

단일 구형 기포의 수학적 모델에 대한 수치적 해석 모델

강동근*, 양현익†

(논문접수일 2010. 08. 06, 심사완료일 2010. 10. 26)

Numerical Modeling of the Mathematical Model of Single Spherical Bubble

Dong-Keun Kang*, Hyun-Ik Yang†

Abstract

Cavitation is described by formation and collapse of the bubbles in a liquid when the ambient pressure decreases. Formed bubbles grow and collapse by change of pressure, and when they collapse, shockwave by high pressure is generated. In general, bubble behavior can be described by Rayleigh-Plesset equation under adiabatic or isothermal condition and hence, phase shift by the pressure change in a bubble cannot be considered in the equation.

In our study, a numerical model is developed from the mathematical model considering the phase shift from the previous study. In the developed numerical model, size of single spherical bubble is calculated by the change of mass calculated from the change of the ambient pressure in a liquid.

The developed numerical model is verified by a case of liquid flow in a narrow channel.

Key Words : Cavitation(공동현상), Bubble(기포), Phase change(상변화), Mass transfer(질량 유동) Narrow channel(좁은채널), Rayleigh-Plesset equation(레이라-프레셋 방정식)

1. 서론

공동현상(cavitation)은 액체 내에서 공동(cavity)의 형성과 활동으로 정의할 수 있으며, 다양한 상황에서 액체의 물리적 물성과 흐름의 형상에 따라 다양한 형태로 나타날 수 있다.

기포의 형성은 액체의 국부압력이 그 온도에 대응하는 포

화증기압력 이하로 내려갈 때 국부적으로 기화현상이 일어나 발생한다. 형성된 미소기포의 팽창은 정적 혹은 동적인 방법에 의한 국부압력의 감소로 인해 영향을 받는다. 이때 기포는 성장과 수축을 반복 하게 된다. 따라서 압력변화를 수반하는 대부분의 유체유동에서 공동현상이 발생되는데, 이러한 공동현상을 제어하기 위해 기포의 발생과 그 이후의 거동에 대한 연구가 중요하다. 즉, 압력에 따른 기포의 반지

* 한양대학교 기계설계-메카트로닉스공학과 (terrividence@gmail.com)

주소: 133-791 서울시 성동구 행당동 17

† 한양대학교 기계공학과

름 변화로 기포의 붕괴 지점이나 시점을 파악하는 것이다.

이를 위해 Rayleigh-Plesset 방정식의 해를 구하여 압력변화에 따른 기포반지름 변화의 해석을 시도한 연구가 다양한 분야에서 진행되었다. 하지만 대부분의 연구에서 등온이나 단열의 조건으로 가정하고 해석을 시도함으로써 기포 내부에서 응축 및 기화에 따른 상변화를 고려하지 않았다⁽¹⁻⁵⁾.

이에 반하여 2008년 Yang 등⁽⁶⁾은 기포 내부 증기의 질량 변화를 고려한 수학적 모델을 에너지 보존 법칙을 이용하여 제안하였다. 하지만 수학적 모델의 해를 구할 수 있는 해석 모델의 연구까지 진행하지 않았다.

따라서 본 연구에서는 기포의 거동에 따른 액체와 증기 사이의 상변화를 고려한 Yang 등의 수학적 모델을 검증하고 이에 대한 수치적 해석모델을 구축하였다. 여기서 기포내부의 온도 계산은 2007년 Qin 등⁽⁷⁾이 제안한 방법을 이용하였다.

개발된 수치해석 모델은 Runge-Kutta Fehlberg 방법을 이용하였으며, 이의 효율성을 검증하기 위하여 좁은 채널을 통과하는 유체에 적용하여 계산된 수치해석 결과와 일반적인 방법에서 계산된 수치해석 결과를 비교하였다.

