

다중격자 기법이 적용된 효율적인 조화 균형법 개발

임 동 균,¹ 박 수 형,^{*2} 권 장 혁³

DEVELOPMENT OF EFFICIENT HARMONIC BALANCE METHOD WITH THE MULTIGRID METHOD

D.K. Im,¹ S.H. Park^{*2} and J.H. Kwon³

In order to analyze the periodic unsteady flow problem efficiently the partially implicit harmonic balance (PIHB) method was developed. Contrary to the existing harmonic balance method, this method handles the harmonic source term explicitly and deals with flux terms implicitly. This method has a good convergence in comparison with the full explicit harmonic method and it is easy to apply this method because there is no need to calculate the complicated flux Jacobian term by comparing with the full implicit harmonic method. With the multigrid method about the each harmonic it turns out that this method has a good convergence regardless of the number of harmonics. The oscillating flows over NACA0012 airfoil is considered to verify this method then the result corresponded to both the result of dual time stepping and explicit Runge-Kutta method.

Key Words : 비정상유동(Unsteady Flow), 조화 균형법(Harmonic Balance Method), 주파수 영역 기법(Frequency Domain Method)

1. 서 론

비정상 유동에 대한 수치해석 기법으로 최근에 주파수 영역기법에 대한 연구가 이루어지고 있다. Hall 등[1]은 푸리에 변환 함수를 이용하여 주파수 영역의 유속항을 계산하였으며 터보 기계 내부 유동에 그 기법을 적용하여 2배 이상 빠른 해를 얻을 수 있음을 보여주었다. McMullen 등[2,3]은 FFT(Fast Fourier Transform)를 이용하여 시간 영역 지배방정식과 주파수 영역으로 변환된 지배방정식을 오고가면서 비선형 지배 방정식을 해석하는 주파수 영역 기법을 제안하였다. Gopinath 등[4]은 McMullen 등이 제안한 기법의 번거로운 부분인 시간 영역과 주파수 영역을 변환해 가며 수렴시켜 가는

과정을 푸리에 배열 행렬(fourier collocation matrix)를 적용하여 보완한 방법을 제안하였다.

이와 같은 주파수 영역 기법을 적용하면 기존의 비정상 유동 계산 시간에 비해 최대 7배 이상 계산 시간을 절감할 수 있는 것으로 알려져 있다. 그러나 기존의 주파수 영역 기법은 외제적 시간 적분법(explicit time integration)을 주로 적용해 오고 있어서 CFL 수에 대한 제한으로 주파수 영역기법이 가지는 효과를 충분히 나타내는데 한계가 있다. 또한, 많은 수의 조화함수를 적용할 경우, 조화함수의 수에 비례하는 계산비용을 감수해야 한다.

이러한 이유로 최근의 주파수 영역기법에 대한 연구는 내재적(implicit)으로 조화 원천항(harmonic source term)을 처리하는 방향으로 연구 중이다. Woodgate 등[5]은 유속항과 조화 원천항(harmonic source term)을 내재적(implicit)으로 처리하여 외제적(explicit)으로 처리할 때 발생하는 문제를 해결하기 위한 시도를 하였다. 하지만 내재적(implicit)으로 조화 원천항(harmonic source term)을 처리하기 위해서는 추가적으로 발생하는 유속 자코비안 행렬(flux Jacobian matrix)을 계산해야 하는데, BILU(Block Incomplete Lower Upper) 행렬을 구성하여 계산하는 방법을 제안하였다. 하지만 조화 함수의 개수가 증

접수일: 2010년 10월 15일, 수정일: 2010년 11월 24일,

게재확정일: 2010년 11월 26일.

1 정회원, 한국과학기술원 기계항공시스템 학부

2 정회원, 건국대학교 항공우주정보시스템공학과

3 정회원, 한국과학기술원 기계항공시스템 학부

* Corresponding author, E-mail: pish@konkuk.ac.kr

가할 경우 잔류치 값이 수렴함에 따라 발산하는 경향을 나타내었다. Cagnone 등[6]은 내재적 LUSGS기법(implicit LUSGS method)을 오일러(Euler) 방정식에 적용하여 내재적 주파수 영역 기법(implicit non-linear frequency domain method)을 제안하였다. 하지만 내재적(implicit)으로 해결하기 위해 추가되는 복잡한 과정으로 적용하기 어려우며 주파수 영역 기법의 효율성을 충분히 나타내는데 제한을 주었다. Thomas 등[7]은 내재적(implicit)으로 조화 원천항(harmonic source term)을 처리하기보다 CFL 수의 제한을 피하기 위해 안정성 분석 방법(stability analysis)으로 생성된 행렬을 이용함으로써 수렴 안정성을 높이는 방법을 제안하였다. 안정성 분석 방법(stability analysis)으로 생성된 행렬은 푸리에 변환 행렬(Fourier transform matrix)로 구성되어 있으며 이 행렬을 유속항과 조화 원천항(harmonic source term)에 역행렬 형태로 곱해져야 한다. 하지만 조화 함수의 수가 증가하면서 역행렬 계산 및 역행렬과 유속항 및 조화 원천항(harmonic source term)의 행렬 계산이 무시할 수 없을 만큼 계산 시간을 증가시키게 된다.

