韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 24집 제 4호, 2010. 11. 891-907

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 24, No. 4, Nov. 2010. 891-907

미적분학의 기본정리의 교수학적 분석에 기반을 둔 지도방안의 탐색

김 성 옥 (한동대학교)
정 수 영 (둔촌고등학교)
권 오 남 (서울대학교)+

미적분학의 기본정리는 미분과 적분을 연결하는 중요한 정리로서 다양한 개념적 요소들을 포함하고 있고 그 가운데 학생들이 이해하기에 쉽지 않은 것들이 있어 교수학적 연구 대상으로 관심을 끌어 왔다. 본 연구에서는 미적분학의 기본정리의 이해의 요소와 인지과정에 바탕을 둔 교수학적 대안을 제시하기 위해 미적분학의 기본정리의 역사적 발달과정과 선행연구를 통하여 미적분학의 기본정리의 이해의 요소를 알아보고, 미적분학의 기본정리의 증명과정에서 누적함수와 변화율 개념을 분석하였다. 이를 바탕으로 미적분학의 기본정리의 지도방법에 대한 교수학적 대안과 교육적 시사점을 제안하였다.

I. 서 론

미적분학의 기본정리는 미분과 적분을 연결하는 중요한 정리로서, 연속함수의 경우 그 정적분으로 원시함수를 나타낼 수 있어, 미분과 정적분이 일종의 역함수 관계가 있음을 말해 주며, 원시함수를 이용하여 정적분 계산을 할 수 있게 해준다. 이 정리는 미분방정식의 해를 찾는데 기여하는 등 여러 가지로 응용된다. 예를 들면, 정적분으로 주어진 함수

$$y=\int_{0}^{x} f(u)\sin(x-u)\,du$$

는 미분방정식 $y''+y=f(x)$ 의 해가 됨을 볼 수 있다. 또한, 이 정리를 2차원 혹은 3차원으로 확장한, 보존장(conservative field)의 잠재함수(potential)를 이용한 선적분, Green의 정리, 발산 정리 혹은 좀 더 일반적인 Stokes의 정리 등은 전자기학이나 유체역학 등 공학의 기초에 있어서도 매우 중요한 역할을 한다.

이 정리는 비교적 단순해 보이나 다양한 개념적 요소들이 연관되어 있어 교수학적 연구가 여럿 나와

* 접수일(2010년 9월 24일), 심사(수정)일(2010년 10월 20일), 게재확정일자(2010년 11월 4일)
* ZDM 분류 : C35
* MSC2000 분류 : 97C99
* 주제어 : 미적분학의 기본정리, 대학수학교육
+ 교신저자

있다(예를 들면, 정연준(2010), Artigue(1991), Tall(1997), Thompson(1994) 등). 그러나 학습자의 인지과정에 바탕을 둔 교수학적 대안에 관한 연구는 거의 없다.

이에, 본 논문에서는 미적분학의 기본정리의 이해에 대한 기존의 연구를 분석하여 이 정리에 관련된 이해의 요소와 학습자의 인지과정에 바탕을 둔 교수학적 대안을 제시하고자 한다. 먼저 이 정리의 내용과 증명을 살펴 본 다음 이 정리에 대한 여러 가지 교수학적 연구 결과들을 분석한다.

II. 미적분학의 기본정리와 증명

미적분학의 기본정리는 다음 두 가지 형태로 나타나며 이 둘은 서로 동치인 명제이다:

미적분학의 기본정리. 함수 $f: I \to R$ 는 열린구간 I에서 연속이고, $a \in I$라고 하자.

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$이다.

(2) $F'(x) = f(x)$인 함수 $F: I \to R$ 이 존재하면, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$이다.

먼저 (1)과 (2)가 동치임을 보인다.

(1)⇒(2): $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 로 두자. $h'(x) = f(x) = F'(x)$이므로, 어떤 상수 C가 있어서 $F(x) = h(x) + C$이다. $h(a) = 0$이므로, $F(a) = h(a) + C = C$를 얻고, $F(b) = h(b) + C = h(b) + F(a)$, 즉, $h(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$를 얻는다.

(2)⇒ (1): $F'(x) = f(x)$이고 $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$이라면 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt + F(a)$이므로 $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt + F(a)\right) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ 을 얻는다.

다음은 널리 알려진 (1)의 증명 중 하나이다: $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 로 두자. 연속함수의 최대최소값 정리에 의해 $x_{\min}$은 $f(x)$가 $[a,b]$에서 최소값을 갖는 점이고 $x_{\max}$은 $f(x)$가 $[a,b]$에서 최대값을 갖는 점이라고 하면

$$f(x_{\min}) \le \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt}{b-a} \le f(x_{\max})$$

이고 중간값 정리에 의해 $\dfrac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a} = f(c)$인 점 c가 a와 b 사이에 존재한다. 따라서 어떤 수 x^*가 x와 x_0 사이에 있어서

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0} = f(x^*)$$

가 되게 한다. $x \to x_0$일 때 $f(x)$가 연속이므로 $f(x^*)$는 $f(x_0)$로 다가간다. 즉, 극한 기호를 쓰면

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} f(x^*) = f(x_0)$$

로서 (1)이 성립한다.

다음은 (2)를 직접 증명하는 방법의 하나이다(Larson, Hostetler & Edwards, 2002): 평균값정리에 의해 $\dfrac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f(x_k^*)$ 인 x_k^*가 x_{k-1}과 x_k 사이에 있으므로 구간 $[a, b]$를 n개의 작은 구간으로 등분하여 $x_0 = a$, $x_n = b$로 두면

$$F(b)-F(a) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$$

로서 임의의 n에 대해 위의 등식이 성립하고, $f(x)$가 연속함수로서 정적분 가능하므로

$$F(b)-F(a) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b f(t)\,dt$$

를 얻는다. 이 증명은 $f(x)$가 연속함수가 아니어도 리만적분 가능한 함수이기만 하면 성립한다. 연속성보다 약화된 조건인 리만적분가능성을 만족하는 함수의 대표적인 예로서 구분적으로 연속(piecewise continuous)인 함수를 들 수 있다.

