한국방재학회논문집
제10권 1호 2010년 2월
pp. 103 ~ 109

동역학적 경계조건을 갖는 동수압 모형의 자유수면흐름에의 적용

Application of a Non-Hydrostatic Pressure Model with Dynamic Boundary Condition to Free Surface Flow

이진우* · 정우창** · 조용식***
Lee, Jin Woo · Jeong, Woo Chang · Cho, Yong-Sik

Abstract

In this study, a three-dimensional non-hydrostatic pressure model based on a normalized vertical coordinate system for free surface flows is presented. To strongly couple the free surface and non-hydrostatic pressure with the momentum equations, a double predictor-corrector method is employed. The study is especially focused on implementing the dynamic boundary condition (a zero pressure condition) at the free surface with ignoring of the atmospheric pressure. It is shown that the boundary condition can be specified easily with a slight modification to existing models.

key words : Free surface flows, non-hydrostatic pressure, dynamic pressure boundary, wave propagation

요 지

본 연구에서는 자유수면 흐름에 적용할 수 있는 연직방향에 대해 좌표변환된 3차원 동수압 모형을 제시하였다. 제시한 모형은 자유수면과 동수압의 해석을 위하여, 2중 예측-수정(double predictor-corrector)방법을 적용하였다. 본 연구에서는 정확한 동역학적 경계조건(자유수면에서의 압력은 0인 조건)을 적용하는 방법을 검토하였고, 제시한 모형을 이용한 수치모의 결과를 해석해와 비교하여 본 연구에서 제시한 모형의 우수성을 검증하였다.

핵심용어 : 자유수면 흐름, 동수압, 동역학적 경계조건, 파랑의 전파

1. 서 론

최근 동역학적 경계조건의 정확한 적용에 관한 연구가 활발하게 이루어지고 있다. Stelling과 Zijlema(2003)는 연직방향 유속과 더불어 연직방향의 표면에 동수압을 정의하는 변형된 엇갈림 격자망을 이용하였으며, 이에 따라 동수압이 자유수면에 정의되면서 동역학적 경계조건을 정확하게 대입하였다. Yuan과 Wu(2004)는 본 연구에서 사용된 격자망과 비슷한 Arakawa C-grid를 사용하고 있지만, 연직방향의 운동량 방정식을 자유수면 격자층 중앙에서부터 자유수면까지 적분하여 자유수면에서의 동역학적 경계조건을 부여하였다.

앞에서 언급된 기존의 연구는 동역학적 경계조건의 정확한 계산을 통하여 비교적 적은 연직 격자층을 이용하여 복잡한 비선형 파랑의 전파문제를 해석하였다. 그러나 일반적인 3차원 모형의 필요성은 파랑의 전파문제뿐만 아니라 3차원 유속장을 계산하고 이에 따른 오염물의 거동 해석 및 밀도차에 의한 순환 해석 등에 유용하다. 본 연구에서는 자유수면 격자층에서의 정수압 분포 가정 대신 선형보간법을 이용하여 자유수면 격자층에서 동수압을 구하는 방법을 제시하였다.

2. 수치모형

전체 압력을 정수압과 동수압으로 분류하고 3차원 Navier–Stokes방정식에 대입하여 정리하면 자유수면을 갖는 비압축성 유체에 대한 지배방정식을 얻을 수 있다(Casulli, 1999). 자유수면 및 하상고의 변화를 쉽게 적용하기 위해 본 연구에서는 연직방향을 좌표변환한 일반좌표계를 사용하였으며, 이는 Phillips(1957)에 의해 도입된 시그마 좌표계와 흡사하다. 수평방향 좌표가 시간과 연직방향에 대해 독립적이라 가정하고, 직교좌표계(t, x, y, ζ)를 일반좌표계(normalized vertical coordinate system, t^*, x^*, y^*, ζ^*)로 변환하였으며, 좌표변환된 방정식의 압력항을 연쇄법칙을 이용하여 정수압과 동수압으로 분리하면 지배방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

*한양대학교 일반대학원 건설환경공학과 박사과정(E-mail : moonguy@hanyang.ac.kr)
**정회원 · 경남대학교 공과대학 토목공학과 교수
***정회원 · 한양대학교 공과대학 건설환경공학과 교수(교신저자)

$$\frac{\partial}{\partial x^*}\left(\frac{u}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial y^*}\left(\frac{v}{J}\right)+\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\hat{w}}{J}\right)=0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t^*}+u\frac{\partial u}{\partial x^*}+v\frac{\partial u}{\partial y^*}+W\frac{\partial u}{\partial \zeta}=-g\frac{\partial h}{\partial x^*}-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial q}{\partial x^*}+\zeta_x\frac{\partial q}{\partial \zeta}\right) \tag{1b}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t^*}+u\frac{\partial v}{\partial x^*}+v\frac{\partial v}{\partial y^*}+W\frac{\partial v}{\partial \zeta}=-g\frac{\partial h}{\partial y^*}-\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial q}{\partial y^*}+\zeta_y\frac{\partial q}{\partial \zeta}\right) \tag{1c}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t^*}+u\frac{\partial w}{\partial x^*}+v\frac{\partial w}{\partial y^*}+W\frac{\partial w}{\partial \zeta}=-\frac{\zeta_z}{\rho_0}\frac{\partial q}{\partial \zeta} \tag{1d}$$

여기서, $\zeta_t=Jz_t^*$, $\zeta_x=Jz_x^*$, $\zeta_y=Jz_y^*$, $\zeta_z=J$, $J=1/z_\zeta$이며, u, v와 w는 각각 x, y, z 방향의 유속성분, $\tilde{W}=\zeta_x u+\zeta_y v+\zeta_z w$, $W=\zeta_y+\tilde{W}$, t는 시간, q는 동수압, h는 수심을 나타낸다(그림 1). g는 중력가속도이고, ρ_0는 밀도로서 상수이다.