2. 배경 이론

2.1 상변화를 고려한 수학적 모델

일반적인 Rayleigh-Plesset 방정식은 초기 가정에서 기포의 온도에 따른 상변화를 고려하지 않았다. 이에 Yang 등은 상변화에 의한 영향을 고려하여 수학적 모델인 식(1)을 제시하였다⁽⁶⁾.

$$R \frac{dU}{dt} + \frac{3}{2} U^2 = \frac{p_B(t) - p_\infty}{\rho_L} - \frac{4\mu_L}{\rho_L} \frac{U}{R} - \frac{2S}{\rho_L R} + \frac{j}{\rho_L} (U + w) \quad (1)$$

위 식에서 마지막 항인 질량유동 효과의 항을 제외한 나머지 항들은 일반적인 Rayleigh-Plesset 방정식과 똑같은 형태임을 알 수 있다. 여기서 U 는 액체의 속도이며 식(2)와 같이 기포 벽의 속도와 질량유동의 항으로 계산된다.

$$\frac{dR}{dt} = U - \frac{j}{\rho_L} \quad (2)$$

여기서 j 는 기포 표면의 단위 면적에서 단위 시간당 응축

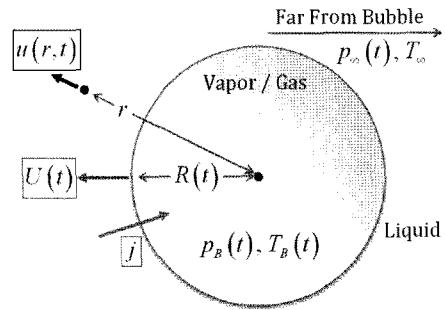


Fig. 1 A spherical bubble considering mass change

되는 증기의 질량으로 질량유동이며, 따라서 Fig. 1과 같이 기포 벽의 속도는 응축과 기화에 의한 질량유동을 고려한 형태이다^(6,8,9).

증기의 질량은 기포압력과 온도에 따른 증기압력을 이용하면 분압 법칙으로 구할 수 있으며, 비체적을 사용하면 다음 식(3)과 같이 계산된다.

$$\frac{p_v}{p_B} = \frac{m_v v_v}{V_B} \Rightarrow m_v = \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{p_v}{p_B v_v} \quad (3)$$

기포 내 압력을 온도에 따른 증기압력과 가스압력의 합으로 표현하기 위해 시간 t_i 에서 온도 $T_B(t_i) = T_i$, 기포반지름 $R(t_i) = R_i$ 라 하면 식(4)와 같다.

$$p_B(t_i) = p_v(T_i) + p_g \quad (4)$$

여기서 가스는 대기체이기 때문에 이상기체로 가정하여 상태방정식을 이용하면, 기포의 압력은 식(5)와 같이 온도에 따른 증기압력과 가스압력의 합으로 나타낼 수 있다^(6,8).

$$p_B(t_i) = p_v(T_i) + p_{g0} \left(\frac{R_0}{R_i} \right)^3 \frac{T_i}{T_0} \quad (5)$$

2.2 성장과 수축과정에서의 열해석

기포의 성장은 역학적인 평형상태를 유지하면서 계면에서 열전달에 의한 기포 내 증기의 응축 또는 기포벽 주위의 액체의 기화에 의하여 이루어질 수 있다. 기포의 거동에 따른 온도의 계산은 Qin 등이 내부에너지 변화를 이용하여 제안하였다.

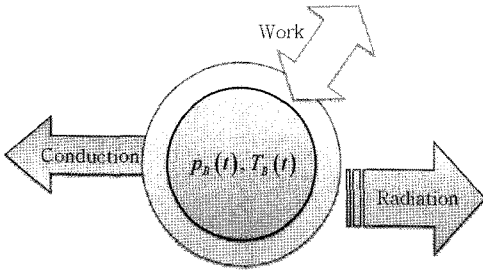


Fig. 2 Scheme of a thermal process through a bubble

Fig. 2와 같이 단일 기포가 액체 안에 있을 때 발생하는 열전달 및 외부일의 과정을 고려하면 Δt 동안 기포 내부의 온도변화는 다음 식(6)과 같다⁷⁾.

$$\Delta T = \frac{-1}{m_g C_{V,g} + m_l C_{V,l}} \left[\frac{\kappa A (T_B - T_\infty) \Delta t}{d} + \epsilon \sigma A (T_B^4 - T_\infty^4) \Delta t + p_B \Delta V \right] \quad (6)$$

따라서 위의 식을 이용하여 식(5)의 기포압력 계산에 사용될 온도의 계산이 가능하다.