(보기: $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leqq 3 \\ 5, & 3 < x \end{cases}$)

미적분학의 기본정리 (1)은 연속함수의 원시함수가 존재함을 보여준다. (2)는 원시함수를 이용하여 함수의 정적분을 계산 할 수 있음을 보여준다. 또한, (1)과 (2)는 정적분과 미분이 일종의 역함수 관계임을 보여준다.

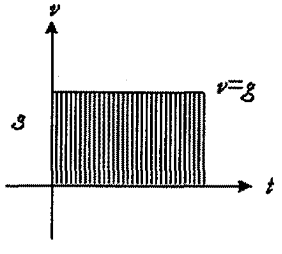
이제 이 정리를 이해하는데 필요한 요소들을 살펴보고자 한다.

III. 미적분학의 기본정리에 대한 역사적 고찰

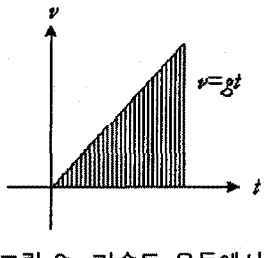
미분과 적분은 Newton과 Leibniz에 의해 본격적으로 발달되었다. Toeplitz(2006)는 미분과 적분의 관계가 등가속도 운동에 대한 시간-속도 그래프 아래의 넓이를 구하는 문제에서부터 점진적으로 인식되었다고 보았는데, 운동학적 맥락에서 인식된 미분과 적분의 관계는 함수개념의 발달 및 Cauchy의 공로로 현재와 같은 모습의 미적분학의 기본정리로 정리되었다. 정연준(2010)은 이 정리의 역사적 발생과정을 기하적 단계, 대수적 단계, 그리고 형식화 단계로 나누어 자세히 관찰한 바 있다. 이를 기초로 하여 이 장에서는 시대 순으로 미적분학의 기본정리의 아이디어가 구체화되고 완성되는 과정을 간략히 살펴본다.

1. 미적분학의 기본정리의 발견의 초기단계

Toeplitz(2006, 133-5)는 미적분학의 기본정리의 발견을 가능하게 했던 연구로 Galilei의 낙하 실험을 들고 있다. Galilei는 등속도 운동인 경우 그 물체가 움직인 거리가 직선 아래의 넓이임을 알고 있었다(<그림 1>) 참조). 낙하운동이 등가속도 운동일 때, 속도는 시간 t에 비례한다고 생각하였다. 곧 $v = gt$라고 가정하고, 직선 $v = gt$에 이르는 모든 세로선의 합 즉, 직선 아래의 빗금친 부분의 넓이는 움직인 전체의 거리와 같다고 보았다(<그림 2> 참조). 이를 바탕으로 이동한 거리는 $\frac{1}{2}gt^2$이 됨을 추론하였다. 이 넓이는 순간 t에서 속도를 나타내는 수선인 불가분량의 합이 되고, 이동거리의 순간변화율은 수선의 길이인 순간속도가 된다. Galilei는 낙하실험에서 등가속도운동을 한다는 가정과, 시간-속도 그래프에서 불가분량의 개념을 수용하여 미적분학의 기본정리에 대한 아이디어를 얻게 되었다.



<그림 1> 등속도 운동에서 움직인 거리



<그림 2> 가속도 운동에서 움직인 거리

17세기에 해석기하학이 확립되면서 고대로부터 내려온 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 문제는 곡선 아래의 넓이를 구하는 문제로 변화되었고, 곡선 $y = x^n$에 대한 연구가 시작되었다. Cavalieri

는 불가분 개념에 기초하여 0에서 x까지의 $y=x^n$ 아래의 넓이 S가 $S=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots 9)$라는 사실을 기하적으로 유도하였고, 비슷한 시기에 Torricelli, Pascal, Fermat가 독립적으로 또는 각기 다른 방법으로 이 결과를 얻고, 또한 n의 값을 음수, 유리수, 무리수까지도 포함하도록 확장하였다(Boyer, 2004, 136, 143). 여러 수학자들이 적분법에 대한 일반적인 대수법칙을 유도하였으나, 미분과 적분의 관계에 대한 인식에는 이르지 못하였다. 이에 대해, Boyer(2004, 187)는 Fermat가 포물선과 쌍곡선에 대한 접선과 구적법의 문제가 역관계를 갖는다는 것을 인식하였으나, 그 과정을 단순히 기하적인 문제들의 해법으로만 생각했기 때문에 그 과정의 보편성을 알아차리지 못하였고, 미적분학의 기본정리로 발전시키지 못하였다고 보았다.

2. 미적분학의 기본정리의 완성단계

미분과 적분의 기본적인 관계는 Barrow에 의해 뚜렷하게 인식되었다. Barrow는 Galilei의 연구 결과를 이어받아 속도함수와 거리와의 관계에서 나타나는 미적분학의 기본정리를 발견하고, 『기하학 강의(Geometrical Lectures)』에서 단조증가함수에 대하여 그래프와 축 사이의 넓이 함수의 접선의 기울기가 원래 함수의 함숫값과 일치한다는 것을 기하학적으로 증명하였다(Katz, 1993, 457-60). 이 관계를 현대적으로 표현하면 다음과 같다.

함수 $f(x)$가 $a \le x \le b$에서 '연속'이고 단조함수일 때,

$F(t)=\int_a^t f(x)dx$라고 할 때, $F'(t)=f(t)$이다(Toeplitz, 2006, 152).

Barrow는 접선문제와 넓이문제가 서로 반대의 관계에 있다는 사실을 명확하게 이해하였으나 기하학적 방법에 집착하였고, 관련된 연산들을 해석학적으로 충분히 발전시키지 않아서 이 관계를 이용하여 정적분 및 넓이 계산을 할 수 있다는 사실은 발견하지 못하였다(Boyer, 2004, 211). 이 사실은 Newton과 Leibniz에 의해 인식되었는데, Courant(2003)은 Newton과 Leibniz의 가장 큰 공헌을 '주어진 곡선에 접하는 접선을 찾는 문제'와 '곡선의 내부의 넓이를 구하는 문제'인 미분과 적분의 기본적이고 근본적인 두 문제 사이의 관계를 명확하게 규정지은 것으로 보았다.