자유수면의 해석에는 연속방정식 (1a)을 수심에 대하여 적분하여 얻어지는 자유수면방정식(free surface evolution equation)을 사용한다.

$$\frac{\partial h}{\partial t^*}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial x^*}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y^*}=0 \tag{2}$$

여기서, $\bar{u}$와 $\bar{v}$는 수심 적분된 유속이고, 위 첨자(*)는 일반좌표계를 나타내기 위해 사용되었으나 간편성을 위하여 이후부터는 생략하였다.

3. 수치해법

식 (1)과 식 (2)의 수치해를 구하기 위하여, 엇갈림 격자망을 이용하였다. 여기서 x, y, z 방향에서 격자점은 $1\le i\le N_1$, $1\le j\le N_2$, $1\le k\le N_3$ 범위 내에서 각각의 격자간격인 Δx, Δy, $\Delta\zeta$ 만큼 변화한다. 본 연구에서는 세단계의 방법을 이용하여 운동량방정식을 해석하였다. 첫번째 단계에서는 양해적인 방법으로 운동량방정식 (1b)~(1d)을 해석한다.

$$u^*_{i+1/2jk}=u^n_{i+1/2jk}-F(u^n_{i+1/2jk})-\Delta tg\frac{h^n_{i+1j}-h^n_{ij}}{\Delta x}-\frac{\Delta t}{\rho_0}\left[\frac{q^n_{i+1jk}-q^n_{ijk}}{\Delta x}+(\zeta_x)^n_{i+1/2jk}\frac{q^n_{i+1jk+1}-q^n_{i+1jk-1}+q^n_{ijk+1}-q^n_{ijk-1}}{4\Delta\zeta}\right] \tag{3a}$$

$$v^*_{i+1/2jk}=v^n_{ij+1/2k}-F(v^n_{ij+1/2k})-\Delta tg\frac{h^n_{ij+1}-h^n_{ij}}{\Delta y}-\frac{\Delta t}{\rho_0}\left[\frac{q^n_{ij+1k}-q^n_{ijk}}{\Delta y}+(\zeta_y)^n_{ij+1/2k}\frac{q^n_{ij+1k+1}-q^n_{ij+1k-1}+q^n_{ijk+1}-q^n_{ijk-1}}{4\Delta\zeta}\right] \tag{3b}$$

$$w^*_{ij+1/2}=w^n_{ijk+1/2}-\frac{\Delta t}{\rho_0}(\zeta_z)^n_{ij+1/2k}\frac{q^n_{ijk+1}-q^n_{ijk}}{\Delta\zeta} \tag{3c}$$

여기서, Δt는 단계씩 증가하는 시간을 나타내고 F는 3차 정확도의 풍상차분법에 흐름제안자(flux limiter)를 도입한 TVD(total variation diminishing)방법(Shi와 Toro, 1996)으로 차분한 이송항의 근사값이다. 만약, 확산항이 포함된다면

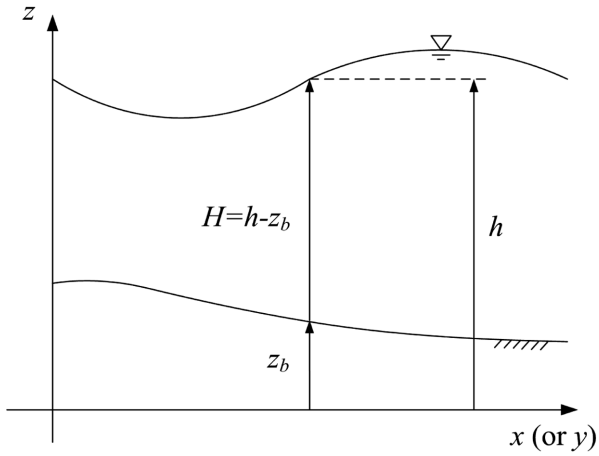


그림 1. 자유수면과 하상고의 정의

확산항의 연직방향 미분항은 연직방향의 상대적으로 작은 격자간격으로 인해 수치기법이 불안정해지는 문제가 발생한다. 이러한 문제는 음해적인 방법으로 차분하여 해결할 수 있지만, 본 연구의 경우 확산항을 다루지 않으므로 생략하였다.

다음 두번째 단계에서는 자유수면 경사항의 영향을 고려하여 수평방향의 유속성분을 계산한다.

$$u^{**}_{i+1/2jk}=u^*_{i+1/2jk}-\Delta t\theta g\frac{\partial}{\partial x}(\delta\tilde{h}^n_{i+1/2j}) \tag{4a}$$

$$v^{**}_{ij+1/2k}=v^*_{ij+1/2k}-\Delta t\theta g\frac{\partial}{\partial y}(\delta\tilde{h}^n_{ij+1/2}) \tag{4b}$$

여기서, $\delta\tilde{h}^n=\tilde{h}^{n+1}$, $\tilde{h}^{n+1}$는 마지막 단계에서 수정되는 자유수면이고, θ는 0.5에서 1.0까지 변화하는 변수이다. 식 (3)와 식 (4)를 합치면, θ=0.5일 경우 자유수면 경사항은 2차 정확도로 차분된다. Casulli와 Cattani(1994)의 연구를 인용하면 식 (4)는 자유수면의 전파속도와 시간증분에 관계없이 무조건적으로 안정적인 계산을 수행할 수 있다. 일반적으로 식 (4)는 자유수면 보정 단계(free surface correction step)라고 한다. 연직방향의 유속성분 w는 식 (1d)에서와 같이 h에 대한 함수가 아니므로 $w^*_{ijk+1/2}$는 $w^{**}_{ijk+1/2}$로 바로 대치할 수 있다.