본 연구에서는 유속항을 내재적(implicit)으로 처리하고 조화 원천항(harmonic source term)을 외재적(explicit)으로 처리함으로써 추가적인 유속 자코비안 행렬(flux Jacobian matrix)을 생성시키지 않으며 내재적 기법(implicit method)의 수준까지 수렴 안정성을 높이는 부분 내재적 조화 균형법(partially implicit harmonic balance method)을 제안한다. 이러한 경우 주파수 수가 매우 크거나 매우 작을 때 수렴안정성에 영향을 미칠 수 있지만, 대부분의 비정상 유동 조건을 고려할 때, 극단적 주파수 영역이 본 기법에 매우 미미하게 영향을 줄 것으로 판단된다. 또한 주파수 영역 기법은 기존의 시간 영역 비정상 유동 해석 기법과 달리 정상 유동 해석 기법과 동일한 방법으로 해를 구할 수 있으므로 수렴 가속화 기법을 적용할 경우 계산 비용을 크게 절감할 수 있다. 본 연구에서는 다중 격자 기법을 부분 내재적 조화 균형법(partially implicit harmonic balance method)에 적용하였으며, 각각의 조화함수에 따라 적용함으로써 조화 함수의 수와 무관하게 뛰어난 수렴성을 보여 주었다. 또한 정상 유동 문제에서 다중 격자 기법(multi-grid method)의 성능을 비교하여 본 연구 기법이 적용된 비정상 문제에서도 유사한 다중 격자 기법(multi-grid method)의 성능을 확인할 수 있었다.

본 기법을 사용할 경우 매우 쉽게 기존의 해석자에 주파수 영역기법을 적용할 수 있으며 조화 함수의 수와 무관하게 매우 좋은 수렴 안정성을 나타낼 수 있다.

2. 본 론

2.1 조화 균형법

기존 해석자의 지배방정식을 이용하여 주파수 영역 기법의 지배방정식을 유도해 보면, 먼저 일반적인 시간영역의 지배방정식을 식 (1)과 같이 나타내며

$$F(t) = \frac{dQ(t)}{dt} + R(t) = 0 \tag{1}$$

주파수 영역 기법을 적용하기 위해 지배방정식의 해인 Q 값과 잔류치인 R 값이 주파수 ω 시간에 주기적이라고 가정하고 충분한 조화함수의 수 N_H 를 이용하여 푸리에 급수로 Q 와 R 을 식 (2,3)과 같이 표현할 수 있다.

$$Q(t) = \widehat{Q}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\widehat{Q}_{cn} \cos(\omega nt) + \widehat{Q}_{sn} \sin(\omega nt)) \tag{2}$$

$$R(t) = \widehat{R}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\widehat{R}_{cn} \cos(\omega nt) + \widehat{R}_{sn} \sin(\omega nt)) \tag{3}$$

식 (1)에 대입하여 각각의 계수를 비교하여 나타내면 식 (4-6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\widehat{R}_0 = 0 \tag{4}$$

$$\omega n \widehat{Q}_{sn} + \widehat{R}_{cn} = 0 \tag{5}$$

$$-\omega n \widehat{Q}_{cn} + \widehat{R}_{sn} = 0 \tag{6}$$

식 (4-6)을 행렬형태로 표현 하면 식 (7)과 같다.

$$\omega M \widehat{Q} + \widehat{R} = 0 \tag{7}$$

여기서, \widehat{Q} 와 \widehat{R} 이 서로 비선형관계에 있으므로 식 (7)을 직접 해석하는 것은 매우 어려우므로 Hall 등[1]이 제안한 푸리에 변환식을 이용하여 시간 영역으로 식 (7)을 역변환 시킨다. 먼저 주기($T = 2\pi/\omega$)를 등간격($\Delta t = 2\pi/(N_T\omega)$)으로 하여

Q 와 R 값을 식 (8)과 같이 나타내고 그 다음 푸리에 변환식을 이용해서 \hat{Q} 와 \hat{R} 을 식 (9)와 식 (10)과 같이 나타낸다.

$$Q_{hb} = \begin{pmatrix} Q(t_0 + \Delta t) \\ Q(t_0 + 2\Delta t) \\ \vdots \\ Q(t_0 + T) \end{pmatrix}, \quad R_{hb} = \begin{pmatrix} R(t_0 + \Delta t) \\ R(t_0 + 2\Delta t) \\ \vdots \\ R(t_0 + T) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\hat{Q} = \mathcal{J} Q_{hb} \quad (9)$$

$$\hat{R} = \mathcal{J} R_{hb} \quad (10)$$

주파수 영역으로 변환된 지배방정식인 식 (7)에 식 (9-10)을 대입하여 다시 정리하면 식 (11)과 같다. 이때 유속항의 계산을 용이하게 하기 위해서 유속항에 곱해지는 푸리에 변환식의 역행렬을 곱하여 $D(= \mathcal{J}^{-1}A\mathcal{J})$ 으로 치환하여 나타내었다.

$$\begin{aligned} \omega M \mathcal{J} Q_{hb} + \mathcal{J} R_{hb} &= \omega \mathcal{J}^{-1} M \mathcal{J} Q_{hb} + \mathcal{J}^{-1} \mathcal{J} R_{hb} = 0 \\ \omega D Q_{hb} + R_{hb} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

가상시간 전진기법(pseudo time stepping)을 적용하여 조화 균형 지배방정식을 다시 표현하면 최종적으로 식 (12)를 얻을 수 있게 된다.

$$\frac{dQ_{hb}}{d\tau} + R_{hb} + \omega D Q_{hb} = 0 \quad (12)$$

2.2 부분 내재적 시간 전진법

기존의 조화 균형법은 외재적 기법으로 해를 구하며 수렴 안정성을 위해서 CFL 수의 제한을 주었다. 최근 조화 원천항(harmonic source term)과 유속항 모두를 내재적(implicit)으로 적용하기 위한 노력이 진행 중이지만[5-7], 조화 원천항(harmonic source term)을 내재적(implicit)으로 적용하였을 경우 발생하는 유속 자코비안 행렬(flux Jacobian matrix)을 효율적으로 해결하지 못하고 있는 실정이다. 즉, 사용된 임의의 가정으로 조화 함수의 적용가능한 개수의 제한을 받을 뿐만 아니라 계산 비용과 지배 방정식의 복잡성이 문제가 되고 있다. 이에 본 연구에서는 아래와 같은 부분 내재적 시간 전진 기법을 제안하여 이상의 문제를 해결하였다.

