

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2010.34.6.701

직교이방성 압전재료에서 전파 하는 모드 III 균열의 응력장과 변위장

이 광 호^{*†}

* 경북대학교 기계자동차공학부

Stress and Displacement Fields of a Propagating Mode III Crack in Orthotropic Piezoelectric Materials

Kwang Ho Lee^{*†}

* Dept. of Mechanical and Automotive Engineering, Kyungpook Nat'l Univ.

(Received October 22, 2009 ; Revised March 31, 2010 ; Accepted April 5, 2010)

Key Words : Orthotropic Piezoelectric Materials(직교이방성 압전재료), Propagating Crack(전파균열), Stress and Displacement Fields(응력 및 변위장), Permeable Crack(투과균열)

초록: 면외평면전단하중과 면내전기하중을 받는 직교이방성 압전재료에서 전기투과형 전파균열장을 해석하였다. 압전재료에서 전파하는 균열의 운동방정식이 유도되었으며 근접해법을 통하여 응력장과 변위장의 해를 얻었다. 압전상수 및 유전율 등이 균열선단의 응력장과 변위장에 미치는 영향을 명확히 나타내었다. 본 연구에서 유도된 응력장과 변위장을 사용하여 압전재료에서 전파하는 균열선단부근의 응력과 변위의 특성에 대하여 논의하였다.

Abstract: The stress and displacement fields of a permeable propagating crack in orthotropic piezoelectric materials under anti-plane shear mechanical load and in-plane electric load are analyzed. The equations of motion for the propagating crack in piezoelectric materials are developed and the solution on the stress and the displacement fields through an asymptotic analysis was obtained. The influences of the piezoelectric constant and of the dielectric permittivity on the stress and displacement fields at the crack tip are explicitly clarified. Using the stress and displacement fields obtained in this study, the characteristics of stress and displacement at a propagating crack tip in piezoelectric materials are discussed.

1. 서 론

전기-기계적인 이중거동을 갖는 압전재료는 전기-기계적 장치에 널리 사용되고 있다. 그들 중에 액추에이터, 압전트랜스포머 및 각종센서 등에 사용되는 세라믹 압전재료는 강력한 이중적인 특성을 갖고 있다. 이러한 이중적인 특성 때문에 압전재료는 각종 산업분야에 널리 사용되고 있다.

그러나 세라믹은 취성 때문에 기본적으로 취약하다. 특히 사용중 기계 및 전기적 변위는 응력 집중 및 균열 발생 및 전파의 원인이 된다.

이러한 압전재료에 성능 및 수명향상을 개선하기 위하여 기계 및 전기적인 하중이 압전재료의 손상 및 파괴과정을 이론적으로 해석하는 것은 중요하다. 따라서 압전재료의 파괴에 대한 많은 연구가

수행되어 오고 있다.

정적 하중상태에 대한 연구로 Park^(1,2)은 정적상태 하의 압전재료의 전기비투과형 균열선단 부근에서 응력장과 변위장을 얻었다. Shindo^(3,4) 등은 띠판의 압전체에 수평 또는 수직인 전기비투과형 중앙균열을 갖는 압전체의 전기 탄성장에 대하여 연구하였다. 그들의 방법은 적분 변형기법을 사용하여 응력확대계수와 에너지해방을 수치해석적으로 결정하였다. 특히 Li 및 Duan 등⁽⁵⁾은 이러한 장에 대한 완전한 해를 얻었다. Sosa⁽⁶⁾는 전기적 비 투과형 결함을 갖는 압전체의 문제를 푸는 일반적인 방법을 제시하였다. Ou 등⁽⁷⁾은 모드 III 하중하에 함수구배 압전 띠에 존재하는 편심균열이 전기적 비투과 또는 투과시 응력확대계수에 대하여 연구하였다.