마지막 세번째 단계에서는 동수압을 고려한 다음 식으로부터 최종유속장을 계산한다.

$$u^{n+1}_{i+1/2jk}=u^{**}_{i+1/2jk}-\frac{\Delta t}{\rho_0}\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial x}+\zeta_x\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\zeta}\right)^{n+1}_{i+1/2jk} \tag{5a}$$

$$u^{n+1}_{ij+1/2k}=u^{**}_{ij+1/2k}-\frac{\Delta t}{\rho_0}\left(\frac{\partial\tilde{q}}{\partial y}+\zeta_y\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\zeta}\right)^{n+1}_{ij+1/2k} \tag{5b}$$

$$w^{n+1}_{ijk+1/2}=w^{**}_{ijk+1/2}-\frac{\Delta t}{\rho_0}\left(\zeta_z\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\zeta}\right)^{n+1}_{ijk+1/2} \tag{5c}$$

여기서, $\tilde{q}^{n+1}$는 동수압의 수정항이다. 2단계와 3단계의 풀이과정은 다음과 같다.

식 (3a)와 (3b)를 해석하여 구한 중간단계의 수평 유속장을

자유수면 방정식 (2)에 대입하여 업데이트한다. Casulli와 Cantani(1994)의 것과 유사한 반 음해법을 이용하면 식 (2)는 다음과 같이 이산화할 수 있다.

$$\delta\tilde{h}_{ij}^{n+1}+\Delta t\theta\left[\frac{\bar{u}_{i+1/2jk}^{**}-\bar{u}_{i-1/2jk}^{**}}{\Delta x}+\frac{\bar{v}_{ij+1/2k}^{**}-\bar{v}_{ij-1/2k}^{**}}{\Delta y}\right]=$$
$$-\Delta t(1-\theta)\left[\frac{\bar{u}_{i+1/2jk}^{n}-\bar{u}_{i-1/2jk}^{n}}{\Delta x}+\frac{\bar{v}_{ij+1/2k}^{n}-\bar{v}_{ij-1/2k}^{n}}{\Delta y}\right] \tag{6}$$

식 (6)이 수심 적분된 유속을 사용하므로 식 (4)를 적분하면 다음과 같다.

$$\bar{u}_{i+1/2j}^{**}=\bar{u}_{i+1/2j}^{*}-gH_{i+1/2j}^{n}\Delta t\theta\frac{\partial}{\partial x}(\delta\tilde{h}_{i+1/2j}^{n}) \tag{7a}$$

$$\bar{v}_{ij+1/2}^{**}=\bar{v}_{ij+1/2}^{*}-gH_{ij+1/2j}^{n}\Delta t\theta\frac{\partial}{\partial y}(\delta\tilde{h}_{ij+1/2}^{n}) \tag{7b}$$

여기서 $H=h-z_b$는 수심이다. 식 (7)을 식 (6)에 대입하면 다음의 자유수면 수정식을 얻을 수 있다(Chen, 2003).

$$\delta\tilde{h}_{ij}^{n}-g(\theta\Delta t)^2\left[\frac{\alpha_1^+}{\Delta x}\left(\frac{\partial\delta\tilde{h}^n}{\partial x}\right)_{i+1/2j}-\frac{\alpha_1^-}{\Delta x}\left(\frac{\partial\delta\tilde{h}^n}{\partial x}\right)_{i-1/2j}+\frac{\alpha_2^+}{\Delta y}\left(\frac{\partial\delta\tilde{h}^n}{\partial y}\right)_{ij+1/2}\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha_2^-}{\Delta y}\left(\frac{\partial\delta\tilde{h}^n}{\partial y}\right)_{ij-1/2}\right]=-\theta\Delta t\left[\frac{\bar{u}_{i+1/2j}^{*}-\bar{u}_{i-1/2j}^{*}}{\Delta x}-\frac{\bar{v}_{ij+1/2}^{*}-\bar{v}_{ij-1/2}^{*}}{\Delta y}\right]$$
$$-(1-\theta)\Delta t\left[\frac{\bar{u}_{i+1/2j}^{n}-\bar{u}_{i-1/2j}^{n}}{\Delta x}-\frac{\bar{v}_{ij+1/2}^{n}-\bar{v}_{ij-1/2}^{n}}{\Delta y}\right] \tag{8}$$

여기서 $\alpha_1^{\pm}=H_{i\pm1/2}^{h}$이고 $\alpha_1^{\pm}=H_{ij\pm1/2}^{h}$이며, 위의 식 (8)은 자유수면 보정식이라고 한다(Chen, 2003). 중앙차분법을 이용하여 자유수면 항을 차분하면 $\delta\tilde{h}^n$에 관한 선형 연립방정식을 얻을 수 있고 이는 적절한 경계조건을 대입한 후, 반복계산법에 의해 해를 구할 수 있다.