3. 수치적 해석 모델

3.1 Runge-Kutta Fehlberg법

여러 Runge-Kutta 수치해법 중 Runge-Kutta Fehlberg법은 매 구간별 6개의 도함수만을 계산하고도 오차판정이 가능하다. 따라서 이 방법은 수치해의 정도를 높이면서 계산 시간도 줄일 수 있는 이점을 갖는다. 매 단계에서 오차의 정도가 다른 2개의 근사해를 아래 식(7), (8)와 같이 구하고, 이 두 개의 근사해로부터 수치해에 대한 오차정도를 계산한다.

$$\hat{y}_{i+1} = y_i + \frac{25h}{216} k_1 + \frac{1,408h}{2,565} k_3 + \frac{2,197h}{4,104} k_4 - \frac{h}{5} k_6 + O(h^5) \quad (7)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{16h}{135} k_1 + \frac{6,656h}{12,825} k_3 + \frac{28,561h}{56,430} k_4 - \frac{9h}{50} k_5 + \frac{2h}{55} k_6 + O(h^6) \quad (8)$$

여기서 증분 함수의 계산에 사용되는 상수값은 식(9)과 같다.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{hk_1}{4}\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{3h}{8}, y_i + h\left(\frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right)\right) \\ k_4 &= f\left(x_i + \frac{12h}{13}, y_i + h\left(\frac{1,932k_1}{2,197} - \frac{7,200k_2}{2,197} + \frac{7,296k_3}{2,197}\right)\right) \\ k_5 &= f\left(x_i + h, y_i + h\left(\frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3,680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4,104}\right)\right) \\ k_6 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i - h\left(\frac{8k_1}{27} - 2k_2 + \frac{3,544k_3}{2,565} - \frac{1,859k_4}{4,104} + \frac{11k_5}{40}\right)\right) \end{aligned} \quad (9)$$

식(7)과 (8)는 같은 k_i 를 사용하기 때문에 매 단계별 계산에서 식(9)에 나타난 6개의 도함수만 계산하면 된다. 이때 오차는 아래 식(10)와 같이 얻을 수 있다.

$$Error = h \left(\frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4,275} - \frac{2,197k_4}{75,240} + \frac{k_5}{50} + \frac{2k_6}{55} \right) \quad (10)$$

매 단계에서 오차의 계산이 가능하기 때문에 구간간격 제어(adaptive step size control)를 사용할 수 있다¹⁰⁾.

3.2 상변화를 고려한 수치적 해석모델

위의 식(1)은 독립변수가 시간인 초기치 문제이며, 식(2)와 함께 연립방정식 형태로 다음 식(11), (12)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f_1 = \frac{dU}{dt} = \frac{p_B(t) - p_\infty}{R\rho_L} - \frac{4\mu_L}{\rho_L R^2} U - \frac{2S}{\rho_L R^2} + \frac{j}{\rho_L R} (U+w) - \frac{3}{2} \frac{U^2}{R} \quad (11)$$

$$f_2 = \frac{dR}{dt} = U - \frac{j}{\rho_L} \quad (12)$$

먼저 액체의 속도 U 에 대한 미분방정식 식(11)에 Runge-Kutta Fehlberg법을 적용하면 다음 식(13)과 같다.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f_1(R, U) \\
 k_2 &= f_1\left(R, U + \frac{hk_1}{4}\right) \\
 k_3 &= f_1\left(R, U + h\left(\frac{3k_1}{32} + \frac{9k_2}{32}\right)\right) \\
 k_4 &= f_1\left(R, U + h\left(\frac{1,932k_1}{2,197} - \frac{7,200k_2}{2,197} + \frac{7,296k_3}{2,197}\right)\right) \quad (13) \\
 k_5 &= f_1\left(R, U + h\left(\frac{439k_1}{216} - 8k_2 + \frac{3,680k_3}{513} - \frac{845k_4}{4,104}\right)\right) \\
 k_6 &= f_1\left(R, U - h\left(\frac{8k_1}{27} - 2k_2 + \frac{3,544k_3}{2,565} - \frac{1,859k_4}{4,104} + \frac{11k_5}{40}\right)\right) \\
 U_{i+1} &= U_i + h\left(\frac{16k_1}{135} + \frac{6,656k_3}{12,825} + \frac{28,561k_4}{56,430} - \frac{9k_5}{50} + \frac{2k_6}{55}\right)
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 초기값을 이용하여 액체의 속도 U 를 먼저 구한 후 이를 이용하여 기포 벽의 속도에 대한 해, 즉 기포반지름 R 을 식(14)과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 l_1 &= f_2(U) \\
 l_2 &= f_2\left(U + \frac{hl_1}{4}\right) \\
 l_3 &= f_2\left(U + h\left(\frac{3l_1}{32} + \frac{9l_2}{32}\right)\right) \\
 l_4 &= f_2\left(U + h\left(\frac{1,932l_1}{2,197} - \frac{7,200l_2}{2,197} + \frac{7,296l_3}{2,197}\right)\right) \quad (14) \\
 l_5 &= f_2\left(U + h\left(\frac{439l_1}{216} - 8l_2 + \frac{3,680l_3}{513} - \frac{845l_4}{4,104}\right)\right) \\
 l_6 &= f_2\left(U - h\left(\frac{8l_1}{27} - 2l_2 + \frac{3,544l_3}{2,565} - \frac{1,859l_4}{4,104} + \frac{11l_5}{40}\right)\right) \\
 R_{i+1} &= R_i + h\left(\frac{16l_1}{135} + \frac{6,656l_3}{12,825} + \frac{28,561l_4}{56,430} - \frac{9l_5}{50} + \frac{2l_6}{55}\right)
 \end{aligned}$$