한편 전파하는 모드 III 균열에 대한 연구로는 Chen 등⁽⁸⁾이 등속으로 이동하는 전기적 비투과형

† Corresponding Author, khl@knu.ac.kr

Yoffe 균열선단에 대하여 연구하였다. Hou 등⁽⁹⁾은 압전재료의 면외평면에서 전파하는 전기적 투과형 균열에 대한 응력장, 변위장 그리고 에너지 해방률 등에 대하여 연구하였다. Kwon 등⁽¹⁰⁾은 등속으로 이동하는 전기적 투과형의 Yoffe 균열선단에 대하여 연구하였다. Piva 등⁽¹¹⁾은 Transversely 등방성(두께방향으로 이방성) 평면에서 등속으로 전파하는 균열선단 부근 균열에 대하여 연구하였다.

지금까지 이러한 연구는 등방성압전재료에 대한 연구이다. 그러나 동적모드 III 하중하에서 직교 이방성적 성질을 갖는 압전재료에 내재된 균열이 전파하는 경우에 대한 연구는 아직 없다. 즉 압전재료의 물리적인 성질이 직교 이방성이며 또한 전기적인 성질인 압전율 및 유전율 등이 직교이방성적인 경우에 대한 연구는 아직 보고된 바가 없다. 특히 모드 III 하중 상태의 균열은 상하 균열면이 서로 접촉된 상태에서 변위가 발생하므로 본 연구에서는 상하 균열 면이 전기적인 투과 상태라고 가정하여 직교이방성압전재료에서 전파하는 균열 선단부근의 응력장, 변위장 그리고 전기적 변위장을 유도하고 그들에 대한 응력 및 전기적 특성을 연구하는 것이 본 연구의 목적이다.

2. 직교이방성 압전재료에서 전파하는 균열의 탄성장 및 전기장

2.1 평형방정식 공식화

Fig. 1 과 같이 전기적 흐름이 균열선(x, y=0)을 횡단하는 전기 변위장을 갖는 직교이방성압전재료가 모드 III 진단 하중하에 균열이 전파하는 경우 응력장 및 전기장은 식 (1), (2)와 같다.

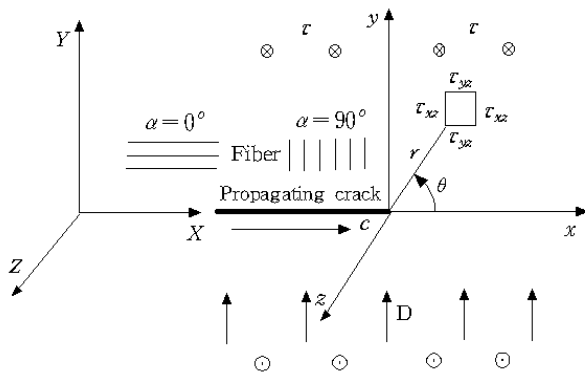


Fig. 1 The mode III stress components at a propagating crack tip under electric displacement

$$\tau_{xz} = C_{55} \frac{\partial w}{\partial X} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial X}, \tau_{yz} = C_{44} \frac{\partial w}{\partial Y} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad (1)$$

$$D_x = e_{15} \frac{\partial w}{\partial X} - d_{11} \frac{\partial \phi}{\partial X}, D_y = e_{24} \frac{\partial w}{\partial Y} - d_{22} \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad (2)$$

여기서, τ_{ij} 및 D_i 는 각각 응력 및 전기적 변위 텐서, w 는 변위, ϕ 는 전기적 포텐셜이며, $-\phi_{,i}$ 는 전기장 E_i 을 나타낸다. 그리고 C_{ij} 는 탄성계수, e_{ij} 는 압전상수, d_{ij} 는 유전체의 유전율이며 이들은 직교이방성적 성질을 가지며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} C_{55} &= G_{TV} \sin^2 \alpha + G_{LV} \cos^2 \alpha \\ C_{44} &= G_{TV} \cos^2 \alpha + G_{LV} \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} e_{15} &= e_{TV} \sin^2 \alpha + e_{LV} \cos^2 \alpha \\ e_{24} &= e_{TV} \cos^2 \alpha + e_{LV} \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{TT} \sin^2 \alpha + d_{LL} \cos^2 \alpha \\ d_{22} &= d_{TT} \cos^2 \alpha + d_{LL} \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 L, T 는 전기 이동방향 및 전기이동에 직각방향을 나타내며, α 는 전기이동방향과 균열의 방향과 이루는 각도를 나타낸다.