조화 원천항(harmonic source term)을 외재적(explicit)으로 처리하고 잔류치를 내재적(implicit)으로 처리하여 식 (12)를 2차원 지배방정식에 적용하여 식 (13)과 같이 나타낸다.

$$\frac{dQ}{d\tau} + \frac{dG^{n+1}}{d\xi} + \frac{dH^{n+1}}{d\eta} + \omega D Q^n = 0 \quad (13)$$

여기서, 유속항을 식 (14)와 식 (15)의 선형화 기법을 적용하여 위 식을 식 (16)과 같이 나타낼 수 있다.

$$G^{n+1} = G^n + A(\Delta Q^n) \quad (14)$$

$$H^{n+1} = H^n + B(\Delta Q^n) \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q^n}{\Delta \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} A \Delta Q^n + \frac{\partial}{\partial \eta} B \Delta Q^n \\ = -\frac{\partial G^n}{\partial \xi} - \frac{\partial H^n}{\partial \eta} - \omega D Q_{k=1, N_T}^n \end{aligned} \quad (16)$$

유속 자코비안 행렬(flux Jacobian matrix)인 A 와 B 는 각 요소가 4×4 행렬의 $N_T \times N_T$ 행렬이며 식 (8)에서 유속벡터 각각의 유속항은 각각의 보존변수만의 함수이므로 대각항을 제외한 나머지 항은 모두 0으로 간주할 수 있기 때문에, 식 (17)과 식(18)과 같이 간략화된 내재적 유속 자코비안 행렬(implicit flux jacobian matrix)을 얻을 수 있게 된다.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial Q_1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{\partial G_2}{\partial Q_2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \frac{\partial G_{N_T}}{\partial Q_{N_T}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial Q_1} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{\partial H_2}{\partial Q_2} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \frac{\partial H_{N_T}}{\partial Q_{N_T}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

여기서 주목할 지점은 간략화된 대각항이 기존의 유속 자코비안 행렬(flux Jacobian matrix)과 같다는 점이다. 따라서 조화 균형법의 추가적인 자코비안 행렬을 별도로 처리하지 않고서도 조화 균형법을 적용할 수 있게 된다.

$$T_n = (I + \Delta \tau \delta_\xi A + \Delta \tau \delta_\eta B)_n, n = 1, 2, \dots, N_T \quad (19)$$

최종적으로 식 (13)을 식 (20)과 같이 부분 내재적 기법이 적용된 식을 유도할 수 있게 되며, 조화 원천항(harmonic source term)(harmonic source term)만 추가하여 기존의 수치해석기법으로 조화 균형법을 적용할 수 있게 된다.

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_{N_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{N_T} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$S_n = -\frac{\partial G_n}{\partial \xi} - \frac{\partial H_n}{\partial \eta} - \omega D_{n,k} Q_{k=1, N_T}$$

2.3 다중 격자 기법

다중격자 기법은 정상 유동을 해석할 때 수렴가속화 기법으로 잘 알려진 방법이다. 하지만 비정상 유동을 해석할 때, 기존의 시간 영역 기법인 이중 시간 적분법을 이용할 경우 내부 반복횟수로 시간 전진을 수행하기 때문에 수렴가속화에 큰 이득은 없다. 하지만 주파수 영역 기법을 적용할 경우 비정상 유동을 기존의 정상 유동 해석 기법을 적용하여 해석할 수 있기 때문에 다중격자 기법을 적용할 경우 수렴 성능을 향상시킬 수 있다.

본 연구에서는 톱니 사이클의 다중 격자 기법을 적용하였으며 과정은 다음과 같다[8].

1. 가장 조밀한 격자(level=1)에서 시간 전진을 수행한다.
2. 시간 전진에서 구한 유동변수 Q_h 와 잔류치 R_h 로 성근격자에서의 Q_{2h} 와 R_{2h}^+ 를 다음 식(21) 으로부터 구한다.

$$Q_{2h}^0 = \frac{\sum V_h Q_h}{\sum V_h}, R_{2h}^+ = \sum R_h \quad (21)$$

3. Q_{2h} 를 이용하여 성근 격자에서 잔류치 $R_{2h}(Q_{2h})$ 를 계산한다.
4. R_{2h}^+ 와 $R_{2h}(Q_{2h})$ 를 이용해서 다음 식 (22)과 같이 축소 함수를 계산한다.

$$P_{2h} = R_{2h}^+ - R_{2h}(Q_{2h}) \quad (22)$$

5. 성근 격자에서 시간 전진을 m(=level)번 적용한다. 이 때 n번째 시간 전진의 잔류치는 다음 식 (23)와 같이 수정한다.

$$R_{2h}^{mod} = R_{2h}^n + P_{2h} \quad (23)$$

6. 2-6까지의 과정을 가장 성근 격자에 도달할 때 까지 반복한다.
7. 가장 성근 격자에서부터 유동 변수의 변화량을 trilinear 보간법을 이용하여 조밀한 격자로 보간한다.

$$\Delta Q_{2h} = Q_{2h}^m - Q_{2h}^0, \Delta Q_h^+ = \tau_{2h \rightarrow h} \Delta Q_{2h} \quad (24)$$

8. 조밀 격자에서 유동 변수의 변화량을 보간된 양을 이용하여 수정한다.

$$\Delta Q_h = Q_h^m - Q_h^0 + \Delta Q_h^+ \quad (25)$$

9. 1-8까지의 과정을 $N_T(= 2N_H + 1)$ 번 반복한다.

