

# 축압축력을 받는 T형상 크랙 보의 안정성 및 동특성 해석

## Analysis of Stability and Dynamic Behaviour of Cracked Cantilever T-beams Subjected to Axial Force

손 인 수\* · 조 정 래\* · 윤 한 익\*\*

In-Soo Son, Jeng-Rae Jo and Han-Ik Yoon

(2009년 12월 3일 접수 ; 2010년 4월 28일 심사완료)

**Key Words** : Stability(안정성), Axial Force(축압축력), T-beam(T형상 보), Open Crack(개구형 크랙), Tip Mass (끝단질량)

### ABSTRACT

In this paper, the purpose is to investigate the stability of cracked cantilever T-beams subjected to axial force. In addition, an analysis of the natural frequency of a cracked beams as crack position, crack depth and tip mass is investigated. Based on the Euler-Bernoulli beam theory, the equation of motion is derived by the energy expressions using extended Hamilton's Principle. The crack is assumed to be in the first mode of fracture and to be always opened during the vibrations. The results of this study will contribute to the safety test and stability estimation of structures of a cracked T-beams subjected to axial force.

### 1. 서 론

일반적으로 어떤 힘을 받는 구조물은 중심축 방향으로의 압축력이 작용하게 된다. 이 압축력은 구조물의 고유진동 특성과 안정성 문제와 직결되며 특히 크랙과 같은 결함을 갖는 구조물에 압축력이 작용하게 되면 일정 한계의 힘에서 크랙을 기점으로 급격히 균열이 전파되어 파괴된다. 이처럼 구조 손상의 하나인 크랙은 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시켜 압축력과 함께 구조물의 불안정 및 파괴의 주요 원인이 된다. 따라서 크랙을 가지는 구조물에 압축력이 작용하는 경우 이 구조물의 안정성을 판단하는 것은 안전진단 및 사고예방을 위해서 중요한 문제라고 할 수 있다. 건축 및 기계 구조물

에서 많이 사용되어지는 보는 여러 형상을 갖는 형상 보가 많이 사용되어 지고 있다. 하지만 형상을 갖는 보 구조물에 미치는 크랙에 대한 연구는 사각 단면 및 원형단면을 갖는 보의 연구에 비하여 그 연구결과가 그리 많지 않은 실정이다.

Saito와 Otomi<sup>(1)</sup>는 양단에 탄성 지지되고 부가질량이 존재하는 티모셴코 보가 축압축력과 종동력을 받는 경우 탄성계수의 영향에 의한 보의 안정성 평가를 수행하였다. Rosa<sup>(2)</sup>는 탄성 지지된 Beck와 Leipholz 기둥에 대하여 탄성 지지의 위치에 따른 플러터 및 좌굴 불안정 영역을 계산하였으며, Sato<sup>(3)</sup>는 탄성기초와 끝단질량을 갖는 티모셴코 보의 자유진동 해석 및 동적 안정성에 미치는 경사 종동력(subtangential follower force)에 대한 연구도 진행되었다. Lee 등<sup>(4)</sup>은 양단이 회전 및 병진 스프링으로 구속되어진 티모셴코 보에 경사 종동력이 작용하는 경우 보의 안정성 문제를 경사계수 및 스프링 상수의 변화에 따라 연구하였다. 또 끝단질량과 종동력을 받는 오일러 및 티모셴코 보의 임계

\* 교신저자 ; 정회원, 동의대학교 기계공학과  
E-mail : isson92@deu.ac.kr

Tel : (051)890-2239, Fax : (051)890-2232

\* 한국폴리텍VI대학 달성캠퍼스 자동차과

\*\* 동의대학교 기계공학과

종동력, 즉 보의 안정성에 미치는 크랙의 영향에 대한 연구도 진행되었다<sup>(5-7)</sup>. 하지만 이들의 연구들은 사각 혹은 원형 단면을 갖는 보의 고유진동수 변화 및 동적특성에 관한 연구들이었다. 최근 H, L, 그리고 Z 등의 단면을 갖는 보의 진동특성에 관한 연구도 활발히 진행되어지고 있으며<sup>(8-10)</sup>, 최근 Viola 등은 크랙을 가지는 T형상 보의 자유진동해석을 수행하였다<sup>(11,12)</sup>.