동적상태의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial X} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial Y} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (6)$$

여기서 ρ 는 밀도 t 는 시간을 나타낸다. 균열이 고정좌표계 (X, Y) 에 일정한 속도 c 로 전파하는 경우 이동 좌표계 (x, y) $x = X - ct, y = Y$ 이다. 이러한 관계로부터 식 (6)은 식 (7)과 같이 된다.

$$\alpha_s^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{C_{44}}{C_{55}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{e_{15}}{C_{55}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{e_{24}}{C_{55}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

여기서 $\alpha_s = \sqrt{1 - M_s^2}, M_s = c/c_s, c_s = \sqrt{C_{55}/\rho}$ 한편 전기장의 평형방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

식 (2)를 식 (8)에 대입하면 식 (9)를 얻는다.

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{d_{22}}{d_{11}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = \frac{e_{15}}{d_{11}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{e_{24}}{e_{15}} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

여기서 압전상수와 유전율이 직교이방성적이므로 $e_{24}/e_{15} = d_{22}/d_{11}$ (10)

복소함수 $z = x + my$ 로 두고 식 (9)를 식 (7)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\left[(\alpha_s^2 + \frac{e_{15}^2}{C_{55}d_{11}}) + (\frac{C_{44}}{C_{55}} + \frac{e_{15}e_{24}}{C_{55}d_{11}})m^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

식 (11)으로부터

$$m = i\hat{\alpha}_s = i\sqrt{(1-M^2)\mu_1/\mu_2} \quad (12)$$

여기서 $\mu_1 = C_{55} + e_{15}\lambda$, $\mu_2 = C_{44} + e_{24}\lambda$, $M = c/c_{se} c_{se} = \sqrt{\mu_1/\rho}$, $\lambda = e_{15}/d_{11} = e_{24}/d_{22}$, 따라서 직교이방성적 압전재료에서 특성방정식근 m 는 균열전파속도, 재료의 물성치, 압전상수, 유전율 등에 의존함을 알 수 있다. 또한 c_{se} 는 전기탄성전단파의 속도이다. 식 (12)과 같은 방정식의 일반적인 해는 다음과 같이 나타낸다.

$$w \equiv w_n = 2 \operatorname{Re}[\Phi_n(z_s)] \quad (13)$$

식 (13)을 고려할 때 식 (9)의 ϕ 의 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi \equiv \phi_n = 2 \operatorname{Re}[\varphi_n(z_d) + \lambda\Phi_n(z_s)] \quad (14)$$

여기서

$$z_d = x + i\alpha_d y, \quad z_s = x + i\hat{\alpha}_s y$$

$$\alpha_d = i\sqrt{d_{11}/d_{22}} = i\sqrt{e_{15}/e_{24}} \quad \text{이다.}$$

식 (13), (14)에서 해석적인 함수 $\varphi_n(z_d)$ 및 $\Phi_n(z_s)$ 는 다음과 같이 멱급수열로 나타낼 수 있다.

$$\varphi_n(z_d) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z_d^{\lambda_n}, \quad \Phi_n(z_s) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z_s^{\lambda_n} \quad (15)$$

여기서 B_n , C_n 은 복소상수, λ_n 고유치로서 경계조건에서 결정된다. 식 (15)를 식 (13), (14)에 대입하고 다시 식 (1), (2)에 대입하면 다음과 같다.

$$\tau_{xz} = 2 \operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_n'(z_s) + e_{15} \varphi_n'(z_d)]$$

$$\tau_{yz} = -2 \operatorname{Im}[\hat{\alpha}_s \mu_2 \Phi_n'(z_s) + e_{24} \varphi_n'(z_d)]$$

$$D_x = -2 \operatorname{Re}[d_{11} \varphi_n'(z_d)], \quad D_y = 2 \operatorname{Im}[d_{22} \varphi_n'(z_d)]$$

$$E_x = -2 \operatorname{Re}[\lambda \Phi_n'(z_s) + \varphi_n'(z_d)]$$

$$E_y = 2 \operatorname{Im}[\lambda \hat{\alpha}_s \Phi_n'(z_s) + \varphi_n'(z_d)] \quad (16)$$