2.4 적용 방법

본 연구의 기법을 기존의 비정상 유동 해석자에 적용하기 위해서는 다음과 같은 수정작업이 필요하다.

1. 유동 변수의 배열을 추가시켜야 한다. 기존의 유동 변수들은 격자수의 배열 값으로 선언되어있는데 본 연구의 기법에서 조화함수에 대한 영향을 고려해야 함으로 조화함수에 해당하는 배열 값을 추가시켜 주면 된다. 예를 들면 다음과 같다.

```
allocatable, dimension (:) :: Q,R,DQ,X
=> allocatable, dimension (,:) :: QHB,RHB,DQHB,XHB
```

2. 조화 원천항(harmonic source term)을 시간 전진 부분에 고려되도록 한다. 본 연구에서는 조화 원천항(harmonic source term)을 외재적(explicit)으로 처리하기 때문에 시간 적분 시에 식 (16)의 우변항에 반영된 원천항을 추가하여 처리한다. 예를 들면 다음과 같다.

```
Do
  call source_hb(QHB(:,),source_term_hb(:,))
  call time_integ(QHB(:,),RHB(:,),XHB(:,),source_term_hb(:,))
```

Enddo

3. 경계조건을 처리할 때, 격자의 움직임은 각 조화함수에 따라 반영해야 하며, 이러한 격자의 움직임은 기존의 비정상 해석자에서도 동일하게 적용되므로 각 조화함수에 맞도록 기존의 비정상 유동 경계조건을 적용하면 된다.

하지만, 본 연구의 기법은 조화 원천항(harmonic source term)을 외재적(explicit)으로 처리하였으므로 매우 높은 주파수의 비정상 유동일 경우에는 수렴성에 문제가 발생할 가능성이 있으나, 대부분의 주기적인 비정상 유동이 가지는 주파수 영역에서는 본 연구의 기법을 적용하는 것에 큰 문제가 없을 것으로 판단된다.

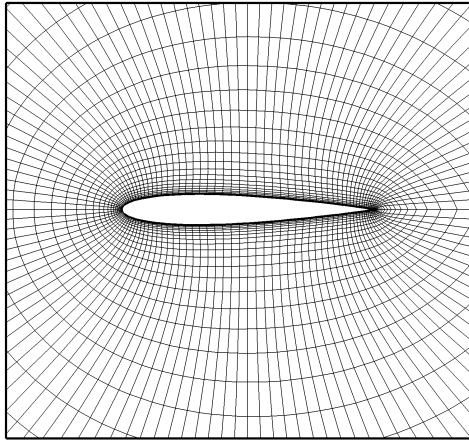


Fig.1 NACA0012, O-type (129×33)

2.5 진동하는 NACA0012 해석

본 연구의 효율성을 검증하기 위해서 NACA0012 날개꼴의 진동하는 유동장을 해석해 보았다. 주기적으로 변화하는 받음각은 식 (26)과 같이 시간에 따른 함수로 나타낼 수 있으며,

$$\alpha(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(\omega t) \tag{26}$$

이때 ω 는 무차원주파수(reduced frequency)로 0.0814, α_m 은 0.016, α_0 는 2.51, 마하수 0.755로 해석하였으며 사용된 격자는 O형태 격자로 Fig. 1과 같으며 129×33의 크기를 사용하였다. 또한 조화 함수의 수에 따라 수렴성 및 계산 시간에 미치는 영향을 보기 위해 최대 10개의 조화함수를 적용하였다. 해석에 사용된 PC는 Intel Core 2 CPU 6400 2.13GHz으로 메모리는 2Gbyte 이다.

Fig. 2는 조화함수의 수에 따른 수렴성을 나타내는 그림이다. 본 연구에서 제안하는 기법과 기존의 주파수 영역기법의 수렴성을 비교할 때, 매우 뛰어난 수렴성을 나타내며 다중 격자 기법이 적용된 경우 더욱 향상된 수렴성을 보여준다.

또한 조화함수의 수가 증가하여도 해의 수렴성에 영향을 미치지 않으며 오히려 조화 함수가 증가하면서 수렴성이 더 좋아짐을 확인할 수 있고 다중 격자 기법이 적용되었을 경우에도 조화함수의 수와 무관하게 수렴성이 좋아짐을 보여준다.

Fig. 3과 Table 1은 계산 시간을 비교하여 나타낸 것이다. 같은 조화함수를 적용하였을 경우 CPU 시간을 비교하여 보면 본 연구에서 제안한 기법이 R-K 기법을 적용한 주파수 영역기법 보다 빠르게 수렴함을 알 수 있으며 다중격자 기법이 적용된 경우 더욱 빠르게 수렴되어짐을 보여준다.