Newton은 곡선 아래의 넓이가 무한소 사각형의 합이라는 아이디어와 미분법의 역과정을 이용하여 넓이를 구하였다. 그는 곡선과 곡선 아래의 면적에 대한 일반적인 식을 유도하였는데, 이 과정에서 곡선 아래의 면적에 대한 함수가 주어졌을 때, 그 면적의 순간증가를 생각하고 이를 이용하여 곡선의 식을 얻어내는 방법을 사용하였다(Boyer, 2004, 220). Newton은 면적의 변화율이 곡선의 세로 좌표와 같다는 사실을 이용하여 해석학적으로 구적법을 확립하고, 구적법에 대한 보편적인 계산법을 완성하였다. Leibniz는 무한소 해석학을 바탕으로 구적법 및 접선에 대한 연구를 하였는데, 가로 좌표와 세로 좌표의 차들이 무한히 작아질 때, 곡선의 접선이 그 차들의 비에 의존한다는 것과 구적법은 가로좌표에 있는 무한소 구간에 대한 세로좌표 또는 무한히 가는 직사각형의 합에 의존한다는 것을 인식하고, 미분과 적

분의 관계를 차와 합사이의 관계로 언급하였다. 차와 몫에 대한 규칙을 확립한 후에, Leibniz는 모든 정수 n에 대하여 x^n의 적분을 미분의 역관계를 이용하여 구하였다(Boyer, 2004, 236-7). 특히, Leibniz는 미적분학의 기본정리를 오늘날 사용되는 기호와 용어를 사용하여 최초로 형식화하였다(Kline, 1972). Newton과 Leibniz는 넓이를 주어진 함수의 원시함수를 이용하여 계산할 수 있다는 것을 파악하였으며, 이러한 발견을 통해서 이전에 독립적으로 발전하였던 미분과 적분을 하나의 보편적인 계산법으로 통합하였다.

18세기에는 Newton이나 그 이전 사람들이 생각했던 무한히 작은 값이나 무한히 합하는 과정은 심각한 도전을 받게 되었다(Boyer, 2004, 262). Newton과 Leibniz이후에 Bernoulli, Lagrange, Bolzano와 같은 많은 수학자들은 적분을 합의 극한이 아닌 미분의 역으로 정의하였는데, 불연속함수의 적분을 미분의 역 개념으로 설명할 수 없었고, 부정적분이 존재하지 않는 함수가 발견되면서 부정적분의 개념만으로는 적분을 설명할 수 없게 되었다(Kline, 1972, 956-8). Cauchy는 극한을 기초로 한 미적분학의 체계속에서 적분을 정적분이라는 이름으로 부분합의 극한으로 정의하였고, 오늘날과 같은 해석학적인 증명을 하였다(Katz, 1993, 648).

IV. 미적분학의 기본정리의 개념 학습에 대한 분석

미적분학의 기본정리에는 다양한 수학적 개념이 관련되어 있다. 이 장에서는 선행연구를 통해 미적분학의 기본정리의 이해의 요소와 적용되는 사고과정을 살펴보고, 공통적으로 강조되고 있는 이해의 요소가 증명과정에 어떻게 적용되어 있는지를 분석해보고자 한다.

1. 미적분학의 기본정리의 학습에 있어서 사고과정과 개념 분석틀

미적분학의 기본정리의 중요성과 학생들이 겪고 있는 이해의 어려움으로 인해 미적분학의 기본정리의 지도법에 대한 연구가 계속되어 왔다. 주로 학생들의 능동적인 학습을 지원하는 지도법에 대한 연구가 이루어져왔고, 특히, 그래픽 계산기, 컴퓨터 등 공학기기를 활용하려는 시도가 활발히 이루어졌다(예를 들면, Gordon(1991), Hong(1999), Suzuki(2003)). 또한, Thompson(1994), Carlson, et al.(2003), Smith(2008)는 미적분학의 기본정리에 관련된 수학적 개념과 사고활동에 대한 연구를 하였다.

Thompson(1994)은 학생들의 미적분학의 기본정리의 이해와 관련한 어려움의 원인으로 함수, 평균변화율에 대한 이해의 부족을 지적하고, 무한소 변화량과 변화율 개념이 미적분학의 기본정리 이해의 핵심이 된다고 분석하였다. 이를 바탕으로 미적분학의 기본정리의 개념적 이해를 개발하기 위한 4단계를 제안하고, 교수실험을 하였다. 4단계는 1) 함수의 그래프에 대한 이해, 2) 고정된 길이의 구간 위에서 평균변화율에 대한 이해, 3) 리만합 개념에 기초한 변화량의 누적에 대한 이해, 4) 변량의 누적과 누적의 변화율 사이의 관계에 대한 이해로 이루어져 있다. 무한소, 변화율, 함수개념의 학습을 통해 미적분학의

기본정리의 이해를 도모하고자 한 Thompson의 실험이 결론적으로는 만족할만한 결과를 얻지 못하였지만, 이를 통해 그는 미적분학의 기본정리를 이해하기 위해서는 변화율, 무한소에 대한 이해가 우선되어야 하며, 누적 조각(accrual)이 곱의 구조를 가지고 있으며, 전체 누적량은 곱의 구조를 지닌 무한소 조각(infinitesimal accruals)에 의해 만들어짐을 이해하는 것과 공변추론능력(covariational reasoning)이 필요하다고 제언하였다.