2.2 전기투과형균열 (Permeable crack)

균열면 ($\theta = \pm\pi$) 에서 표면력 0 의 조건과 전기적 투과형(Permeable crack)의 경계조건에서 다음의 식이 성립된다.

$$\tau_{yz} = 0 (\theta = \pm\pi), \quad \phi(\theta = \pi) = \phi(\theta = -\pi)$$

$$D_y(\theta = \pi) = D_y(\theta = -\pi) \quad (17)$$

식 (15)를 식 (16)에 대입하고 식 (17)의 경계조건을 적용하면 식 (15)의 복소상수 및 고유치는 다음과 같이 결정된다.

$$\lambda_n = \frac{n}{2}, \quad B_n = \begin{cases} -\lambda C_n^+ : n = \text{odd} \\ B_n^+ : n = \text{even} \end{cases}, \quad C_n = \begin{cases} -iC_n^+ : n = \text{odd} \\ C_n^+ : n = \text{even} \end{cases} \quad (18)$$

식 (18)를 식 (16)에 대입하면 식 (19)를 얻는다.

$$\tau_{xz} = n \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} & \left[\mu_1 (-iC_n^+) r_s^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s \right] \right] \\ & + e_{15} (i\lambda C_n^+) r_d^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \right] \end{aligned} \right\}$$

: n = odd

$$+ n \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} & \left[\mu_1 C_n^+ r_s^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s \right] \right] \\ & + e_{15} B_n^+ r_d^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \right] \end{aligned} \right\}$$

: n = even

(19a)

$$\tau_{yz} = n \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} & \left[\mu_2 C_n^+ \hat{\alpha}_s r_s^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s \right] \right] \\ & - e_{24} \lambda C_n^+ r_d^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \right] \end{aligned} \right\}$$

: n = odd

$$+ n \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} & \left[i\mu_2 C_n^+ \hat{\alpha}_s r_s^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s \right] \right] \\ & + i e_{24} B_n^+ r_d^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \right] \end{aligned} \right\}$$

: n = even

(19b)

$$D_x = -n \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} & \left[i d_{11} \lambda C_n^+ r_d^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \right] \right. \\ & \left. : n = \text{odd} \right. \\ & \left. + d_{11} (B_n^+) r_d^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \right. \\ & \left. : n = \text{even} \right. \end{aligned} \right\}$$

(19c)

$$D_y = n \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \begin{aligned} & \left[d_{22} \lambda C_n^+ r_d^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \right] \right. \\ & \left. : n = \text{odd} \right. \\ & \left. - i d_{22} B_n^+ r_d^{\frac{n}{2}-1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \right. \\ & \left. : n = \text{even} \right. \end{aligned} \right\}$$

(19d)

$$E_x = -n \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} i\lambda C_n^+ r_d^{\frac{n-1}{2}} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \\ iB_n^+ r_s^{\frac{n-1}{2}} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s \right] \end{array} \right\} \quad : n = \text{odd}$$

$$-n \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} B_n^+ r_d^{\frac{n-1}{2}} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \\ + \lambda C_n^+ r_s^{\frac{n-1}{2}} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s \right] \end{array} \right\} \quad : n = \text{even} \quad (19e)$$

$$E_y = n \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} \lambda C_n^+ r_d^{\frac{n-1}{2}} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \\ - \lambda \hat{\alpha}_s C_n^+ r_s^{\frac{n-1}{2}} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s \right] \end{array} \right\} \quad : n = \text{odd}$$

$$-n \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} iB_n^+ r_d^{\frac{n-1}{2}} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] \\ + i\lambda C_n^+ \hat{\alpha}_s r_s^{\frac{n-1}{2}} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s + i \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s \right] \end{array} \right\} \quad : n = \text{even} \quad (19f)$$