시간 영역 기법과 비교하기 위해서 이중 시간 적분법을 이

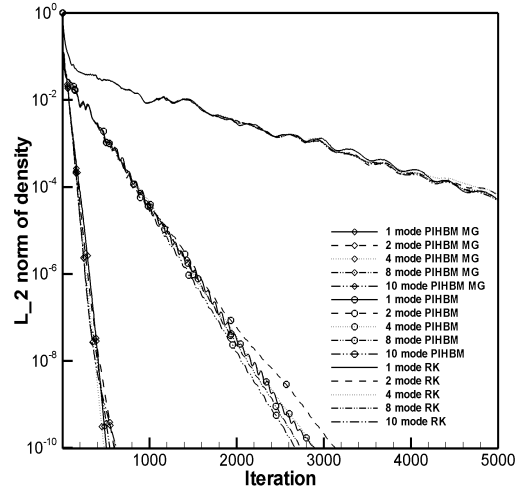


Fig. 2 Comparison of convergence characteristics with the number of harmonic modes using present method, the method with MG, and Explicit harmonic balance method

용하여 계산 하였고 한주기를 360 간격으로 나누어서 3 주기 동안 계산하였다. 한 주기의 시간으로 계산시간을 비교해 보면 다중 격자 기법을 적용하지 않고서도 최대 10배 빠르게 계산 가능하며 다중 격자 기법을 적용하여 계산할 때 최대 25배이상 빠르게 해석 가능함을 알 수 있다.

본 연구에서 적용된 다중격자 기법의 성능을 검증하기 위해서 정상유동 문제에 적용하여 해석 비교하였다. 적용된 격자는 Fig. 1의 동일한 격자를 사용하였고, 해석 조건은 받음각 0, 마하수 0.755를 적용하였다. 정상 유동일 때 다중격자 기법을 적용하였을 때와 적용하지 않았을 때의 수렴성을 Fig 4에서 나타내었다. Fig. 4를 Fig. 2와 비교해 볼 때, 유사한 수렴

Table 1 Comparison of CPU time with the number of harmonic modes using present method, the method with MG, Explicit harmonic balance method, and time-domain method(dual-time stepping)

HB	Partially-Imp (RMS=1E-10)			Exp-RK (RMS=1E-5)	Dual Time Stepping
	A	MG			
		B	A/B		
1	72.2	27.0	2.7	437.3	2770.73 (360step per Cycle, 3-Cycle)
2	151.8	61.3	2.5	811.1	
3	245.2	94.9	2.6	1188.3	
4	330.2	112.2	2.9	1676.7	
6	613.7	208.1	2.9	2761.7	
8	850.0	341.7	2.5	3797.9	
10	1205.7	553.2	2.2	5196.4	

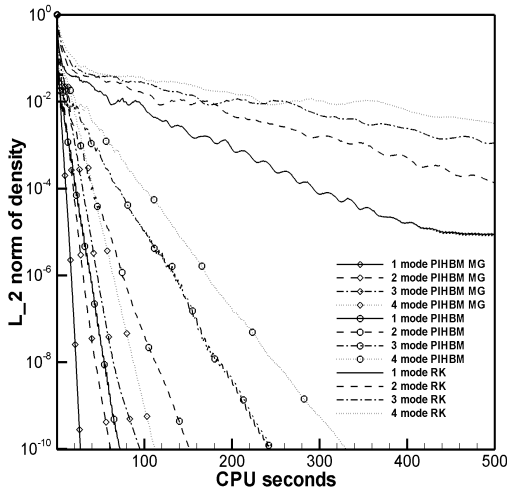


Fig. 3 Comparison of CPU time with the number of harmonic modes using present method, the method with MG, and Explicit harmonic balance method

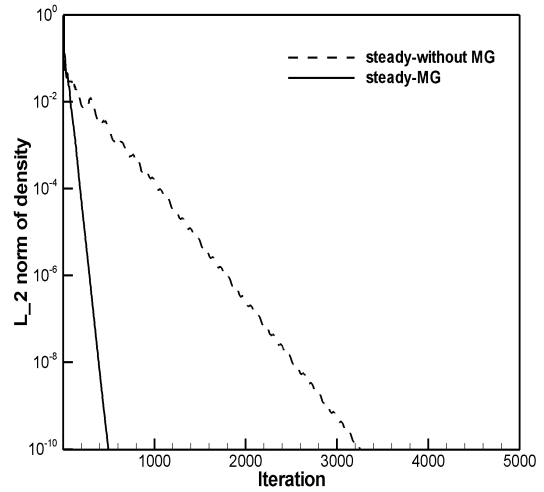


Fig. 4 Comparison of convergence rate with/without multi-grid method in steady problem

성을 나타내며 유사한 수렴횟수로 수렴함을 알 수 있다. 또한 Fig. 5와 Table 2는 CPU 시간을 비교하여 나타낸 그림이다. 유사한 비율로 계산 시간을 절감함을 확인할 수 있다.

즉, 본 연구에서 적용된 다중격자 기법의 성능이 정상 유동에서 적용된 결과와 비교할 때 조화 원천항(harmonic source term)을 추가하여 해석하더라도 수렴성에 큰 영향을 받지 않음을 확인할 수 있다.

또한 각각의 조화 함수의 수에 따라 결과를 비교하기 위해 Fig. 6-8과 같이 이중 시간 적분법에 의한 결과와 비교하였다. 본 연구는 수치기법의 효율성 검증이 주요목적이므로, 이중시간 적분법의 정확도는 참고문헌[9,10]을 참고하기 바란다.