3.3 채널에서의 압력변화

Fig. 3은 수치해석 모델의 검증을 위해 선정된 좁은 채널을 형성하는 유체 이송 장치이다.

이러한 장치는 일반적으로 고압 제트분사 노즐, 워터젯,

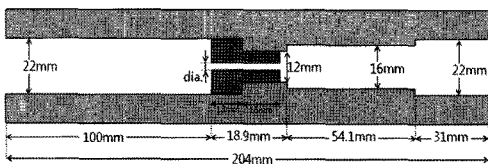


Fig. 3 Geometry of a narrow channel

등의 장치들에서 볼 수 있는 기본적인 형태이다. 고압의 액체를 분출시킬 때 분출 단면적을 작게 하면 압력에너지가 속도에너지로 바뀌는 것을 이용한 것이다. 따라서 압력이 급격히 하강하여 무수히 많은 기포들이 발생하게 된다. 이때 발생하는 기포의 붕괴지점 및 진행거리 등을 예측할 수 있으면 노즐과 압력 용기 및 관로 등에 대한 다양한 형태의 설계가 가능하다.

채널의 경계조건은 채널의 입구와 출구의 압력으로 각각 6.52MPa, 0.25MPa이며, 이때 채널의 지름은 선행연구에서 제안된 3mm이다⁽¹¹⁾. 이를 바탕으로 유동의 해석은 FLUENT를 이용하였으며, 그 결과는 Fig. 4와 같다.

특히 해석에 사용되는 채널 중심에서의 압력과 속도는 각각 Fig. 5와 같다⁽¹¹⁾.