선행 연구들은 대부분 사각 및 원형 단면을 가지는 보 구조물에 대한 연구였으며, T, H 등의 단면 형상을 갖는 크랙 보의 안정성 해석에 대한 연구는 드물다. 따라서 이 연구의 목적은 T형상 보에 크랙과 압축력이 작용하는 경우 보의 안정성 해석, 즉 임계 압축력과 T형상 보의 횡방향 고유진동수에 미치는 크랙과 보 형상의 영향을 연구하는 것이다. 보는 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였다.

## 2. 시스템 모델링

### 2.1 크랙 모델링

선형 탄성구간에서 크랙으로 인한 부가적인 변형 에너지(additional strain energy)는 응력확대계수의 항에서 유도할 수 있는 유전형질의 형식으로 구할 수 있다. 같은 하중이 작용하는 구조물에서도 크랙이 존재하는 경우에 구조물의 자체 탄성 변형에너지 외에 크랙에 의한 변형에너지가 존재하고 이 부가되는 에너지만큼 추가적인 변형이 발생하게 된다. Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해서 부가되는 변형에너지를 다음과 같이 유전형질을 이용하여 표현할 수 있다<sup>(11)</sup>.

$$C = \frac{\partial^2}{\partial M_o^2} \left[ \int_{-c/2}^{c/2} \int_0^a J dy dz \right] \quad (1)$$

여기서  $M_o$ 는 굽힘 모멘트,  $c$ 와  $a$ 는 Fig. 2에서 볼 수 있는 것처럼 T형상 보의 두께와 크랙의 깊이이다.  $J$ 는 변형률 에너지 밀도함수로써 제 1 파괴모드에 대하여 다음과 같다<sup>(12)</sup>.

$$J = \frac{1}{E^*} (K_{LM})^2 \quad (2)$$

여기서  $E^* = E/(1-\nu^2)$ 이고,  $E$ 는 영계수,  $\nu$ 는 푸아송 비이다.  $K_{LM}$ 은 굽힘 모멘트에 의한 응력확대

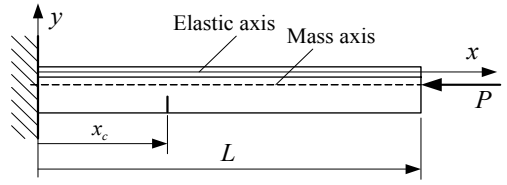


Fig. 1 T-beam subjected to axial force

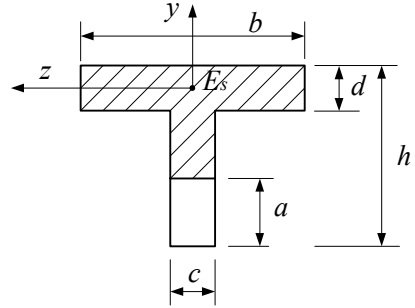


Fig. 2 Cross section of T-beam

계수로 다음과 같다.

$$K_{LM} = M_o \sqrt{\frac{\beta_M}{Ih} \left( \frac{I}{I_c} - 1 \right)} \quad (3)$$

여기서  $\beta_M = 1$ 로 두고 해석하였으며<sup>(11)</sup>,  $I$ 는 T형상 보의 단면 2차 모멘트, 그리고  $I_c$ 는 크랙이 존재하는 단면의 단면 2차 모멘트를 의미한다. 해석에 필요한 회전 스프링 상수( $K_R$ )는 식(1)의 역수를 취함으로써 얻을 수 있다.