조화 함수가 1개일 때도 Fig. 6에서 양력 계수의 값들을 비교해 볼 때 매우 정확하게 일치함을 알 수 있으며 Fig. 7의 항력 계수 분포와 Fig. 8의 모멘트 계수 분포를 비교할 때 대부분의 결과가 이중 시간 적분법에 의해 얻은 해와 동일한 결과를 도출하며, 적은 수의 조화 함수로도 일치하는 결과를 보여줌을 알 수 있다. 또한 다중 격자 기법을 적용한 결과 역시 동일한 결과를 나타냄을 확인할 수 있다.

Table 2 Comparison of the performance with/without multi-grid method in present method

	Steady Flow		PIHBM (1 mode)	
		MG		MG
Iteration	3251	497	2893	505
CPU time	31.0	9.7	72.2	27.0
ratio		3.1		2.7

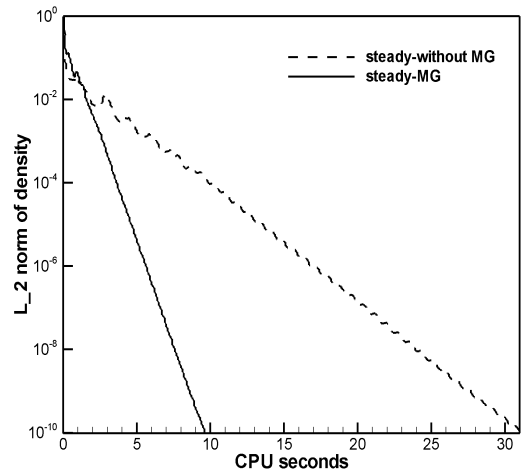


Fig. 5 Comparison of CPU time with/without multi-grid method in steady problem

진동하는 움직임에 의해서 $x=0.01$ 와 $x=0.46$ 위치에서 압력이 크게 변화함으로 각각의 위치에서 시간에 따른 압력계수 분포와 받음각에 따른 압력계수 분포를 비교하였다. Fig. 9,10은 $x=0.01$ 위치로 앞전부분의 정체점 주변 압력분포를 나타낸다. 시간 영역 기법과 각각의 조화함수를 적용하여 결과를 비교하였을 때 대부분의 결과가 유사한 결과를 나타내며 적은 조화함수의 수로도 유사한 결과를 나타냄을 알 수 있다.