여기서 $n \geq 1$

$$r_s = \sqrt{x^2 + (\hat{\alpha}_s y)^2}, \quad \theta_s = \tan^{-1} \left(\frac{\hat{\alpha}_s y}{x} \right)$$

$$r_d = \sqrt{x^2 + (\alpha_d y)^2}, \quad \theta_d = \tan^{-1} \left(\frac{\alpha_d y}{x} \right)$$

한편 식 (13)의 변위장 w 및 식 (14)의 전기적 포텐셜 ϕ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} -iC_n^+ r_s^{\frac{n}{2}} \left[\cos \frac{n}{2} \theta_s + i \sin \frac{n}{2} \theta_s \right] : n = \text{odd} \\ + iC_n^+ r_s^{\frac{n}{2}} \left[\cos \frac{n}{2} \theta_s + i \sin \frac{n}{2} \theta_s \right] : n = \text{even} \end{array} \right\} \quad (20a)$$

$$\phi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} i\lambda C_n^+ r_d^{\frac{n}{2}} \left[\cos \frac{n}{2} \theta_d + i \sin \frac{n}{2} \theta_d \right] \\ - i\lambda C_n^+ r_s^{\frac{n}{2}} \left[\cos \frac{n}{2} \theta_s + i \sin \frac{n}{2} \theta_s \right] \end{array} \right\} \quad : n = \text{odd}$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re} \left\{ \begin{array}{l} B_n^+ r_d^{\frac{n}{2}} \left[\cos \frac{n}{2} \theta_d + i \sin \frac{n}{2} \theta_d \right] \\ + \lambda C_n^+ r_s^{\frac{n}{2}} \left[\cos \frac{n}{2} \theta_s + i \sin \frac{n}{2} \theta_s \right] \end{array} \right\} \quad : n = \text{even} \quad (20b)$$

한편 전기장변위확대계수 K_{III}^D 의 정의는 다음과 같다.

$$K_{III}^D = K_1^D = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} (D_y)_{\theta=0} \quad (21)$$

식 (19d)를 식 (21)에 대입하면 미지의 상수 C_n^+ , B_n^+ 및 K_n^D 의 관계는 다음과 같이 얻어진다.

$$C_n^+ = \frac{K_n^D}{\sqrt{2\pi d_{22} \lambda}} \quad (n=\text{odd}), \quad B_n^+ = -\frac{K_n^D}{\sqrt{2\pi d_{22}}} \quad (n=\text{even}) \quad (22)$$

한편 모드 III 상태의 응력확대계수는 다음과 같이 정의된다.

$$K_{III}^r = K_1^r = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi} (\tau_{yz})_{\theta=0} \quad (23)$$

식 (19b)를 식 (23)에 대입하면 미지의 상수 C_n^+ , B_n^+ 및 K_n^r 의 관계는 다음과 같이 얻어진다.

$$C_n^+ = \frac{K_n^r}{\eta \sqrt{2\pi}} \quad (n=\text{odd}), \quad C_n^+ = \frac{(K_n^r + \lambda K_n^D)}{\mu_2 \hat{\alpha}_s \sqrt{2\pi}} \quad (n=\text{even}) \quad (24)$$

여기서 $\eta = \mu_2 \hat{\alpha}_s - \lambda e_{24}$ 이며, $n=1$ 인 경우 즉 K_1^r, K_1^D 는 응력확대계수 또는 전기변위확대계수이다. 무한판의 외부에서 $\tau_{yz}^\infty, D_y^\infty$ 가 작용할 때 균열선단확대계수 $K_{III}^r = \tau_{yz}^\infty \sqrt{\pi a}$, $K_{III}^D = D_y^\infty \sqrt{\pi a}$ 이다. 식 (22), (24)을 식 (19)에 대입하면 전기장을 받는 재료에서 전파하는 모드 III 균열선단의 응력장은 다음과 같이 얻어진다.