연립방정식에 의해 얻어지는 계수행렬은 비대칭 행렬이므로 본 연구에서는 SGS(Symmetric Gauss-Seidel)방법(Saad, 1992)으로 전처리(preconditioning)한 BI-CGSTAB(bi-conjugate stabilized)법(Van der Vorst, 1992)을 이용하여 해석하였다. 만약 경계에서의 수면 변위가 명확하게 주어진다면, 직접 식 (8)에 대입할 수 있고, i=1/2이 고체면이라고 가정하면 벽면에서의 수평방향 유속은 0($\bar{u}_{1/2,j}=0$)이며, 이것을 식 (7a)에 대입하면 경계 외부의 자유수면을 제거할 수 있다. 식 (8)을 이용하여 자유수면을 구한 후, 식 (4)로부터 새로운 수평방향 유속을 구할 수 있다.

또, 연직방향 유속이 고려되지 않았기 때문에 유속장은 각각의 계산격자에서 국부적인 질량보존법칙(또는 연속방정식)을 만족하지 못할 수 있다. 동수압 보정 단계에서는 연속방정식 (1a)과 동수압을 고려함으로써 전 단계에서 구한 유속과 자유수면이 국부적인 질량보존법칙을 만족하도록 수정할 수 있다. 자유수면 아래에 위치한 연직 격자층에 대해 연속방정식 (1a)을 차분하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{u^{n+1}}{J^n}\right)_{i+1/2jk}-\left(\frac{u^{n+1}}{J^n}\right)_{i-1/2jk}\right]+\frac{1}{\Delta y}\left[\left(\frac{v^{n+1}}{J^n}\right)_{ij+1/2k}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{v^{n+1}}{J^n}\right)_{ij-1/2k}\right]+\frac{1}{\Delta\zeta}\left[\left(\frac{\tilde{W}^{n+1}}{J^n}\right)_{ijk+1/2}-\left(\frac{\tilde{W}^{n+1}}{J^n}\right)_{ijk-1/2}\right]=0 \tag{9}$$

위 식을 이용하기 위해서는 식 (5c)를 $\tilde{W}$에 대한 식으로 변환해야 하며 이는 아래와 같다.

$$\tilde{W}_{ijk+1/2}^{n+1}=\tilde{W}_{ijk+1/2}^{**}$$
$$-\frac{\Delta t}{\rho_0}\left[\zeta_x\frac{\partial\tilde{q}}{\partial x}+\zeta_y\frac{\partial\tilde{q}}{\partial y}+(\zeta_x\zeta_x+\zeta_y\zeta_y+\zeta_z\zeta_z)\frac{\partial\tilde{q}}{\partial\zeta}\right]_{ijk+1/2}^{n+1} \tag{10}$$

식 (6a), (6b)와 식 (11)을 식 (10)에 대입하고 정리하면 $\tilde{q}^{n+1}$가 미지수인 Poisson방정식을 얻게 된다. 이 식은 자유수면 보정식과 유사하게 BI-CGSTAB방법을 이용하여 풀이할 수 있다. 바닥 경계를 포함한 고체 경계면에서의 경계조건은 앞에서 소개한 유속의 경계조건으로 대치할 수 있다. 개방경계(open boundary)에서는 정수압 분포가정 $q=\tilde{q}=0$을 이용한다. 그러나 좌표변환을 하였으므로 이러한 경계조건을 적용한 후에도 경계 외부의 추가적인 값을 처리하여야 하며, 이는 경계 내의 두 개의 값을 이용하여 선형보간 하였다. 예를 들면, $\tilde{q}_{ij0}=2\tilde{q}_{ij1}-\tilde{q}_{ij2}=0$이다.

자유수면에서는 두 개의 경계조건 즉, 운동학적 경계조건과 동역학적 경계조건이 필요하다. 본 연구에서 사용하는 일반좌표계에서 운동학적 경계조건은 $(W=\tilde{W}+\zeta_t)_{ijN_3+1/2}=0$과 같이 표현할 수 있고, $\zeta_t=Jz_t*$, $\zeta_x=Jz_x*$, $\zeta_y=Jz_y*$, $\zeta_z=J$, $J=1/z_\zeta$를 이용하면 운동학적 경계조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tilde{W}_{ijN_3+1/2}=-(\zeta_t)_{ijN_3+1/2}=(z_tJ)_{ijN_3+1/2}=\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_y J_{ijN_3+1/2} \tag{11}$$

식 (1a)와 식 (11)을 결합하면 자유수면 격자층을 위한 수정된 연속방정식을 얻을 수 있다. 이 방정식은 자유수면의 시간 경사항이 포함되어 있으므로 반 음해법으로 차분하면 다음과 같다.

$$-\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{u^{n+1}}{J^n}\right)_{i+1/2jN_3}-\left(\frac{u^{n-1}}{J^n}\right)_{i-1/2jN_3}\right]-\frac{1}{\Delta y}\left[\left(\frac{v^{n+1}}{J^n}\right)_{ij+1/2N_3}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{v^{n+1}}{J^n}\right)_{ij-1/2N_3}\right]-\frac{1}{\Delta\zeta}\left[\left(\frac{h_{ij}^{n+1}-\tilde{h}_{ij}^{n+1}}{\theta\Delta t}\right)-\left(\frac{\tilde{W}^{n+1}}{J^n}\right)_{ijN_3-1/2}\right]=$$
$$\frac{1-\theta}{\theta\Delta x}\left[\left(\frac{u^n}{J^n}\right)_{i+1/2jN_3}-\left(\frac{u^n}{J^n}\right)_{i-1/2jN_3}\right]+\frac{1-\theta}{\theta\Delta y}\left[\left(\frac{v^n}{J^n}\right)_{ij+1/2N_3}-\left(\frac{v^n}{J^n}\right)_{ij-1/2N_3}\right]$$
$$+\frac{1-\theta}{\theta\Delta\zeta}\left[\frac{\tilde{h}^{n+1}-h_{ij}^n}{(1-\theta)\Delta t}-\left(\frac{\tilde{W}^n}{J^n}\right)_{ijN_3-1/2}\right] \tag{12}$$