Carlson, et al.(2003)은 Thompson(1994)이 미적분학의 기본정리 이해의 요소로 지적한 누적량, 변화율, 공변추론에 기호적 요소를 추가하여 미적분학의 기본정리의 이해와 개발을 위한 분석틀을 만들고, 이를 토대로 학생들의 이해와 추론능력을 분석하였다. 이 분석틀은 다음의 4가지 영역으로 구성되어 있다: 미적분학의 기본정리를 이해하기 위한 기본적 이해와 추론능력(Part A), 누적되는 조각에 대한 공변추론(Part B), 부정적분과 정적분의 기호에 대한 이해(Part C), 미적분학의 기본정리 명제와 관계에 대한 이해(Part D). 그들은 이 분석틀을 사용하여 미적분학의 기본정리의 개념적 기호적인 면에 관련한 학생들의 이해와 추론능력을 분석하였고, 이 과정에서 Part B와 Part D의 정교화를 제언하였다.

Smith(2008)은 누적을 이해하는 정신활동으로서의 공변추론을 강조한 Carlson, et al.의 분석틀에 기초하여 미적분학의 기본정리에 대한 학생들의 이해를 도모할 수 있는 교수학습활동을 개발하고, 학생의 문제해결과정을 통해 사고과정을 분석하였으며, 이 과정에서 분석틀을 정교하게 만들었다. Smith가 제안한 분석틀은 Carlson, et al.의 분석틀에 정적분의 형식적 정의와 누적의 변화율, 누적조각의 곱의 구조에 대한 정신적 활동을 추가하여, 기본적 이해와 추론능력(Part A), 공변추론과 정신적 활동(Part B), 기호적 측면(Part C)으로 이루어져 있다.

요약하면, Thompson(1994), Carlson, et al.(2003), Smith(2008)는 교수실험을 통해 미적분학의 기본정리의 이해와 문제 해결과정에서 나타날 수 있는 다양한 사고과정과 개념을 추출해냈다. 그들의 분석틀에서 강조하고 있는 것은 누적함수(accumulation function), 누적함수의 변화율, 관계된 사고활동, 기호 등으로 요약할 수 있고, 이들의 분석틀을 비교하면 <표 1>과 같다.

<표 1> Thompson(1994), Carlson, et al.(2003), Smith(2008) 분석틀의 비교

연구자 / 요소	Thompson	Carlson, et al.[1]		Smith[2]	
		이해	추론	이해	추론
함수	함수		FR1		FR1
평균변화율	평균변화율	FU1		FU1	
누적 (누적조각, 누적의 과정, 누적량의 변화율)	누적 누적량의 변화율	FU2	FR2 MA1 MA2 MA3	FU2 FU3 FU4 FU5 FU6	FR2 FTMA1 FTMA2 FTMA3 FTMA4 FTMA5 FTMA6 FTMA7
기호		부정적분 정적분		C-① C-② C-③ C-④	
		미적분의 제 1 기본정리 미적분의 제 2 기본정리		C-⑤ C-⑥	

1) Carlson, et al.(2003)은 분석틀에서 기본적인 이해(Fundamental Understanding)는 FU로, 기본적인 추론(Fundamental Reasoning)은 FR로, 누적되는 양에 대한 공변추론(Mental Action)은 MA로 기호화 하고, 각 영역의 세부적인 항목은 숫자를 사용하여 구분하였다. Part A는 함수를 투입과 산출의 과정으로 보는 사고(FR1)와 독립변수의 변화량과 누적함수의 순간변화율의 변화를 연관시켜 생각하는 사고(FR2), 평균변화율(FU1)과 누적조각이 곱의 구조로 이루어져 있음을 이해하는 것(FU2)으로 이루어져 있다. Part B는 누적 함수의 정해진 구간에서 독립변수의 이산적인 변화량과 누적 함수의 평균변화율을 관련지어 보는 능력(MA1), 정해진 구간의 크기를 작게 만들었을 때, 독립변수의 변화량과 누적 함수의 평균변화율을 관련지어 보는 능력(MA2), 각 구간에서 독립변수의 변화량과 누적함수의 순간변화율을 관련지어 보는 능력(MA3)으로 이루어져있다. Part C는 부정적분과 정적분 기호에 대한 것으로, 부정적분($F(x)=\int f(x)dx$)은 f가 F의 변화율 함수이고, F는 f의 역 도함수(antiderivative)임을 이해하고, 정적분($F(x)=\int_a^x f(t)dt$)은 $F(x)$의 값은 구간 $[a,x]$에서 함수 f와 x축 사이의 누적면적을 의미함을 이해하는 것으로 이루어져있다. Part D는 미적분학의 기본정리의 (1)번 형태($F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$)를 전체 누적량($\int_a^x f(t)dt$)의 순간변화율이 변화율 함수의 함숫값

2. 미적분학의 기본정리의 이해의 요소

선행연구에서 강조되고 있는 미적분학의 기본정리의 이해의 요소로는 누적함수와 변화율과 극한 개념을 들 수 있고, Carlson, et al.(2003)과 Smith(2008)은 학생들의 문제해결과정에 대한 분석을 통해 누적함수와 변화율 개념에 작용하는 사고 활동과 기호적인 면을 세분화 하였다. 본 절에서는 선행연구에서 강조되고 있는 누적함수와 변화율 개념이 증명과정에 어떻게 나타나 있는지 알아보고, 이러한 개념적 요소를 강조하는 것의 의미에 대해 살펴보고자 한다.

2.1.누적함수

Thompson과 Silverman(2008)은 이 누적함수 $h(x)=\int_a^x f(t)dt$가 적분의 이해에 주요 부분을 차지하며 미적분학의 기본정리를 이해하는데도 중요하다고 보았다. 누적함수는 함수를 이용하여 새로운 함수를 정의한 것이어서 이를 이해하려면 그 모체가 되는 적분뿐 아니라 함수 개념에 대한 이해를 필요로 한다. Thompson(1994)은 함수에 관한 이미지가 제대로 형성되어 있지 않음이 기본정리의 이해에 장애 요인이 되고 있음을 지적한 바 있다. Dubinsky와 Harel(1992)도 함수에 대한 학생들의 이해도가 함수

$(f(x))$과 같아짐을 이해하는 것으로, 미적분학의 기본정리의 (2)번 형태($\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$)를 F의 변화량과 f의 누적 면적 사이의 관계로 이해하는 것으로 이루어져있다.