$$\tau_{xz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{K_n^r}{\eta} \left[\mu_1 r_s^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s - \lambda e_{15} r_d^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] : n = \text{odd} \\ (K_n^r + \lambda K_n^D) \frac{\mu_1}{\hat{\alpha}_s \mu_2} r_s^{\frac{n-1}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s \\ - K_n^D \frac{e_{15}}{\epsilon_{22}} r_d^{\frac{n-1}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d : n = \text{even} \end{array} \right.$$

$$\tau_{yz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{K_n^r}{\eta} \left[\mu_2 \hat{\alpha}_s r_s^{\frac{n-1}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s - \lambda e_{24} r_d^{\frac{n-1}{2}} \cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d \right] : n = \text{odd} \\ -(K_n^r + \lambda K_n^D) r_s^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_s + K_n^D \lambda r_d^{\frac{n-1}{2}} \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta_d : n = \text{even} \end{array} \right. \quad (25)$$

식 (24)를 식 (20a), (20b)에 대입하면 변위장 및 전기포텐셜 ϕ 는 다음과 같이 얻어진다.

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} r_s^{\frac{n}{2}} \begin{cases} \frac{K_n^r}{\eta} \sin \frac{n}{2} \theta_s : n = \text{odd} \\ \frac{K_n^r + \lambda K_n^D}{\hat{\alpha}_s \mu_2} \cos \frac{n}{2} \theta_s : n = \text{even} \end{cases} \quad (26)$$

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} -\frac{K_n^D}{d_{22}} \left[r_d^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n}{2} \theta_d - r_s^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n}{2} \theta_s \right] : n = \text{odd} \\ -\frac{K_n^D}{d_{22}} r_d^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n}{2} \theta_d + \frac{\lambda(K_n^r + \lambda K_n^D)}{\hat{\alpha}_s \mu_2} r_s^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n}{2} \theta_s : n = \text{even} \end{cases} \quad (27)$$

식 (22), (24)로부터 투과형 균열의 응력장 및 변위장 그리고 전기포텐셜은 $n=\text{odd}$ 인 경우에는 외부의 전기적하중에 관계없으나 $n=\text{even}$ 인 경우에는 기계적하중과 전기적하중이 서로 독립적으로 균열 선단장에 영향을 미침을 알 수 있다. 또한 전기투과형 균열인 경우에는 표면파(Rayleigh wave)가 발생하며 그 속도 $C_R = \sqrt{[\mu_1 \mu_2 - (\lambda e_{24})^2] / \rho \mu_2}$ 임을 알 수 있다. 이 표면파의 속도는 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우가 $\alpha = 90^\circ$ 인 경우보다 더 크다.

한편 식 (22), (24)를 식 (19c,d)에 대입하면 균열 선단부근의 전기적변위장은 다음과 같이 얻어진다.

$$D_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n K_n^D}{\sqrt{2\pi} d_{22}} \begin{cases} r_d^{\frac{n-1}{2}} \sin \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_d : n = \text{odd} \\ r_d^{\frac{n-1}{2}} \cos \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_d : n = \text{even} \end{cases} \quad (28a)$$

$$D_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n K_n^D}{\sqrt{2\pi}} r_d^{\frac{n-1}{2}} \begin{cases} \cos \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_d : n = \text{odd} \\ + \frac{\sqrt{2\pi}}{n K_n^D} D_y^o : n = 2 \\ - \sin \left(\frac{n(n \geq 4)}{2} - 1 \right) \theta_d : n = \text{even} \end{cases} \quad (28b)$$

여기서 D_y^o 는 균열면에서 전기 변위장이다. 사실 D_y^o 값은 균열선단 ($r \rightarrow 0$)의 D_y 변화에 거의 영향을 미치지 않는다. 무한판의 외부에서 응력 τ_{yz}^∞ 및 전기변위장 D_y^∞ 가 작용하고 전기투과형 균열일 경우 $D_y(\theta = \pm\pi) \neq 0$ 이다. 한편 균열면 ($\theta = \pm\pi$)의 D_y^o 및 E_y^o 는 즉 식 (1), (2)로부터 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D_y^o = D_y^\infty - \frac{e_{24}}{C_{44}} \tau_{yz}^\infty = \frac{E_y^o d_{22}^o (C_{44} + \lambda e_{15})}{C_{44}} \quad (29a)$$

$$E_y^o = \frac{C_{44} D_y^\infty - e_{24} \tau_{yz}^\infty}{e_{15} e_{24} + d_{22}^o C_{44}} \quad (29b)$$