### 2.2 압축력을 받는 T형상 보

Fig. 1은 압축력을 받는 T형상 보를 나타낸 것이다. 여기서  $L$ 은 보의 전체 길이를 나타내며,  $P$ 는 축압축력,  $x_c$ 는 보의 끝단으로부터의 크랙 위치이다. Fig. 2는 크랙위치에서의 보의 단면을 나타낸 것으로  $b, h$  그리고  $c, d$ 는 각각 보의 가로와 세로 그리고, 보의 두께를 표현하고 있다.

오일러-베르누이 보 이론을 적용한 외팔보의 운동방정식을 확장된 Hamilton 원리를 이용하여 유도하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$EI \left( \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} \right) + P \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

여기서  $y(x,t)$  는 횡방향 변위, 또  $A$ 와  $\rho$  는 각각 보의 단면적과 밀도이며,  $E$ 는 영계수이다. 식 (4)의 횡변위에 대한 운동방정식의 일반해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y(x,t) = Y(x)e^{i\omega_n t} \quad (5)$$

여기서  $\omega_n$  는 보의 고유진동수이며  $i = \sqrt{-1}$ 를 나타낸다. 식 (5)를 식 (4)에 대입하여 무차원화 하면 무차원 운동방정식과 경계조건을 얻을 수 있다.

$$Y_1^{iv} + pY_1'' - \omega^2 Y_1 = 0, \quad (6)$$

$$Y_2^{iv} + pY_2'' - \omega^2 Y_2 = 0$$

$$Y_1(0) = Y_1'(0) = 0, Y_2''(1) = 0, \quad (7)$$

$$Y_2'''(1) + pY_2'(1) + \mu\omega^2 Y_2(1) = 0$$

여기서  $( )'$  은 무차원 좌표  $\xi (=x/L)$ 에 대한 미분을 나타내며, 아래첨자 1, 2는 크랙에 의한 보의 분할구간 수이다. 식 (7)의 마지막 경계조건에서  $\mu$ 는 끝단질량을 의미하며 끝단질량이 없는 경우는 세 번째 항이 0가 된다. 식 (6), (7)에 사용된 무차원 변수들은 다음과 같이 정의한다.

$$\omega^2 = \frac{mL^4 \omega_n^2}{EI}, \quad p = \frac{PL^2}{EI}, \quad (8)$$

$$\mu = \frac{M}{\rho AL}, \quad \xi_c = \frac{x_c}{L}$$

식 (6)의 일반해는 크랙위치에 따라 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= A_1 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_2 \cosh(\lambda_1 \xi) \\ &\quad + A_3 \sin(\lambda_2 \xi) + A_4 \cos(\lambda_2 \xi) \\ &\quad ; (0 \leq \xi \leq \xi_c), \\ Y_2(\xi) &= A_5 \sinh(\lambda_1 \xi) + A_6 \cosh(\lambda_1 \xi) \\ &\quad + A_7 \sin(\lambda_2 \xi) + A_8 \cos(\lambda_2 \xi) \\ &\quad ; (\xi_c \leq \xi \leq 1) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서

$$\lambda_{1,2} = \left[ \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \omega^2} \pm \frac{p}{2} \right]^{1/2} \quad (10)$$

이다. 또 크랙위치에서 다음의 변위, 모멘트, 전단력 및 기울기 변화의 연속조건을 만족해야 한다.

$$Y_1(\xi_c) = Y_2(\xi_c), \quad \frac{d^2 Y_1(\xi_c)}{d\xi^2} = \frac{d^2 Y_2(\xi_c)}{d\xi^2},$$

$$\frac{d^3 Y_1(\xi_c)}{d\xi^3} = \frac{d^3 Y_2(\xi_c)}{d\xi^3}, \quad (11)$$

$$k_R [Y_2'(\xi_c) - Y_1'(\xi_c)] = \frac{d^2 Y_2(\xi_c)}{d\xi^2}$$

여기서 무차원 스프링 상수  $k = \frac{K_R L^3}{EI}$ 이다.