2) Smith(2008)는 기본적 이해는 FU로, 추론능력은 FR로, 공변추론과 정신적 활동은 FTMA로 기호화하고, 각 영역의 세부적인 항목은 숫자를 사용하여 구분하였다. Part A는 함수를 투입과 산출의 과정으로 보는 능력(FR1), 누적함수에서 독립변수의 변화량과 그때의 누적조각을 관련지어 보는 능력(FR2), 평균변화율이 독립변수의 변화량과 함숫값의 변화량에 의해 얻어짐을 이해하는 것(FU1), 누적조각은 곱의 구조를 가진다는 것을 이해하는 것(FU2), 누적조각과 전체 누적량은 그래프에서 그래프 아래의 면적으로 일반화된다는 것을 이해하는 것(FU3), 누적을 이미 누적된 량에 새로운 누적조각을 더하는 과정으로 이해하는 것(FU4), 독립변수의 변화의 구간이 작아질수록 그 구간의 누적량이 정확하게 얻어짐을 이해하는 것(FU5), 누적함수의 변화량은 독립변수의 변화량과 그 구간안의 한 점에서 함숫값의 곱에 의해 얻어짐을 이해하는 것(FU6)을 제시하고 있다. Part B는 함수의 독립변수의 변화량과 변화율 함수의 평균값을 관련지어 보는 것(FTMA1), 곱의 구조를 갖는 작은 구간의 누적량을 그 구간에서 함수의 평균값과 관련지어 보는 것(FTMA2), 독립변수, 함숫값, 누적량의 변화를 관련지어 보는 것(FTMA3), 전체 누적량을 매우 작은 구간으로 나누고, 각각의 면적을 계산하고, 모두 더하는 과정으로 인식하는 것(FTMA4), 전체 누적의 변화율을 인접한 작은 구간의 누적의 평균변화율에 의해 결정되는 것으로 인식하는 것(FTMA5), 누적의 변화율은 이전의 누적에 더해지는 구간의 함수의 평균값에 의해 결정됨을 인식하는 것(FTMA6), 만약 구간이 극한과정을 통해 충분히 작아진다면, 함수의 평균값은 그때의 함숫값과 같아져서, 독립변수의 특별한 값에서의 함숫값과 누적의 순간변화율은 동등하다는 결과를 산출하게 됨을 인식하는 것(FTMA7)으로 세분화된다. Part C는 미적분학의 기본정리와 관련된 기호적인 면으로 ①부분합, ②정적분의 정의, ③부정적분, ④정적분으로 표시된 누적함수, ⑤미적분의 제 2 기본정리, ⑥미적분의 제 1 기본정리의 의미를 이해하는 것에 관련된 내용들로 구성되어 있다.

의 정의역과 공역이 실수의 범위에 한정되어 있거나 대수적 표현이 주어져야만 함수로 생각하는 등 극히 제한적인 데에 머무르고 있다고 하였다.

한편, Thompson과 Silverman(2008)은 누적함수의 이해가 일종의 3차원 곡선 $(x, f(x), h(x)=\int_a^x f(t)dt\ )$을 이해하는 것과 같다고 하였다. 그는 누적의 개념을 적분 아이디어의 중심으로 설명하고, 누적 함수를 이해하기 위해서는 '누적 조각'에 대한 개념화, 극한, 기호에 대한 이해가 필수적이라고 설명하였다.

Smith(2008)는 미적분학의 기본정리의 이해를 위한 분석틀에서 누적 조각에 대한 이해를 다음과 같이 세분화하였다: 누적조각을 이해하는 것은 누적조각이 독립변수의 변화량과 그 구간 안의 한 점에서의 함숫값의 곱으로 이루어져 있고(FU2, FTMA1), 그래프에서 축과 곡선 사이의 면적으로 일반화(FU3)됨을 알고, 누적의 과정은 지속적으로 일어나며(FU4, FTMA4), 독립변수가 변화하는 구간이 작을수록 그 구간에서 정확한 누적조각을 얻을 수 있다(FU5, FTMA2)는 것을 인식하는 것이다.

Smith의 분석을 증명과정에 적용해 보면, 미적분학의 기본정리에 대한 II장의 증명은 누적조각 $f(x_k^*)(x_k-x_{k-1})$ 및 누적함수 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 에 대한 이해를 바탕으로 이루어지며, 이 과정을 이해하기 위해서 독립변수의 변화량과 함수의 변화량, 함숫값, 누적되는 양을 관련지어 보는 사고(FTMA1, FTMA2, FTMA3)를 사용하게 된다. 또한, 이 과정은 누적조각이 곱의 구조로 이루어져 있고(FU2), 전체 누적량은 구간에서 $y=f(x)$와 x축 사이의 면적이고(FU3), 누적의 과정을 이미 누적된 양에 새로운 것을 더하는 과정(FU4)임을 이해하고, 독립변수의 변화구간을 작게 만들수록 그 구간에서 누적의 변화를 보다 자세히 측정할 수 있음(FU5)을 이해하고, 지속되는 누적의 과정을 이해(FU4, FTMA4)하는 것을 포함하게 된다.

위의 분석과 같이 증명과정에서 각 요소들을 세분화하여 인식하는 것은 이 후의 증명과정을 이해하는 데 도움이 된다. 예를 들어, 누적조각이 곱의 구조를 지니고 있음을 이해하는 것은 이후의 증명과정에서 변화율의 의미를 이해하는 데 필수적인 요소가 되고, 학생들이 변화량과 변화율에 대한 혼동을 방지하는데 도움을 준다. Thompson(1994)는 실험에서 원추용기에 담긴 물 부피의 변화율을 구할 때, 학생들은 높이의 무한소적 변화에 대한 부피의 변화율을 단면적으로 해석하기보다는 부피의 극소 변화량을 단면적이라고 해석하는 경향을 보인다고 지적하였다. 이처럼 부피의 극소 변화량을 단면적이라고 생각하는 것을 Oehrtman(2002)은 극한 개념에 대해 학생들이 갖게 되는 은유의 하나인 차원의 붕괴[3]라고 보았다. Smith는 물 부피를 구할 때의 누적조각이 갖고 있는 곱의 구조를 상기시키면 부피의 높이에 대한 변화율이 단면적이 됨을 이해하는 데 도움이 된다고 하였다.