식 (12)을 살펴보면, 기존의 미지수인 $\tilde{q}^{n+1}$ 이외에 또 다른 미지수 h_{ij}^{n+1}를 포함한다. h_{ij}^{n+1}을 제거하기 위해 Casulli(1999)와 Casulli와 Zanoli(2002)는 다음과 같은 가정을 하였다.

$$\frac{P_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} = g(\tilde{h}_{ij}^{n+1} - z_{ijN_3}^{n}) + \frac{q_{ijN_3}^{n} + \tilde{q}_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} \tag{13a}$$

$$\frac{P_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} = g(h_{ij}^{n+1} - z_{ijN_3}^{n}) + \frac{q_{ijN_3}^{n}}{\rho_0} \tag{13b}$$

여기서, P는 압력을 나타낸다.

자유수면과 동수압과의 관계식을 유도하기 위해 Casulli (1999)는 자유수면 격자층의 중앙에서 정의되는 동수압이 $0(q^n=q^{n+1}=0)$이라고 가정(즉, 자유수면 격자층의 정수압 가정)하여 다음과 같이 나타내었다.

$$h_{ij}^{n+1} = \tilde{h}_{ij}^{n+1} + \frac{\tilde{q}_{ijN_3}^{n}}{\rho_0 g} \tag{14}$$

식 (12)를 풀이하여 $\tilde{q}^{n+1}$가 계산되면, h^{n+1}은 식 (14)에 의해 수정되고, q^{n+1}은 식 (15)로 주어진다.

$$q_{ijk}^{n+1} = q_{ijk}^{n} + \tilde{q}_{ijk}^{n+1} - \tilde{q}_{ijN_3}^{n+1} \tag{15}$$

Casulli(1999)의 연구에서 사용된 자유수면 격자층의 정수압 가정은 동역학적 경계조건을 격자의 중앙에 대입하기 때문에 일반적으로 부정확하다. 이러한 문제를 개선하기 위해 본 연구에서는 동역학적 경계조건을 자유수면에 대입하고, 자유수면 격자층 중앙에서 정의되는 동수압을 선형 보간을 통해 계산하였다. 즉,

$$\frac{P_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} = g(\tilde{h}_{ij}^{n+1} - z_{ijN_3}^{n}) + \frac{q_{ijN_3}^{n} + \tilde{q}_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} \tag{16a}$$

$$\frac{P_{ijN_3}^{n+1}}{\rho_0} = g(h_{ij}^{n+1} - z_{ijN_3}^{n}) + \frac{q_{ijN_3-1}^{n+1}}{3\rho_0} = g(\tilde{h}_{ij}^{n+1} - z_{ijN_3}^{n}) + \frac{q_{ijN_{3-1}}^{n} + \tilde{q}_{ijN_{3-1}}^{n+1}}{3\rho_0} \tag{16b}$$

여기서, $q_{ijN_3-1}^{n+1} = q_{ijN_3-1}^{n} + \tilde{q}_{ijN_3-1}^{n+1}$라고 가정하였고, 식 (16a)와 식 (16b)를 조합하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$h_{ij}^{n+1} = \tilde{h}_{ij}^{n+1} + \frac{q_{ijN_3}^{n} + \tilde{q}_{ijN_3^{n+1}}}{\rho_0 g} - \frac{q_{ijN_3-1}^{n} + \tilde{q}_{ijN_3-1}^{n+1}}{3\rho_0 g} \tag{17}$$

$$q_{ijk}^{n+1} = q_{ijk}^{n} + \tilde{q}_{ijk}^{n+1} - (q_{ijN_3}^{n} + \tilde{q}_{ijN_3}^{n+1}) + (q_{ijN_3-1}^{n} + \tilde{q}_{ijN_3-1}^{n+1})/3 \tag{18}$$

식 (14)와 비교하여 식 (17)을 이용할 경우, Poisson방정식에서 계산되는 계수행렬의 비대칭성이 다소 증가하여 계산에 필요한 시간 또한 증가하게 된다(이종욱 등, 2008).

4. 적용 및 결과

본 연구에서 제시한 모형의 정확성을 검토하고 Casulli (1999)의 연구결과와 비교를 위해서 Beji와 Battjes(1993)가 연구한 수중 구조물을 통과하는 비선형파의 전파문제에 대해 수치모의를 실시하였다. 수치모의에 사용된 지형은 그림 2와 같다. 왼쪽 개방경계에서는 주기(T)가 1.0 *sec*이고 파고가 0.01 m인 정규파가 주어지며 수평방향의 계산격자는 $\Delta x=\Delta y=0.05$ *m*로 구성하였으며, $\Delta t=0.01$ *sec*로 하였다.