### 2.3 모달 해석

식 (9)의 미지수들은 식 (7), (11)의 경계조건과 연속조건을 이용하여 각각 구할 수 있다. 또 계의 고유진동수는 다음과 같은 고유치의 기본 형태로 변환하여 쉽게 구할 수 있다.

$$\Lambda \mathbf{X} = \mathbf{0}, \quad |\Lambda| = 0 \quad (12)$$

여기서  $\Lambda$ 는 경계조건과 연속조건들을 대입하여 얻은 각각의 식을 행렬형태로 표현한 것이다. 또  $|\Lambda|$ 는  $\Lambda$ 의 행렬식을 나타내고 있으며,  $\mathbf{X}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{X} = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8]^T \quad (13)$$

여기서 위첨자 T는 전치를 의미한다.

### 3. 수치해석결과 및 고찰

수치해석에서 유도된 운동방정식으로 크랙의 영향에 따른 T형상 보의 안정성 평가 및 고유진동수 변화를 살펴보았다. Figs. 3~6의 결과는  $\beta = b/h = 1$ ,  $\delta = d/h = 0.2$ , 그리고  $c = d$ 의 조건에서 해석을 수행하였다.

Fig. 3은 축압축력의 증가에 따른 보의 1차 무차원 고유진동수를 크랙의 크기에 따라 나타내었다. 여기서 크랙의 위치  $\xi_c = 0.3$ 으로 일정하게 하였다. 크랙의 크기와 보의 고유진동수는 서로 반비례적이

며, 압축력이 증가할수록 보의 고유진동수는 작아지다가 결국 0이 된다. 고유진동수가 0이 되는 축압축력  $p$  가 바로 보의 임계값이며 크랙의 크기가 0.5 일 때 무차원 임계값  $p_{cr}$  은 2.14이며, 크랙의 크기가 0.1인 경우 임계값은 2.46이다.

Fig. 4는 T형상 보의 가로 세로 비와 두께 비가 각각  $\beta = 1$ ,  $\delta = 0.2$ 로 일정한 경우, 크랙의 영향에 따른 T형상 보의 임계 축압축력을 나타낸 것이다.

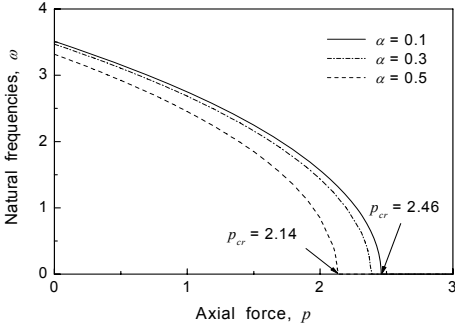
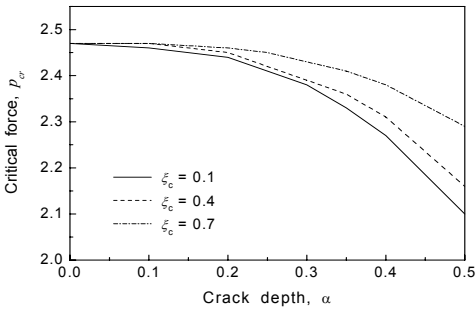
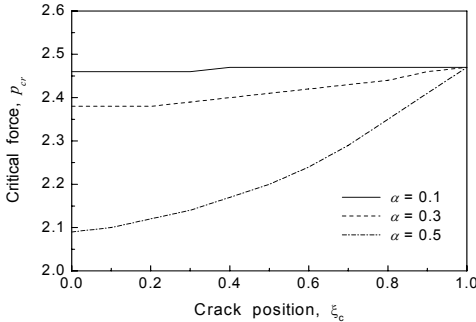


Fig. 3 Critical axial force of cracked T-section beams ( $\xi_c = 0.3$ )