Fig. 11,12는 $x=0.46$ 으로 익형 표면에 강한 충격파가 발생하는 위치이며 각각의 조화함수를 적용하여 결과를 비교하였

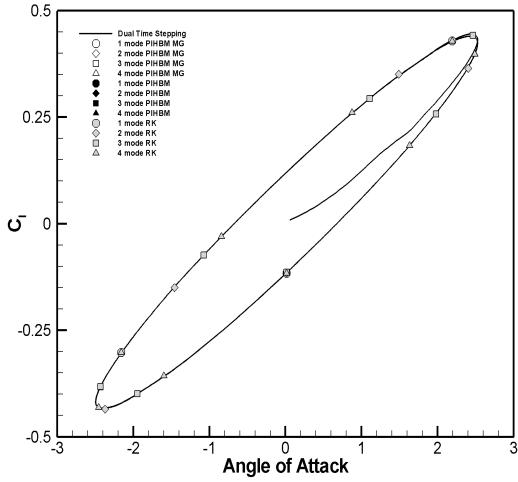


Fig. 6 Lift coefficients

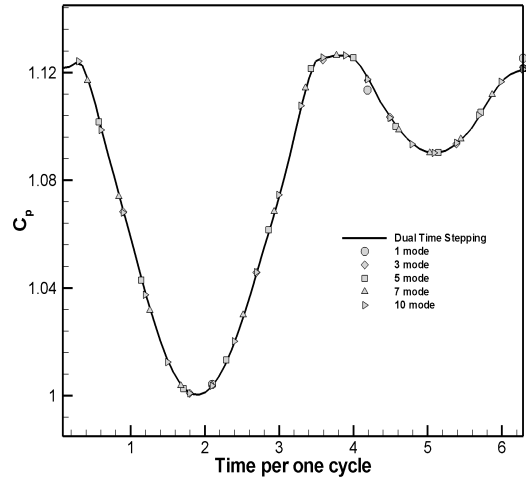


Fig. 9 Pressure coefficients at $x/c=0.01$

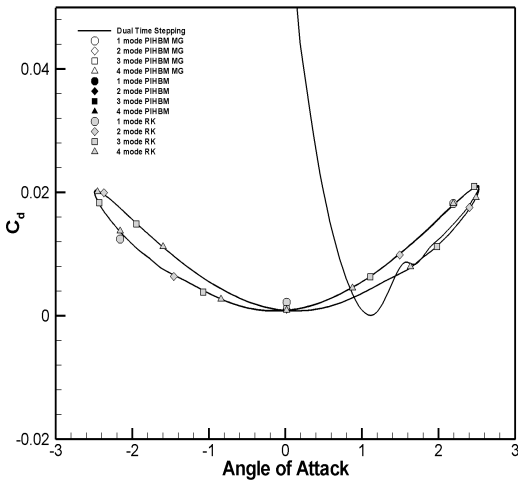


Fig. 7 Drag coefficients

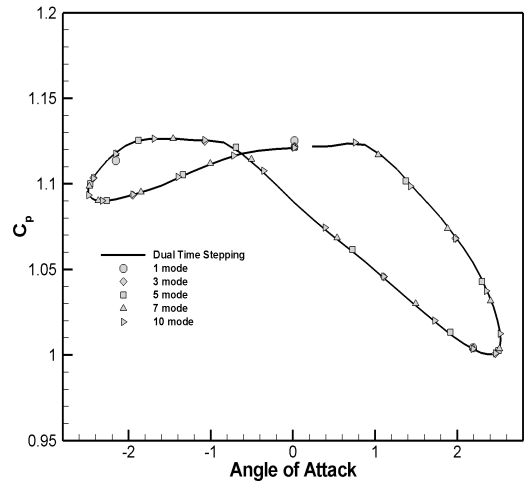


Fig. 10 Pressure coefficients at $x/c=0.01$

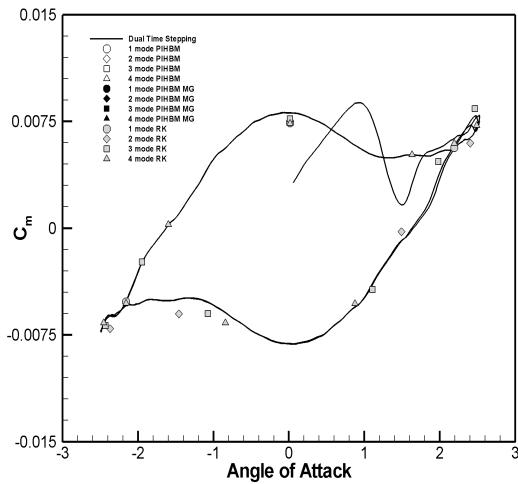


Fig. 8 Moment coefficients

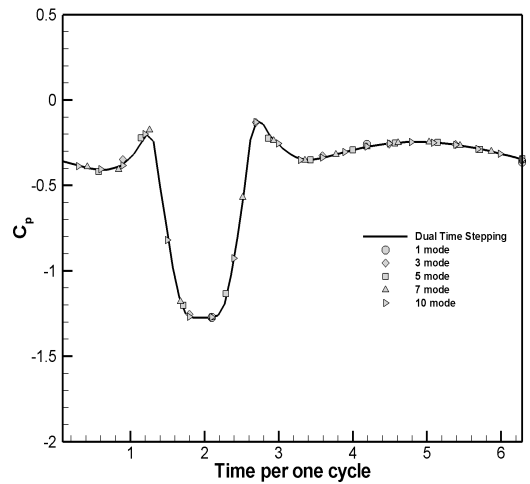


Fig. 11 Pressure coefficients at $x/c=0.46$

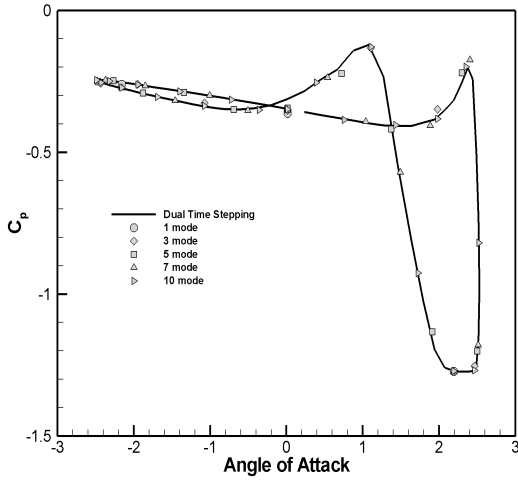


Fig. 12 Pressure coefficients at $x/c=0.46$

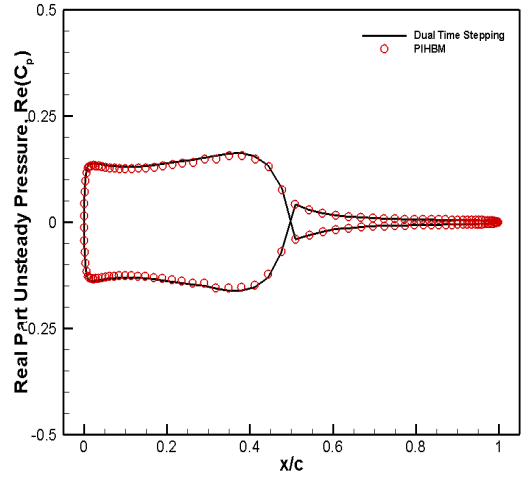


Fig. 14 Real unsteady pressure coefficients distribution

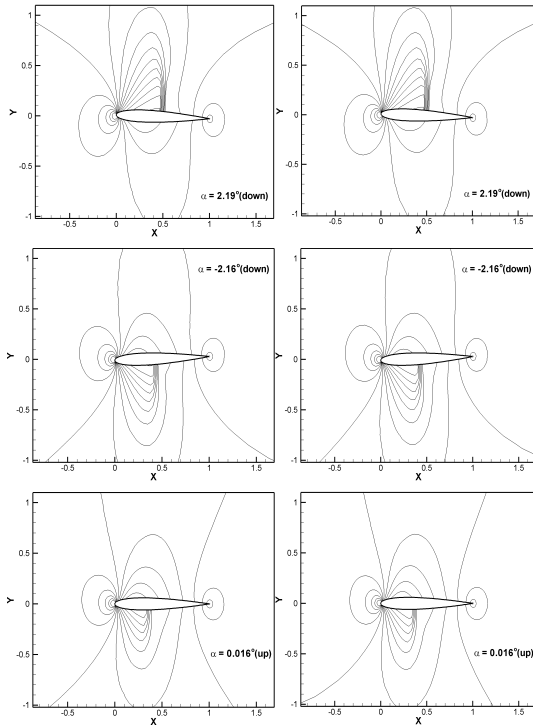


Fig. 13 Pressure contour between present method(left) and time domain method(right)

다. 강한 충격파가 발생하여 압력 변화가 매우 큰 부분임에도 적은 조화함수의 수로 시간영역의 결과와 유사한 압력분포를 나타냄을 확인할 수 있으며 대부분의 결과가 시간 영역 결과와 동일한 결과를 나타냄을 확인할 수 있다. Fig. 13은 한주기 동안의 임의의 받음각에서 유동장에서 압력분포를 나타낸다.