그림 3은 본 연구에서 제시한 방법과 Casulli(1999)가 제시한 방법을 이용한 자유수면변위의 수치모의 결과를 비교한 그림이다. 입사파가 전파되어 수중 구조물의 정상부에 도달하기 전까지는 본 연구에서 제시한 방법과 Casulli(1999)가 제시한 방법이 거의 유사한 결과를 나타내고 있지만, 정상부에 도달하게 되면 Casulli(1999)가 제시한 방법을 이용한 수치모의 결과는 파의 전파속도와 크기가 변화하는 것을 알 수 있다. 그러나 본 연구에서 제시한 결과를 이용할 경우 전파속도와 크기는 거의 무시할 정도이며, Casulli(1999)의 연구결과와 비교하여 크게 향상된 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

또한, 본 연구에서는 함몰지형에서의 적용성을 검토하기 위하여 정태화 등(2009)이 연구한 3차원 함몰지형에서의 파랑변형에 대한 해석해와 비교하였다. 정태화 등은 Bender and Dean (2005)가 처음 제시한 3차원 지형에 대한 고유함수전개법을 이용하여 3차원 함몰지형에서의 파의 변형에 대한 연

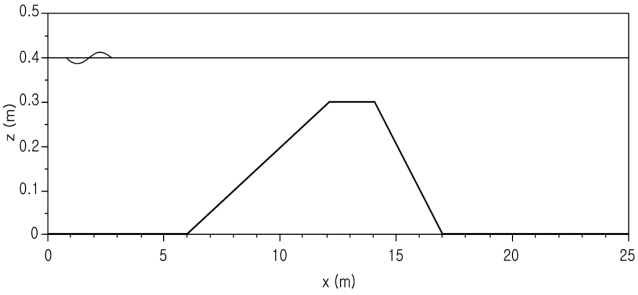
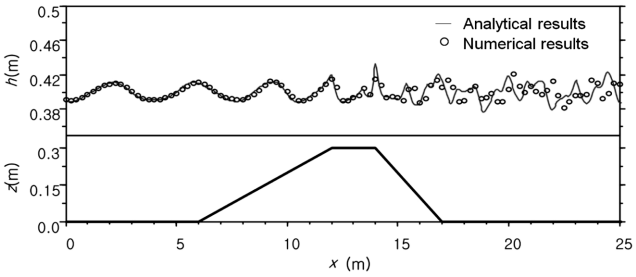
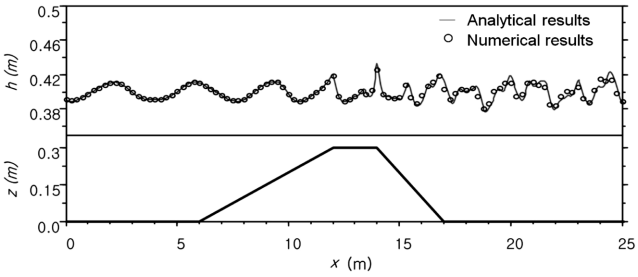


그림 2. 비선형파 전파실험을 위한 지형



(a) Casulli가 제시한 방법



(b) 본 연구에서 제시한 방법

그림 3. 자유수면변위 수치모의 결과

구를 천해영역 및 중간수심영역에서 실시하였다. 수치모의를 위한 지형은 정태화 등이 연구에서 사용한 반원형으로 함몰된 3차원 지형을 동일하게 구축하여 사용하였고 그림 4에 나타내었다. 수치모의를 위한 계산조건은 h_0=6.4 m, h_1=3.2 m, b=0.5 L(L=파장)의 조건을 사용하였고, 동일한 조건을 천해영역(kh=0.167)과 중간수심영역(k_1h_1=0.1336)으로 나누어 해석해와 비교하였다.

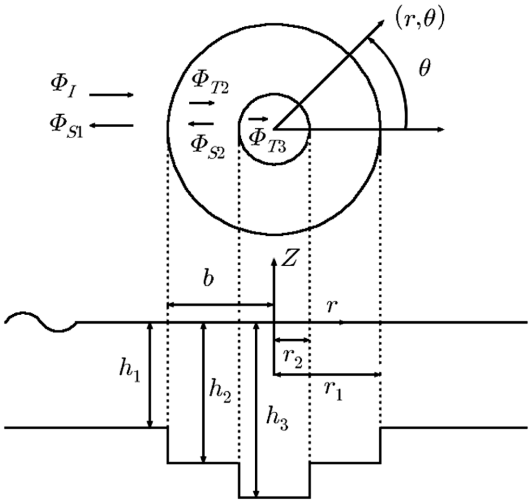


그림 4. 함몰지형의 개념도(반원형)

그림 5은 천해영역에서 소멸파 성분을 고려한 경우의 상대파고값을 계산하여 비교한 그림이다. 상대파고는 그 지점에서의 파고값을 입사파의 파고값으로 나눈 무차원 값을 의미한다. 함몰지형의 전면(x/L<-0.5)에서는 함몰지형에 의해 반사된 파와 입사파가 중첩되어 부분적으로 정상파가 형성됨을 알 수 있었으며, 양 옆으로도 입사파와 굴절에 의한 산란파가 중첩되어 비슷한 현상이 발생하는 것을 알 수 있었다.

그림 6는 중간수심영역에서 상대 파고값을 계산하여 비교한 그림이다. 중간수심영역의 경우 천해영역과 비슷한 경향이 나타났으나, 함몰지형 전 후의 상대파고는 천해영역에서의 경우보다 파고의 증감이 적음을 알 수 있었다. 함몰지형의 후면(x/L>-0.5)과 함몰지형의 후면 경계 앞 부근(x/L≈0.3~0.4)에서도 천해영역 및 중간수심영역에서의 수치모의 결과는 해석해와 비교적 잘 일치하는 것으로 나타났다.