(a) Effect of crack position

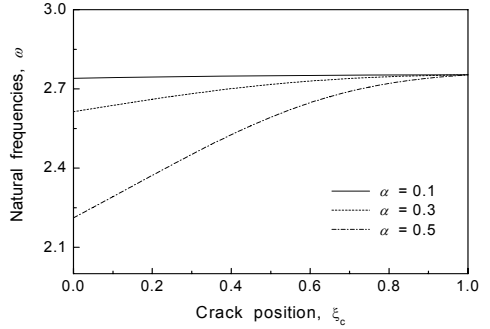


(b) Effect of crack depth

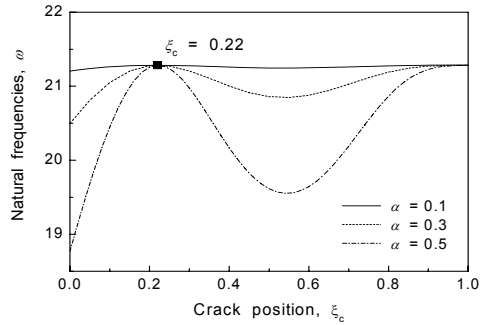
Fig. 4 Effect of crack on critical axial force of T-section beams

크랙의 크기가 커질수록 크랙의 위치에 관계없이 임계값은 작아지고 크랙의 크기가 일정한 경우 크랙의 위치가 고정단으로부터 가까이 위치할수록 임계값은 점점 작아지는 경향을 보인다. 크랙의 깊이가 0.5로 일정한 경우 크랙의 위치가 0.7인 경우에 비하여 0.1인 경우 임계값은 약 8.3% 정도 작아진다. 또 크랙의 위치가 0.2로 동일한 경우 크랙의 크기가 0.3일 때에 비하여 0.5일 때 임계값은 약 10.9% 정도 낮아짐을 알 수 있다.

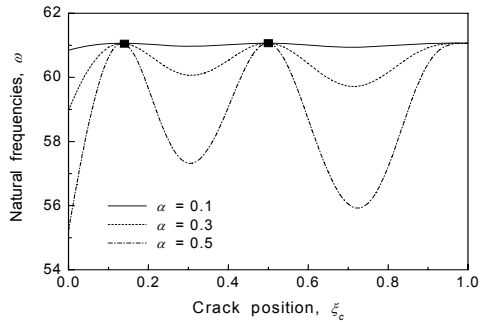
Fig. 5는  $p$  가 1로 일정하게 작용하고 끝단질량이



(a) First mode



(b) Second mode



(c) Third mode

Fig. 5 Dimensionless natural frequencies of T-section beams ( $p = 1$ )

없는 경우 크랙의 영향에 따른 T형상 보의 무차원 고유진동수 변화를 3차 모드까지 나타낸 것이다. 전반적으로 1차 모드에서는 크랙의 크기와 고유진동수는 서로 반비례적인 경향을 보이며, 크랙의 위치와 고유진동수는 서로 비례적이다. 전 모드에 걸쳐서 크랙의 크기와 관계없이 크랙의 위치가 고정단에 존재하는 경우 가장 낮은 고유진동수를 보이고 있으며, 2차 모드에서 크랙의 위치가 고정단으로부터 약 0.22 위치에 존재하는 경우 크랙의 크기에 관계없이 항상 일정한 고유진동수를 보이는 임계점(critical point)<sup>(13)</sup>이 나타난다. 이러한 임계점은 단순지지 보의 경우 진동모드의 노드 점과 동일한 크랙 위치에서 나타나기도 하지만 외팔보인 경우는 진동모드와 다른 부분에 존재한다. 3차 모드에서 두 개의 임계점은 각각  $\xi_c = 0.14$ 와  $\xi_c = 0.496$ 에 존재함을 알 수 있다.