---

3) 차원의 붕괴는 극한값을 원래보다 한 차원 낮은 것으로 생각하는 오개념에 대한 은유이다. 예를 들면 Thompson(1994)의 실험에서 볼 수 있는 것처럼 용기에 담긴 물의 부피를 높이(h)의 함수로 표현할 때, 높이가 변화가 매우 작아지면, 부피의 변화량이 단면적(S)이 된다고 생각하는 것이다.

2.2 변화율과 극한

II절의 증명을 살펴보면, (1)번의 증명에는 $\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0}$ 이, (2)번의 증명에는 $\dfrac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 과 같은 함수의 변화율이 등장함을 본다. 결국 미적분학의 기본정리를 이해하려면 어떤 함수 $g(x)$의 x에 대한 변화율, 즉, $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$ 꼴의 변화율이 의미하는 것을 이해하는 것이 중요한 단계임을 알 수 있다. (1)번의 증명에서는 중간값 정리를 써서 이 변화율이 의미하는 것이 주어진 함수 f로 나타남을, 즉,

$$\frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0}=f(x^*),\quad x^*\text{는 } x\text{와 } x_0 \text{ 사이의 수},$$

임을, 그리고 (2)번에서는 평균값 정리를 써서 이 변화율의 의미를 이해하였다:

$$\frac{F(x_k)-F(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=f(x_k^*)=F'(x_k^*)$$

변화율의 의미를 이해하고 나면 그 다음 단계로 함수 f가 연속인 경우, c가 a와 b 사이에 있고 b가 a로 다가갈 때 $f(c)$가 $f(a)$로 다가간다는, 즉,

$$\lim_{b\to a} f(c)=f(a)$$

에 들어 있는 극한, 혹은 무한소적 변화에 대한 개념의 이해가 필요하다.

이처럼 변화율, 극한과 연속성 개념을 사용하여 증명하는 과정은 다양한 사고의 과정을 거친다. Smith의 분석틀에서 상세하게 분석한 변화율과 극한에 대한 사고과정과 이해의 요소를 증명과정에 적용해 보면, 변화율 개념에서 누적조각이 독립변수의 변화량과 함수의 평균값의 곱의 구조를 갖고(FU2, FTMA1) 있음을 인식할 때, $\dfrac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x-x_0}$ 의 값이 f의 함숫값 $f(x^*)$이 됨을 이해할 수 있게 된다. 이러한 사고의 바탕에는 누적함수의 변화율은 결국 인접한 작은 구간의 누적의 평균변화율에 의해 결정되고(FTMA5), 작은 구간에서 누적함수($h(x)$)의 평균변화율은 함수($f(x)$)의 평균값에 의해 결정됨(FTMA6)을 인식하는 것이 깔려있다. 이러한 인식은 누적함수의 순간 변화율을 구할 때, 전체 구간에 대해 생각하는 것이 아니라 더해지는 새로운 누적 조각에 초점을 맞추고, 그 누적조각의 순간 변화율만 생각하는 것으로 확장된다. 증명과정에서 누적함수의 순간변화율을 구하는 과정은 극한과 연속성 개념을 사용하여 $x\to x_0$일 때 $f(x)$가 연속이므로 $f(x^*)$는 $f(x_0)$로 다가가는 것으로 설명하였

는데, 이 과정을 식으로 나타내면,

$$\frac{dh}{dx}\Big|_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(x^*) = f(x_0)$$

이다. 이 과정은 극한과정을 통해 독립변수의 변화량이 충분히 작아질 때, 함수의 평균값은 특정한 한 점에서의 함숫값과 같아지고, 이것은 누적함수의 순간 변화율과 같음(FTMA7)을 이해하는 것을 포함한다.

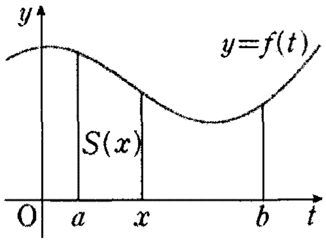
위의 분석과 같이 증명과정에서 변화율 개념 이해의 과정을 세분화하여 설명하는 것은 학생들이 전체 누적의 변화율은 결국 인접한 작은 구간의 누적량의 변화율에 의해 결정되고, 이 변화율은 함숫값과 같아진다는 것을 인식할 수 있도록 도와준다. 이러한 사고의 과정은 문제해결과정에서 누적조각의 곱의 구조에 대한 이해와 결합되어, 학생들이 변화율의 의미를 쉽게 이해하도록 해 준다.

V. 미적분학의 기본정리의 지도 방안

지금까지 분석한 결과를 바탕으로 미적분학의 기본정리의 지도 방안을 제시하고자 한다. 지도 대상에 따라 교수 목표가 달라지므로 가르치는 대상을 먼저 고려하여야 할 것이다. 지금까지 살펴본 여러 연구들은 그 대상이 고등학생부터 대학원생까지 다양하였다. 지도할 대상의 연령이나 선행학습 정도, 혹은 진로 등에 따라 미적분학의 기본정리의 이해를 어느 수준으로 요구할 것인가라는 질문을 해 볼 수 있다. 방정식의 풀이를 예로 들면 처음에는 1차방정식을 풀 것을 요구하고 그 다음에 2차 방정식 순으로 나가는 것처럼 같은 방정식을 가르치더라도 각 단계에서 요구되는 이해의 정도는 다를 수 있다. 앞에서 살펴본 것처럼 이 정리는 제대로 된 이미지를 형성하기 어려운 누적함수, 변화율, 극한 등의 개념들을 포함하고 있으므로 한 번에 모든 것을 이해하기를 요구하기보다는 적어도 두 단계 이상에 걸친 반복 지도가 필요하다고 본다. 심재동 등(2005)은 다항함수의 미분법과 적분법 등이 중복될 경우 이로 인해 흥미를 잃게 하거나 교육시간의 부족과 같은 부정적인 면이 있을 수 있음을 지적하였다. 그러나 미적분학의 기본정리의 반복은 미분 적분 전체를 반복하는 것과는 달리 우선 시간을 많이 소요하지 않으며 반복할 만한 중요성과 이해의 깊이가 있는 내용이라는 점에서 차이가 있다고 하겠다.