또한, 그림 7는 함몰지형의 경계에서 원호 방향으로의 파고 변화를 비교한 그림이다. 해석해의 경우, 고유함수 전개법을 적용한 수렴해를 얻기 위하여 서로 다른 수심을 갖는 영역에

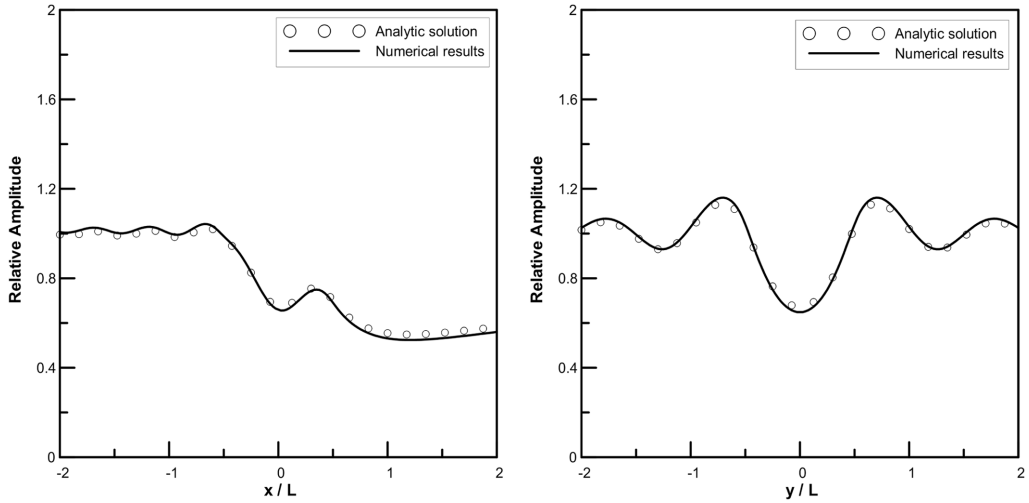


그림 5. 천해영역(kh=0.167)에서의 축에 따른 상대파고의 비교

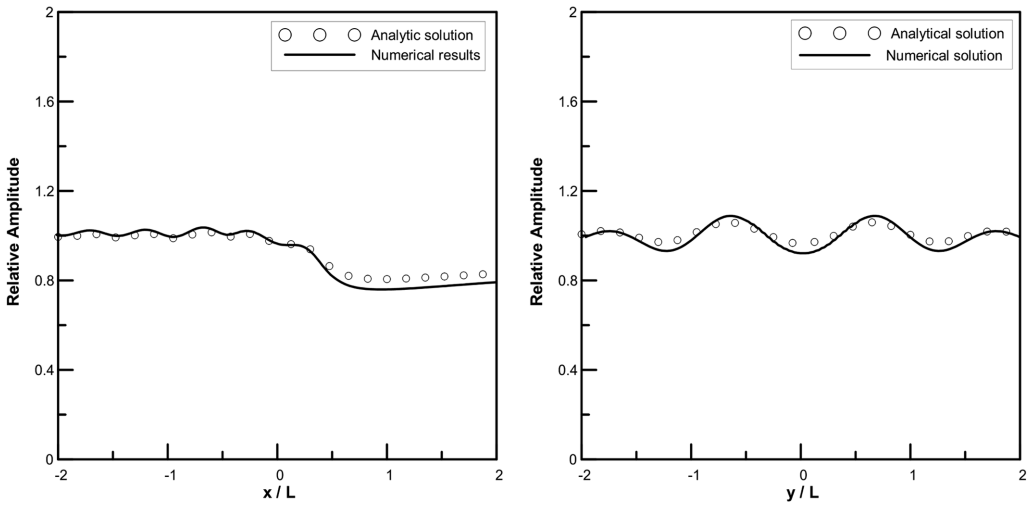
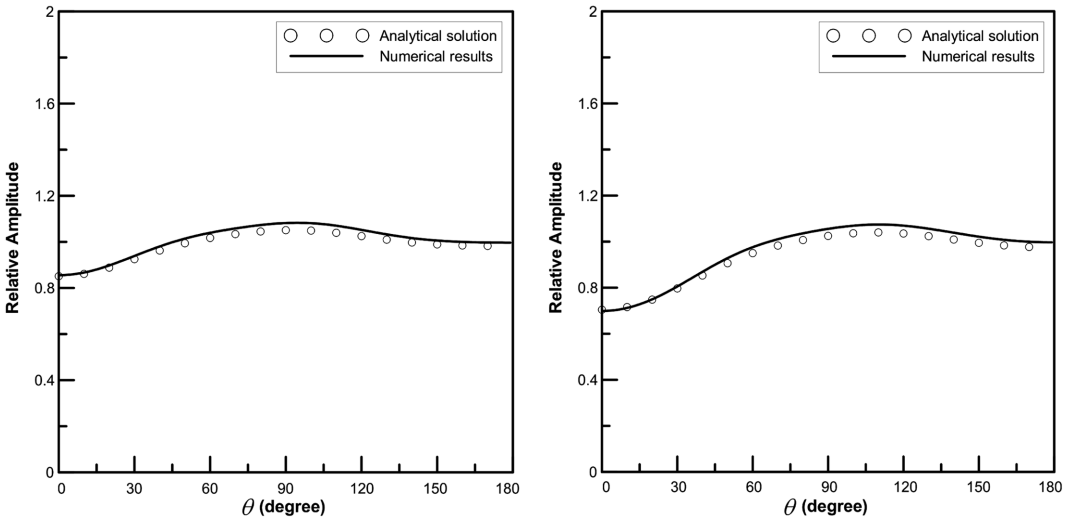