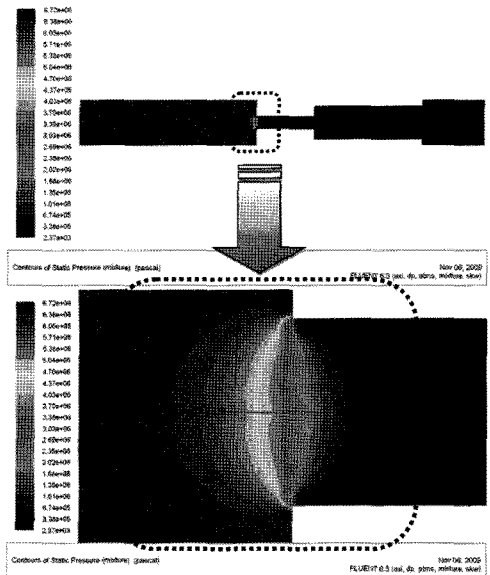


Fig. 4 Static pressure distribution

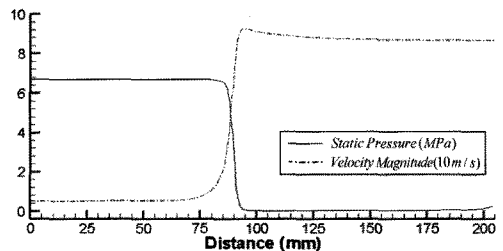


Fig. 5 Pressure and velocity profile along the centerline

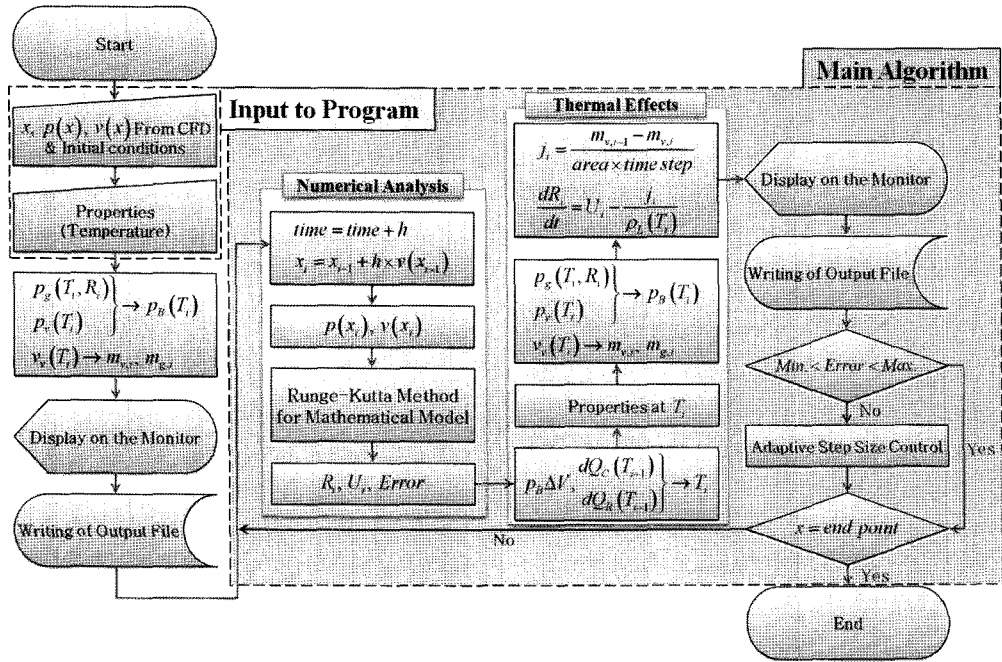


Fig. 6 Program flowchart

3.4 초기값 및 물성치

수치적 해석을 위해서 기포반지름과 온도의 초기값을 설정해 주어야 한다. 이에 따라 초기의 기포압력 계산 및 온도에 따른 각종 물성치를 계산할 수 있다. 먼저 반지름의 경우 1 atm에서 R₀ = 100 μm, 온도는 상온 T₀ = 300 K로 가정하였다. 사용되는 액체는 물로, 기포 내부의 가스는 대기체로 정하였다.

따라서 온도에 따른 물의 밀도(ρ_L), 열전도계수(κ), 점성계수(μ_L) 및 증기의 포화증기압력(p_v), 비체적(v_v), 정적비열(C_{v,v})은 물과 증기의 포화증기표를 사용하였다. 가스는 대기체의 물성테이블에서 비체적(v_g)과 정적비열(C_{v,g})을 사용하였다⁽¹²⁾.

초기 상태에서는 기포 벽의 속도, 액체의 속도 및 질량유동이 모두 0이므로, 가스의 초기 압력은 식(15)과 같다.

$$p_{g0} = p_{\infty}(t_0) - p_v(T_0) + \frac{2S}{R_0} \quad (15)$$

여기서 표면장력 계수인 S = 0.072 (N/m)로 일정하다.

3.5 프로그램 순서도

완성된 수치적 해석모델을 프로그램화하기 위하여 Fig. 6과 같은 순서도를 가진 알고리즘을 구성하였다. 먼저 외부 데이터 입력부분에서 FLUENT로 구해진 압력 및 속도 데이터, 각종 초기값들 그리고 포화증기표 및 물성테이블에서 온도에 따른 물성값을 입력 받는다. 이후 초기 온도와 반지름으로 증기와 가스의 압력, 질량을 구한 후 메인 알고리즘으로 넘어간다.

메인 알고리즘의 흐름은 다음과 같다.