Fig. 6은  $p$ 가 1로 일정하게 작용하는 크랙을 가진 보의 무차원 고유진동수에 미치는 끝단질량의 영향을 살펴본 것이다. 크랙의 크기와 위치에 관계

없이 끝단질량과 보의 고유진동수는 서로 반비례적인 경향을 보인다. 끝단질량이 일정한 경우 크랙의 위치가 고정단으로부터 멀어져 위치할수록 고유진동수는 점점 커지며, 크랙의 위치가 일정한 경우 끝단질량의 크기에 관계없이 크랙의 크기와 고유진동수는 서로 반비례적인 경향을 보인다. 크랙이 없는 경우 끝단질량이 없을 때와 끝단질량의 크기가 0.5인 경우 고유진동수는 약 43% 정도 작아지고, 크랙의 크기가 0.5인 경우는 같은 조건에서 약 44% 정도 작아짐을 알 수 있다.

Table 1은 T형상 보의 두께와 너비 비와 크랙의 영향에 따른 임계 축압축력을 정리한 것이다. 여기서 임계값의 단위는 kN이다. 앞에서 설명한 바와 같이 전반적으로 크랙의 크기는 임계값과 반비례적이며, 크랙의 위치는 임계값과 서로 비례적이다. 크랙의 크기와 위치에 관계없이  $\delta$ 와  $\beta$ 가 커질수록 임계값은 더 커짐을 알 수 있다. 크랙의 위치가 0.3인 경우  $\delta$ 가 0.1인 경우에 비하여 0.4인 경우 크랙의 크기와 관계없이 약 2.8배 정도 임계값이 커진다. 또 동일한 조건에서  $\beta$ 가 0.6인 경우에 비하여 1.2인 경우 약 1.3배 정도 임계값이 커짐을 알 수 있다.

Figs. 7과 8은 축압축력  $p=1$ 이 작용하는 경우 T형상 보의 높이에 따른 가로 비와 두께 비 즉,  $\beta$ 와  $\delta$ 의 영향에 따른 보의 고유진동수 변화를 2차 모드까지 나타낸 것이다. 여기서 고유진동수의 실질적인 변화를 보기위하여 고유진동수의 단위는 Hz로 하였다. 크랙의 크기는 0.3으로 일정하게 하였으며 끝단질량이 없는 경우 보의 고유진동수를 나타내었다. 1, 2차 모드에서 보의 높이와 가로비가 커질수록

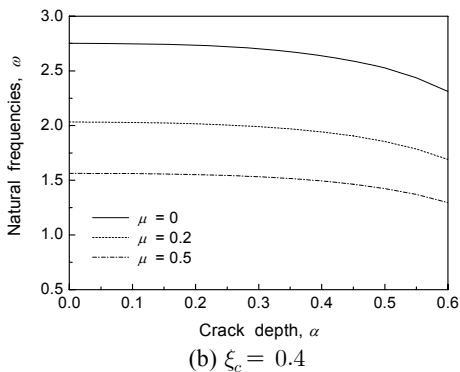
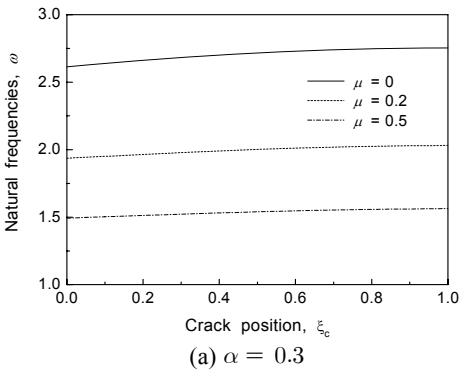


Fig. 6 Effect of tip mass on dimensionless natural frequency of cracked T-section beams( $p=1$ )