그림 6. 중간수심영역(kh=0.1336)에서의 축에 따른 상대파고의 비교



천해영역($kh = 0.167$) 중간수심영역($kh = 0.1336$)

그림 7. 함몰지형의 경계에서 수심에 따른 상대파고의 비교

표 1. 상대파고에 대한 해석해와 수치모의 결과와의 RMS오차

수심조건		RMS(root-mean-squares)오차
천해영역 (kh=0.167)	x/L	0.01644
	y/L	0.01226
중간수심영역 (kh=0.1336)	x/L	0.02824
	y/L	0.02248
함몰지형의 경계	천해영역 (kh=0.167)	0.02567
	중간수심영역 (kh=0.1336)	0.01226

서의 정합조건(경계선에서의 파고분포)를 이용하였다. 따라서, 함몰지형 경계에서의 상대파고에 대한 수치모의 결과를 해석해와 비교하였고, 잘 일치하는 것으로 나타났다. 표 1은 상대파고에 따른 해석해와 수치모의 결과에 대한 RMS(root-mean-squares) 오차를 나타낸 것이다. 표 1에서도 알 수 있듯이 모든 수치모의 영역에서의 수치모의 결과와 해석해와의 RMS 오차가 거의 0에 가깝게 나타나고 있음을 알 수 있다. 이는 본 연구에서 제시한 수치기법을 이용하였을 경우, 3차원 함몰지형에서의 파랑변형에 대해서도 비교적 정확한 수치모의 결과를 얻을 수 있음을 의미한다.

5. 결 론

본 연구에서는 기존의 수치모형들보다 좀 더 정확한 동역학적 경계조건을 동수압 모형에 적용하는 방법에 대해 검토하였고, 함몰지형에 적용하여 해석해와 비교하였다. 특히, Casulli(1999)가 제안했던 자유수면 격자층에서 정수압 분포 가정을 사용하지 않고, 선형보간법을 이용하여 자유수면 격자층에서 동수압을 구하였다. 본 연구에서 제시한 방법을 이용할 경우 Poisson방정식의 해석에 필요한 계산시간과 반복계산횟수가 미소하게 증가하지만, 적용 결과에서는 크게 향상된 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었다. 또한, 함몰지형에서의 적용성을 검토하기 위하여 정태화 등(2009)의 연구와 비교한 결과, 본 연구의 방법을 이용할 경우 함몰지형에서의 파랑해석에도 우수함을 입증하였다. 본 연구의 결과는 추후 다양한 연직 격자층을 이용하여 오염물 추적이나 밀도류 해석 등의 수치해석에 이용할 수 있을 것이며, 원형섬 및 다양한 함몰지형에서의 파랑에 대한 해석에 있어서 매우 유용할 것으로 판단된다.

감사의 글

본 연구는 한국해양과학기술진흥원 미래해양기술개발사업(해양재난예보시스템 구축방안 연구)의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

이종욱, 이진우, 조용식 (2008) 동수압 모형의 동역학적 경계조건, **대한토목학회논문집**, 제28권, 제6B호, pp. 691–696.

정태화, 김형준, 조용식 (2009) 3차원 함몰지형에서 소멸파 성분의 영향, **한국수자원학회논문집**, 제42권, 제12호, pp. 1125-1133.

Beji, S. and Battjes, J.A. (1993) “Experimental investigation of wave propagation over a bar”, *Coastal Eng.* Vol. 19, pp. 151-162.

Bender, C.J. and Dean, R.G. (2005) “Wave transformation by axi-symmetric three-dimensional bathymetric anomalies with gradual transitions in depth”, *Coastal Eng.* Vol. 53, pp. 331-351.

Casulli, V. (1999) A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows, *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* Vol. 30, pp. 425-440.

Casulli, V. and Cattani, E. (1994) Stability, accuracy and efficiency of a semi-implicit method fro three-dimensional shallow water flow, *Comput. Math.* Appl. Vol. 27, No. 4, pp. 99-112.

Casulli, V. and Zanolli, P. (2002) Semi-implicit numerical modelling of nonhydrostatic free-surface flows for environmental problems, *Math. Comp. Modeling.* Vol. 36, No. 9-10, pp. 1131-

1149.
Phillips, N.A. (1957) A coordinate system having some special advantages or numerical forecasting. *J. Meteor.* Vol. 4, pp. 184-185.
Saad, Y. (1992) *Numerical methods for large eigenvalue problems (Algorithms and architectures for advanced scientific computing)*, John Wiley and Sons Inc..
Shi, J. and Toro, E.F. (1996) Fully discrete high-order shock-capturing numerical schemes, *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* Vol. 23, pp. 241-269.
Stelling, G.S. and Zijlema, M. (2003) An accurate and efficient finite-difference algorithm for non-hydrostatic free-surface flow with application to wave propagation, *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* Vol. 43, pp. 1-23.
Van der Vorst, H.A. (1992) BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* Vol. 13, pp. 631-644.
Yuan, H. and Wu, C.H. (2004) An implicit three-dimensional fully non-hydrostatic model for free-surface flows, *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* Vol. 46, pp. 709-733.

◎ 논문접수일 : 09년 10월 20일
◎ 심사의뢰일 : 09년 10월 20일
◎ 심사완료일 : 09년 12월 21일