- (1) 진행거리를 시간으로 계산
- (2) 진행거리에 따른 압력과 속도의 보간
- (3) 수학적 모델을 Runge-Kutta Fehlberg법으로 계산
- (4) 계산으로 얻어진 기포반지름을 이용하여 온도계산
- (5) 구해진 온도에서 포화증기표의 물성치를 보간
- (6) 온도와 기포반지름으로 증기압력과 가스압력 계산
- (7) 압력과 물성치를 이용해 액체의 속도와 질량유동 계산
- (8) 데이터 저장
- (9) 오차 판별에 따른 적응 구간간격 제어
- (10) 거리에 따른 프로그램 종료시점 판단
- (11) 반복

4. 해석 결과

4.1 압력변화에 따른 기포의 반지름, 온도 결과

채널의 입구 앞쪽 영역은 압력의 변화가 거의 없는 압축액 영역에 해당되어, 사실상 상온에서 증기의 발생이 미비하다. 따라서 압력의 감소가 발생하는 채널의 입구(87mm 지점)를 그래프에서 0mm로 잡았다.

Fig. 7은 채널의 압력변화에 따른 반지름과 기포 내부의 온도에 대한 결과이다.

팁의 입구를 지나면서 압력이 급격하게 낮아지고 이로 인해 기포가 성장과 수축을 반복하는 모습을 볼 수 있다. 총 세 번에 걸쳐 관성에 의한 반동(rebound)으로 기포의 성장과 붕괴의 반복을 볼 수 있다. 각 반동에서 최대 반지름은 점차적으로 줄어 마지막 세 번째 영역에서는 0.5mm이하로 보이지 않게 된다.

반지름의 변화에 따른 온도변화를 보면, 일반적으로 반지름이 증가하면 내부에너지가 감소하면서 온도가 내려가고, 반대로 반지름이 감소하면 온도가 상승한다. 주목할 점은 처음 압력강하에 의한 반지름의 급격한 증가로 온도가 순간적으로 크게 하락하며, 심지어 영하로 떨어지게 된다. Fig. 8에서 좀 더 자세히 볼 수 있는데, 이는 처음 기포가 성장하면서 반지름의 변화율이 감소하여 가스압력을 3배곱으로 감소시키게 되고, 이상기체로 가정한 가스의 온도가 급격히 감소하게 된다. 초기에는 압력이 높아 기포내부는 대부분 증기가 없이 가스로 이루어져 있기 때문에 기포의 온도 역시 급격히 감소한다. 하지만 영하로 내려가도 실제로 가스의 질량이 매우 작아 열량감소 역시 작고, 매우 짧은 시간 동안(약 0.087444ms) 순간

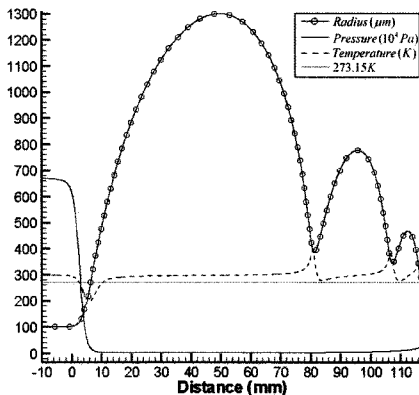


Fig. 7 Radius(μm) and temperature(K) results

적으로 영하로 내려가기 때문에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 판단된다.

4.2 증기의 질량 및 표면을 통한 질량유동 결과

반지름과 온도변화에 따른 증기의 질량 및 질량유동의 결과는 Fig. 9와 같다.

먼저 기포의 반지름이 급격히 증가함에 따라 증기의 질량 역시 증가함을 볼 수 있는데, 이는 기포내부의 압력이 감소하기 때문이다. 증기가 증가함에 따라 질량유동은 감소해야 하지만 그림에서는 이에 대한 특별한 변화가 없는데, 이는 기포의 면적이 더 크게 증가하여 표면을 통한 실질적인 질량 유동은 거의 없기 때문이다. 이 이후에는 반지름이 감소하여 붕괴지점에서 온도의 급격한 상승에 의해 증기 역시 급격히