Table 1 Critical axial force  $P$ (kN) of T-beams

$\alpha$	$\xi_c$	$\beta=1$			$\delta=0.2$	
		$\delta=0.1$	$\delta=0.2$	$\delta=0.4$	$\beta=0.6$	$\beta=1.2$
0.1	0.1	58.1	101.5	161.5	84.2	107.6
	0.3	58.1	101.5	161.5	84.2	107.6
	0.5	58.4	101.9	162.2	84.5	108.1
	0.7	58.4	101.9	162.2	84.5	108.1
0.3	0.1	56.2	98.2	156.3	81.5	104.1
	0.3	56.5	98.6	156.9	81.8	104.6
	0.5	56.9	99.4	158.3	82.5	105.4
	0.7	57.4	100.2	159.6	83.2	106.3
0.5	0.1	49.4	86.6	137.9	71.9	91.8
	0.3	50.6	88.3	140.5	73.2	93.6
	0.5	52.0	90.7	144.5	75.3	96.3
	0.7	54.1	94.4	150.4	78.4	100.2

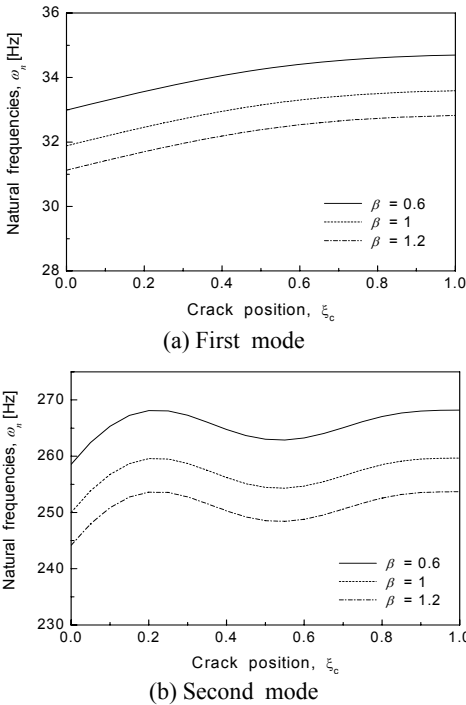


Fig. 7 Natural frequencies of T-section beams( $\alpha = 0.3, p = 1, \mu = 0, \delta = 0.2$ )

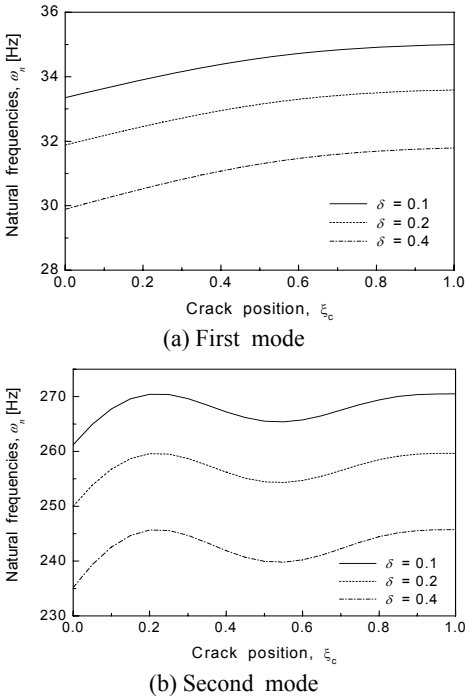


Fig. 8 Natural frequencies of T-section beams( $\alpha = 0.3, p = 1, \mu = 0, \beta = 1$ )

보의 고유진동수는 낮아지며, 높이와 두께 비도 같은 경향을 가진다. 전반적으로 1차 모드에서  $\beta$ 가 2 배 정도 커진 경우 보의 고유진동수는 약 5.5 % 정도 낮아졌으며,  $\delta$ 가 3 배 정도 커진 경우 보의 고유진동수는 약 9.5 배 정도 낮아짐을 알 수 있다.

