chapters, Rectangular arrays, Piaget, Constructivism, APOS Theory.

2010 Mathematics Subject Classification : 01A25, 01A90, 97A30, 97C30

접수일 : 2009년 12월 13일 수정일 : 2010년 1월 19일 게재확정일 : 2010년 1월 22일