국내 중등 교육과정의 개편에 따라 대부분의 학생이 고등학교에서 이 정리를 처음 학습하게 될 것을 염두에 두면 첫 단계에서는 직관적인 이해와 산술적 조작에 중점을 두게 한다. 2009년 9월에 모 대학에서 1학년 2학기에 주로 이수하는 다변수함수의 미적분학을 수강하는 학생 19명을 대상으로 첫 강의시간에 설문을 한 결과 모두 정리 (2)를 이용하여 적분계산을 할 줄 알았고 정리 (1)을 이용하여 답을 할 수 있는 학생은 15명이었다. 그러나 19명 중 한 명 만이 미적분학의 기본정리를 쓰라는 질문에 대해 정리 (2)를 기술하였을 뿐 미적분학의 기본정리라는 말을 들어 본 기억이 없다고 하였다. 학생들은 별 어려움 없이 이 정리를 받아들이고 이를 이용하여 계산을 하지만 수학적인 사고과정에 관심을 기울이지 않는다.

이는 먼저 기억력이 발달하고 논리적인 사고력은 20대가 넘어야 발달한다는 일반적인 인지 능력의 발달 과정에 따른 자연스러운 현상일 수도 있다. 그러므로 이 단계에서는 II 단원에서 소개한 정리의 내용과 증명을 소개하고 미적분학의 기본정리가 내포하는 부정적분과 정적분의 관계, 정적분과 미분의 역 함수 관계 등을 언급하되 산술적 조작에 익숙해지는 것을 목표로 두고 아래와 같이 지도할 것을 제안한다: 변화량과 변화율의 기하적인 관계를 Newton의 아이디어를 따라 <그림 3>을 통하여 면적의 직관적인 개념과 연관시켜 설명한다.



<그림 3>

즉, 곡선 $y=f(x)\geq 0$ 과 x-축 사이, $x=a$부터 $x=b$ 사이의 면적을 $S(b)$라고 하면, $f(x)$가 연속인 범위에서 $S(x)-S(x_0)\approx f(x^{\#})|x-x_0|$ (여기서 $x^{\#}$는 x와 x_0 사이에 있는 어떤 수)로서 좌변의 직관적으로 정의한 면적 $S(x)$가 우변의 높이를 $f(x^{\#})$로 하는 직사각형의 면적과 근사함을 보여준다. 이것은 IV장에서 분석한 바에 따르면 $S(x)-S(x_0)$가 지니고 있는 곱의 구조를 설명하는 것에 해당한다. 그 다음, 이 식을 $\dfrac{S(x)-S(x_0)}{|x-x_0|}\approx f(x^{\#})$ 꼴로 표현함으로써 평균값정리를 짐작함과 동시에 좌변에서 면적 $S(x)$의 변화율 혹은 순간변화율인 도함수, 즉 미분의 개념을 생각할 수 있고, 동시에 그 도함수가 높이를 나타내는 함수 $f(x)$, 즉, $S'(x)=f(x)$임을 이해하도록 이끈다. 또한, 직관적 개념인 면적을 직사각형들의 합으로 근사시켜 극한을 취한 정적분과 연계시킬 수 있다는 것, 즉, $S(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)\,dx$ 를 짐작하게 한다. 이 과정에서 교사는 IV장에서 분석한 개념과 사고과정에 대한 이해를 바탕으로 곱의 구조를 지닌 누적조각의 의미와, 전체 누적의 변화율은 결국 인접한 작은 구간의 누적조각의 변화율에 의해 결정되고 이 변화율은 함숫값과 같아진다는 인식을 하고 설명을 하는 것이 필요하다.

IV장에서 분석한 누적함수와 변화율에 대해 세분화한 내용을 강조하는 것은 학생들이 변화량과 변화율의 혼동을 방지하도록 하고, 누적함수 개념과 누적조각에 대한 개념화를 도와주며, 증명과정과 문제해결과정에서 산출되는 각 식의 의미를 이해하는데 도움을 준다. 변화율 개념에 대해 Thompson이 관찰한 차원의 붕괴와 같은, 즉, 부피의 변화율이 아닌 변화량을 단면적으로 보는 것과 같은 잘못된 이미지를

갖지 않도록 변화율에 대한 직접적인 이미지를 갖게 하기보다는 식 $S(x)-S(x_0) \approx f(x^{\#})|x-x_0|$ 을 통해 보게 하는 것도 한 방법이라고 하겠다.

누적함수의 이해를 위한 함수 도식의 확장에 관해서는 이 정리를 가르치기 전에 먼저 함수의 개념에 대한 이해를 증진시키는 것이 필요하다고 본다. Thompson(1994)도 미적분학의 기본정리의 이해에서 함수의 변화율을 생각하기 이전에 함수의 개념을 확실히 할 필요가 있음을 강조한다. 김연미(2008)는 함수 개념의 이해에 있어서 학생들의 사고패턴이 복잡하며 또한 여러 전공 영역에 다양하게 등장함에도 불구하고 도입 방식이 제한적임을 지적하였다. 함수를 순서쌍의 집합으로 표현하거나 정의역의 원소가 함수일 때, 함수의 개념에 대해 자주 다루는 대상이 고정되면 비록 함수의 정의를 알고 있어도 선뜻 함수 관계를 인식하지 못함을 볼 수 있었다. 2010년 3월에 경영경제수학을 수강하는 주로 대학 2학년으로 구성된 40명의 학생을 대상으로 조사해 본 결과 처음에 80%이상이 순서쌍으로 표현된 함수를 함수로 인식하지 못하였고 인식하지 못한 학생들을 개인적으로 이해할 때까지 가르쳤으나 4주가 지난 후 중간시험에서 비슷한 문제를 내었을 때 여전히 60%의 학생들은 제대로 답을 할 수 없었다. 미적분학의 기본정리에 대한 수업이전에 다양한 함수를 접하도록 하여 누적함수와 같이 함수의 정의에 함수가 사용된 것도 이해할 수 있도록 하여야 할 것이다.