#### 4. 결론

이 연구에서는 T형상 보에 축압축력이 작용하는 경우 보의 형상과 크랙이 보의 임계 압축력에 미치는 영향과 일정한 압축력이 작용하는 경우 보의 고유진동수 변화를 살펴보았다. 전반적으로 크랙이 존재할 때 크랙의 크기가 클수록, 크랙의 위치가 보의 고정단에서부터 가까이 위치할수록 보는 더 작은 힘에서 불안정이 나타난다. 2차 모드 이상에서는 크랙의 크기, 끝단질량의 크기에 관계없이 항상 고유진동수가 일정한 임계점이 나타난다. 끝단질량은 보의 임계값에는 영향을 주지 않으나 끝단질량이 존재하는 경우 보의 고유진동수는 낮아진다. 또 크랙을 가진 T형상 보의 경우 높이에 따른 가로 비와 두께 비에 따라 임계값이 크게 변하기 때문에 기계 및 건축 구조물의 설계에서 중요하게 고려되어야 할 것이다. 이상의 연구결과들은 압축력을 받는 T형상을 가진 보 구조물에 크랙이 발생한 경우 안정성 평가 및 설계에 있어서 안전율 계산 등의 기초 데이터로서 유용하게 활용할 수 있을 것이라 판단된다.

#### 참고 문헌

- (1) Saito, H. and Otomi, K., 1979, "Vibration and Stability of Elastically Supported Beams Carrying an Attached Mass Under Axial and Tangential Loads," Journal of Sound and Vibration, Vol. 62, No. 2, pp. 257~266.
- (2) Rosa, M. A. and Franciosi, C., 1990, "The Influence of an Intermediate Support on the Stability Behaviour of Cantilever Beams Subjected to Follower Force," Journal of Sound and Vibration, Vol. 137, No. 1, pp. 107~115.
- (3) Sato, K., 1996, "Instability of a Clamped-elastically Restrained Timoshenko Column Carrying a

Tip Load, Subjected to a Follower Force,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, No. 4, pp. 623~630.

(4) Lee, S. Y., Kuo, Y. H. and Lin, F. Y., 1992, “Stability of a Timoshenko Beam Resting on a Winkler Elastic Foundation,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 153, No. 2, pp. 193~202.

(5) Detinko, F. M., 2003, “Lumped Damping and Stability of Beck Column with a Tip Mass,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 17, pp. 4479~4486.

(6) Son, I. S., Yoon, H. I. and Ahn, T. S., 2007, “Stability Analysis of Cracked Cantilever Beam with Tip Mass and Follower Force,” *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 605~610.

(7) Son, I. S., Yoon, H. I. and Ahn, T. S., 2008, “Effects of Crack and Tip Mass on Stability of Timoshenko Beam Subjected to Follower Force,” *Journal of KSPE*, Vol. 25, No. 6, pp. 99~107.

(8) Li, J., Shen, R., Hua, H. and Jin, X., 2004, “Response of Monosymmetric Thin-walled Timoshenko Beams to Random Excitations,” *International Journal*

*of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 6023~6040.

(9) Chen, H. H. and Hsiao, K. M., 2007, “Coupled Axial-torsional Vibration of Thin-walled Z-section Beam Induced by Boundary Conditions,” *Thin-Walled Structures*, Vol. 45, pp. 573~583.

(10) Back, S. Y. and Will, K. M., 2008, “Shear-flexible Thin-walled Element for Composite I-beams,” *Engineering Structures*, Vol. 30, pp. 1447~1458.

(11) Viola, E., Ricci, P. and Aliabadi, M. H., 2007, “Free Vibration Analysis of Axially Loaded Cracked Timoshenko Beam Structures Using the Dynamic Stiffness Method,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 304, pp. 124~153.

(12) Ricci, P. and Viola, E., 2006, “Stress Intensity Factors for Cracked T-sections and Dynamic Behaviour of T-beams,” *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 73, pp. 91~111.

(13) Khiem, N. T. and Line, T. V., 2001, “A Simplified Method for Natural Frequency Analysis of a Multiple Cracked Beam,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 245, No. 4, pp. 737~751.