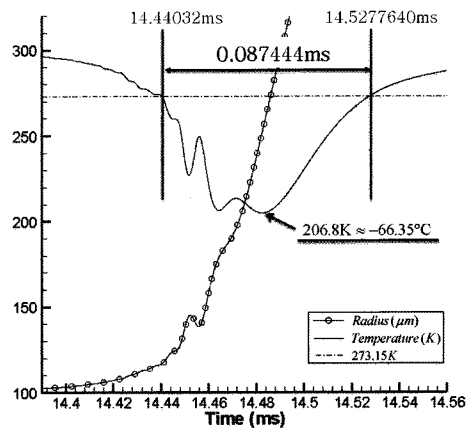


Fig. 8 Temperature change under 273.15K

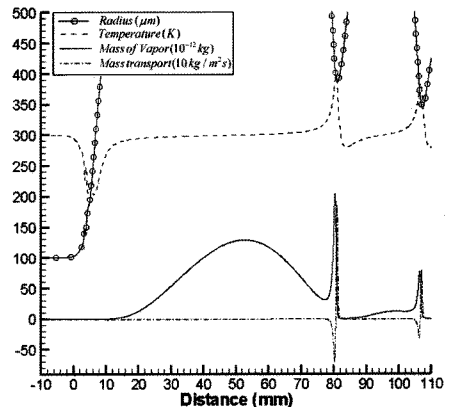


Fig. 9 Vapor mass and mass transport results

Table 1 Comparison between general model and phase change model

	General model	Phase change model
Numerical model	$\frac{dR}{dt} = U$ $R \frac{dU}{dt} + \frac{3}{2} U^2 = \frac{p_B(t) - p_\infty}{\rho_L} - \frac{4\mu_L U}{\rho_L R} - \frac{2S}{\rho_L R}$	$\frac{dR}{dt} = U - \frac{j}{\rho_L}$ $R \frac{dU}{dt} + \frac{3}{2} U^2 = \frac{p_B(t) - p_\infty}{\rho_L} - \frac{4\mu_L U}{\rho_L R} - \frac{2S}{\rho_L R} + \frac{j}{\rho_L} (U + w)$
Vapor Pressure	$p_v = 4240 \text{ Pa at } 300 \text{ K}$	$p_v = f(T) : \text{saturation curve}$
Properties	Water properties at 300 K	Interpolation with respect to the temperature from the property table

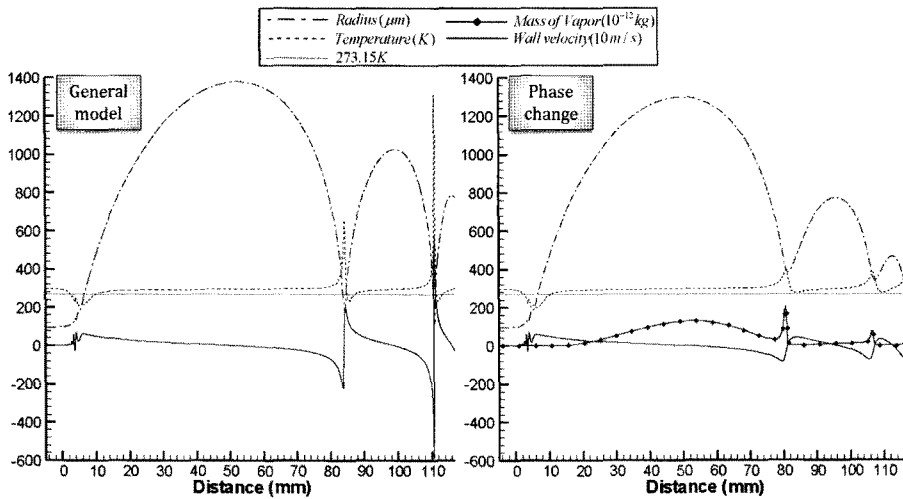


Fig. 10 Comparison between general model and phase change model

발생된다. 이의 영향으로 질량유동은 마이너스 값을 가지고, 이는 기포벽을 통해 질량이 빠져나가는 것을 의미한다. 이후에는 성장과 붕괴에 따라 비슷한 경향을 보인다. 따라서 반지름의 변화와 그에 따른 온도변화를 통해 상변화에 대한 결과가 어느 정도 타당하다는 것을 알 수 있다.

4.3 일반적인 해석모델을 이용한 비교 검증

지금까지 기포의 거동에 따른 해석결과를 살펴보았다. 이 결과를 좀 더 검증해보기 위하여 기존에 사용되었던 일반적인 해석모델과 비교하였다. 이때 사용된 해석모델은 Qin에 의해 제안된 수치적 모델이며⁽⁷⁾, 간략한 비교를 살펴보면 위의 Table 1과 같다. 여기서 Qin은 수치적 모델에서 기포 벽의 속도와 지배방정식에서의 질량유동에 대한 고려를 하지 않았으며, 증기압력 및 물성치의 계산에서 온도에 대한 변화

역시 고려하지 않았다.