두 번째 단계로 대학에서 다시 미적분학에 관련된 것을 학습하는 과정에서 적어도 첫 단계 수준으로 반복 한다. 대학에서 이 정리를 복습하기 위해 위와 같은 내용으로 소개하였을 때 학생들은 이 정리를 새롭고 흥미롭게 느끼며 받아들임을 볼 수 있었다. 이에는 여러 가지 요인이 있을 수 있다. 예를 들면, 학습 목표가 더 이상 입시가 아니란 점을 포함한 학습 환경의 변화나 학생들의 신체 발달적 변화 등으로 인해 학생들의 관심사가 달라졌을 수 있다. 이 과정에서 학생들이 관심을 보이는 면에 대해 이해를 할 수 있도록 도울 수 있어야 할 것이다.

VI. 결론 및 제언

본 연구에서는 미적분학의 기본정리에 대한 지도방안을 탐색해 보기 위해 미적분학의 기본정리와 증명, 역사를 살펴보고, Thompson(1994), Carlson, et al(2003), Smith(2008) 등의 연구에 기초하여 미적분학의 기본정리의 이해를 위한 요소로 누적함수와 변화율을 강조하였다. 또한, 이해의 요소들이 증명과정에 어떻게 나타나 있는지를 분석하였다. 이러한 분석을 통해 교사는 가르쳐야할 내용에 대한 정보와 교수·학습과정을 개발하는데 필요한 정보를 얻을 수 있게 된다. 따라서 교사는 IV장에서 분석한 미적분의 기본정리의 이해의 요소와 사고과정에 대한 정보를 갖고, II장에서 소개한 미적분학의 기본 정리의 내용과 증명과정, 그리고 문제해결과정에서 각 요소들이 개발 될 수 있도록 교수-학습 과정을 구성하는 것이 필요하다. 즉, 고등학교 공통과정에서는 면적개념을 이용하여 미적분학의 기본정리에 대해 직관적인 이해를 할 수 있도록 교수-학습과정을 구성하고, 증명과정과 문제해결과정에서 IV장에서 분석한 미적분의

기본정리의 이해의 요소를 강조하여 지도하는 것이 필요하다.

본 연구에서 제안한 미적분학의 기본정리의 이해의 요소를 강조한 교수·학습과정을 실제로 적용한 후, 학생들의 개념변화에 대한 연구를 수행하여 연구의 주장을 확인해 보는 것이 다음 과제라고 하겠다. 또한 이는 예비교사 및 현직교사가 가르치는데 필요한 수학적 지식(mathematical knowledge for teaching)에 대한 후속 연구과제를 제시한다.

참 고 문 헌

김연미 (2008). 공과대학 신입생들의 함수개념 연구와 함수 영역의 교육과정에 대한 제언. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **22(4)**, 417-444

심재동 · 하준홍 · 이경희 · 천창범(2005). 미분적분학 단계별 교육을 위한 교과내용 및 방법 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **19(4)**, 633-647

정연준 (2010). 미적분의 기본정리에 대한 교수학적 연구, 서울대학교 박사학위 논문

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall(Ed.) Advanced mathematical Thinking. *Boston:Kluwer*, 167-198.

Boyer, C. B. (2004). 미분적분학사(그 개념의 발달). (김경화, 역). 서울: 교우사

Carlson, M. P., Smith, N. N., & Persson, J. (2003). Developing and connecting calculus students' notions of rate of change and accumulation: The FTC. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox(Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*(Vol.2, pp.165-172). Honolulu, HI: University of Hawaii.

Courant, R. (2003). 수학이란 무엇인가. (박평우, 김운규, 정광택, 역). 서울: 경문사

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Gordon, S. P. (1991). Discovering the Fundamental Theorem of Calculus Using Computer Algebra System. *Mathematics and computer education* **25(1)**, 6-9

Hong, Y. Y. (1999). *Promoting versatile understanding in integration using a computer*. Unpublished Ph. D. Dissertation, The University of Auckland.

Katz, J. (1993). *A history of mathematics*. Harper Collins College Publishers

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.

Larson, R., Hostetler, R. P., & Edwards, B. H. (2002). *Calculus of a single variable(7th Ed)*, Boston: Houghton Mifflin Co.

Oehrtman, M. C. (2002). *Collapsing Dimension, Physical Limitation, and other Student Metaphors for*

Limit Concepts: An Instrumentalist Investigation into Calculus Students' Spontaneous Reasoning. Unpublished Ph.D. Dissertation, University od Texas, Austin.

Smith, N. N. (2008). *Student's emergent conceptions of the fundamental theorem of calculus*. Unpublished Ph. D. Dissertation, Arizona state university.

Suzuki, J. (2003). The area under a curve: conjecturing the fundamental theorem of calculus, *Mathematics Teache*, **96(7)**, 474-8

Tall, D. (1997). Functions and Calculus. In A. J. Bishop et al (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289 - 325, Dordrecht: Kluwer.

Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus, *Educational Studies in Mathematics* **26**, 229-274

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Toeplitz, O. (1967). *The Calculus: a genetic approach*. The University of Chicago Press.

An exploration of alternative way of teaching the Fundamental Theorem of Calculus through a didactical analysis

Sung-Ock Kim
Global Leadership School, Handong Global University
E-mail : sokim@handong.edu

Sooyoung Chung
Dunchon High School
E-mail : sooy95@hotmail.com

Oh Nam Kwon+
Department of Mathematical Education, Seoul National University
E-mail : onkwon@snu.ac.kr

This study analyzed the Fundamental Theorem of Calculus from the historical, mathematical, and instructional perspectives. Based on the in-depth analysis, this study suggested an alternative way of teaching the Fundamental Theorem of Calculus.

* ZDM Classification : C35
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C99
* Key Words : Fundamental Theorem of Calculus, collegiate mathematics education
+ Corresponding author