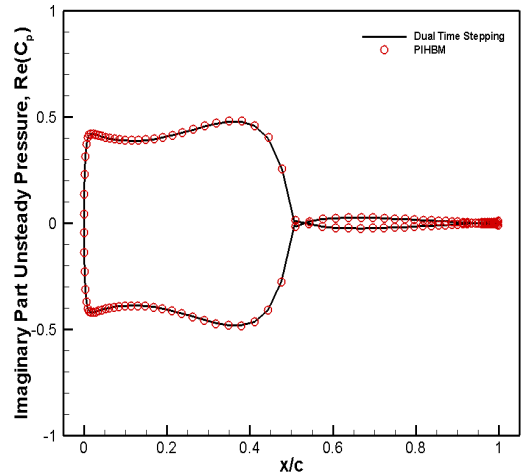


Fig. 15 Imaginary unsteady pressure coefficients distribution

시간 영역 기법인 이중시간 적분법을 적용한 결과와 비교할 때 동일한 압력 유동장을 나타냄을 확인할 수 있다.

주파수 영역 기법으로 계산한 비정상 표면 압력분포를 시간 영역 결과와 비교하기 위해 식 (27)를 이용하여 주파수 영역 표면 압력을 계산하였다. 식 (27)에서 \mathcal{J} 는 식 (9)와 식 (10)에 적용된 푸리에 변환식을 뜻한다.

$$\widehat{C}_{p, hb} = \mathcal{J} C_{p, hb} \tag{27}$$

Fig. 14, 15는 주파수 영역으로 변환된 압력계수 분포를 나타내며 각각 실수부와 허수부의 분포를 나타낸다. 이중 시간 적분법에 의한 결과와 본 연구에서 제한한 부분 내재적 조화 균

형법의 결과와 비교할 때 일치하는 결과를 나타냄을 확인할 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 주기적인 비정상 유동을 해석하기 위해서 푸리에 변환을 이용한 주파수 기법을 사용하였으며 부분 내재적 기법을 적용한 조화 균형법을 개발하였다. 완전 내재적 기법(fully implicit method)을 사용한 조화 균형법 보다 기존의 해석자에 적용하기 용이하며, 복잡한 자코비안 행렬을 해석하지 않아도 되는 장점이 있다. 또한 외재적 기법이 적용된 조화 균형법과 비교할 때 매우 빠른 수렴성을 보여 주었으며 조화 함수의 수와 무관하게 좋은 수렴성을 나타내었다. 또한 수렴 가속화 기법인 다중 격자 기법을 적용하였으며 개발된 기법의 성능을 3배 이상 향상 시킬 수 있었다.

본 연구에서 개발된 부분 내재적 기법을 적용하여 주기적인 비정상 유동을 해석할 경우, 최대 7배 이상의 계산 비용 절감 효과를 얻을 수 있으며, 3차원에서는 더 큰 효과를 발휘할 것으로 예상된다.

후 기

이 논문은 2010년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국과학재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2010-0015440)

참고문헌

- [1] 2002, Hall, K.C., Thomas, J.P. and Clark, W.S., "Computation of Unsteady Nonlinear Flows in Cascades Using a Harmonic Balance Technique," *AIAA Journal*, Vol.40, No.5, pp.879-886.
- [2] 2002, McMullen, M., Jameson, A. and Alonso, J., "Application of a Non-Linear Frequency Domain Solver to the Euler and Navier-Stokes Equations," *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*.
- [3] 2006, McMullen, M., Jameson, A. and Alonso, J., "Demonstration of Nonlinear Frequency Domain Methods," *AIAA Journal*, Vol.44, No.7, pp.1428-1435.
- [4] 2005, Gopinath, A.K. and Jameson, A., "Time Spectral Method for Periodic Unsteady Computations over Two- and Three-Dimensional Bodies," *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*.
- [5] 2009, Woodgate, M.A. and Badcock, K.J., "Implicit Harmonic Balance Solver for Transonic Flow with Forced Motions," *AIAA Journal*, Vol.47, No.4, pp.893-901.
- [6] 2009, Cagnone, J.S. and Nadarajah, S.K., "Implicit Nonlinear Frequency-Domain Spectral-Difference Scheme for Periodic Euler Flow," *AIAA Journal*, Vol.47, No.2, pp.361-372.
- [7] 2009, Thomas, J.P., Custer, C.H., Dowell, E.H. and Hall, K.C., "Unsteady Flow Computation Using a Harmonic Balance Approach Implemented about the OVERFLOW 2 Flow Solver," *19th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*.
- [8] 2003, 박수형, "Navier-Stokes 방정식을 사용한 동안정 미계수 예측 기법," *한국과학기술원 박사학위논문*.
- [9] 2003, Park, S.H., Kim, Y.S. and Kwon, J.H., "Prediction of Damping Coefficients Using the Unsteady Euler Equations," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol.40, No.3, pp.356-362.
- [10] 2008, 고진환, 김지웅, 변도영, 박수형, "이동경계문체의 전산유체역학을 위한 체적격자변형코드," *한국항공우주학회지*, 제36권, 제11호, pp.1049-1055.