이를 토대로 해석한 결과의 비교는 Fig. 10과 같다. 좌측이 일반적인 해석모델에 의한 결과이고 우측이 상변화를 고려한 모델의 결과이다. 먼저 첫 반동영역에서는 반지름과 기포 벽의 속도에서 큰 차이를 보이지 않는다. 이는 앞에서 설명하였듯이 내부의 증기가 증가하지만, 기포의 면적 역시 증가하여, 실질적인 질량유동은 없기 때문이다. 따라서 초기 반동영역에서 기포 벽의 속도와 거동에 대한 비교 결과는 타당하다. 이후 성장과 수축을 반복하다가 붕괴영역에서 온도의 급격한 증가가 일어난다. 이에 따라 증기 역시 급격히 증가하고(기화) 이는 다시 반지름의 증가에 영향을 미치기 때문에 증기의 고려가 더욱 중요함을 알 수 있다.

하지만 일반적인 해석모델의 결과에서는 이에 대한 영향을 고려하지 않았고 성장과 수축과정의 전환에서 급격한 변

화를 보이고 있다. 따라서 상변화를 고려한 해석모델이 물리적으로 더 합당한 경향을 보이고 있으며, 더하여 수치해를 구하는 과정에서 수렴성의 향상이라는 부수적인 효과 역시 얻을 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 기존의 Rayleigh-Plesset 방정식의 발전된 형태로 기포의 거동에 따른 액체와 증기 사이의 상변화를 고려한 Yang 등의 수학적 모델을 검증하고 이의 수치적 해석모델을 구축하였다.

구축된 수치적 해석모델을 일반적으로 유체 유동에 많이 사용되는 좁은 채널에서 발생하는 기포 현상에 적용하였다. 먼저 기포의 거동에 대한 반지름, 온도, 증기 질량, 질량유동의 해석결과를 살펴보고 이후 일반적인 해석모델과 비교를 통한 검증을 위해 Qin이 제안한 해석모델을 사용하여 비교하였다.

비교결과 질량유동에 의한 기포 벽의 속도 차이가 있음을 알았으며, 또한 첫 반동 영역에서는 실질적인 질량유동이 없는 구간이기 때문에 둘의 결과가 유사하였지만, 이후 상변화에 따른 영향이 나타났으며 특히 붕괴 지점에서 상변화 효과를 고려하는 것이 물리적 현상에 더 가깝다는 것을 보여주었다.

참고 문헌

- (1) Plesset, M. S. and Prosperetti, A., 1977, "Bubble Dynamics and Cavitation," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 9, pp. 145~185.
- (2) Young, F. R., 1989, *Cavitation*, McGRAW-HILL, UK, pp. 4~37.
- (3) Harris, P. J., 1996, "A Numerical Method for Modeling the Motion of a Spherical Bubble," *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, pp. 1125~1134.
- (4) Mathew, S., Keith Jr., T. G., and Nikolaidis, E., 2006, "Numerical simulation of traveling bubble cavitation," *Int. J. Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 16 No. 4, pp. 393~416.
- (5) Alehossein, H. and Qin, Z., 2007, "Numerical analysis of Rayleigh-Plesset equation for cavitating water jet," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 72, pp. 780~807.
- (6) Yang, H., Desyatov, A. V., Cherkasov, S. G., and McConnell, D. B., 2008, "On the fulfillment of the energy conservation law in mathematical model of evolution of single spherical bubble," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, pp. 3623~3629.
- (7) Qin, Z., Bremhorst, K., Alehossein, H., and Meyer, T., 2007, "Simulation of cavitation bubbles in convergent-divergent nozzle water jet," *J. Fluid Mechanics*, Vol. 573, pp. 1~25.
- (8) Brennen, C. E., 1995, *Cavitation and Bubble Dynamics*, Oxford University Press, New York, pp. 47~50.
- (9) Sedov, L. I., 1996, *Mechanics of Continuous Media*, World Scientific Pub. Co Inc., USA, pp. 862~892
- (10) Chapra, S. C. and Chnale, R. P., 1990, *Numerical Methods for Engineers*, McGRAW-HILL, pp. 596~617.
- (11) Cho, J. S., 2009, *Analysis of Cavitation Effect in a Narrow Channel*, A Thesis for a Master, Hanyang University, Republic of Korea.
- (12) Cengel, Y. A., 2003, *Heat Transfer*, McGRAW-HILL, New York, pp. 868, 874.