E_y^o, ϵ_{22}^o 는 각각 균열면에서 전기성분 및 진공 및 공기등을 고려한 유전상수이다. 만약상하 균열이 완벽히 접촉된 상태라면 d_{22}^o 는 d_{22} 가 된다. 식 (22), (24)를 식 (19e,f)에 대입하면 균열선단부근의 전기장은 다음과 같이 얻어진다.

$$E_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \left[\frac{K_n^D}{d_{22}} \left[r_d^{\frac{n-1}{2}} \sin \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_d - r_s^{\frac{n-1}{2}} \sin \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_s \right] \right] : n = \text{odd} \\ \left[\frac{K_n^D}{d_{22}} r_d^{\frac{n-1}{2}} \cos \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_d - \frac{\lambda(K_n^r + \lambda K_n^D)}{\hat{\alpha}_s \mu_2} r_s^{\frac{n-1}{2}} \cos \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_s \right] : n = \text{even} \end{cases} \quad (30a)$$

$$E_y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} \left[\frac{K_n^D}{d_{22}} \left[r_d^{\frac{n-1}{2}} \cos \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_d - \hat{\alpha}_s r_s^{\frac{n-1}{2}} \cos \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_s \right] \right] : n = \text{odd} \\ + \frac{\sqrt{2\pi}}{n} E_y^o : n = 2 \\ \left[-\frac{K_n^D}{d_{22}} r_d^{\frac{n-1}{2}} \sin \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_d + \frac{\lambda(K_n^r + \lambda K_n^D)}{\mu_2} r_s^{\frac{n-1}{2}} \sin \left(\frac{n-1}{2} \right) \theta_s \right] : n = \text{even} \end{cases} \quad (30b)$$

여기서 E_y^o 는 균열면에서 전기성분이다. 다음에 균열이 미소량 Δ 만큼 진전할 때 균열면을 생성하기 위하여 흡수되는 에너지는 균열을 닫기 위하여 필요로 하는 에너지량과 같다는 균열 닫힘에너지(Crack closure energy)이론의 견지에서 기계적 에너지해방률(Energy release ratio)의 관계식은 다음과 같다.

$$G_m = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \tau_{yz} w dx \quad (31)$$

식 (25), (26)을 식 (31)에 대입하면

$$G_m = (K_{III}^r)^2 / 2\eta \quad (32)$$

한편 전기적 에너지해방율은 G_e 는 다음과 같다.

$$G_e = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} D_y \cdot \phi dx = 0 \quad (33)$$

식 (27), (28)를 식 (33)에 대입하면 $G_e = 0$ 이다. 그리하여 총 에너지해방률 $G = G_m + G_e$ 는 식 (32)으로 된다. 사실 식 (33)의 G_e 는 전기비투과형균열인 경우라면 0가 아니다.

2.3 전기 비투과형균열(Impermeable crack)

비 투과형균열(Impermeable crack)의 경계조건은 $\tau_{yz} = 0 (\theta = \pm\pi)$, $\phi(\theta = \pi) \neq \phi(\theta = -\pi)$, $D_y(\theta = \pi) \neq D_y(\theta = -\pi)$ 이다. 이러한 조건을 식 (17)에 적용하고 또한 위와 동일한 방법으로 유도하면 균열선단의 각 장들은 다음과 같이 얻는다.

$$\tau_{yz} = \frac{K_{III}^{\tau}}{\sqrt{2\pi}} r_s^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_s}{2} \quad (34a)$$

$$+ \frac{K_{III}^D}{\sqrt{2\pi}} \frac{e_{24}}{d_{22}} \left(r_s^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_s}{2} - r_d^{-1/2} \cos \frac{\theta_d}{2} \right)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}^{\tau}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mu_1}{\hat{\alpha}_s \mu_2} r_s^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_s}{2} \quad (34b)$$

$$- \frac{K_{III}^D}{\sqrt{2\pi}} \frac{e_{15}}{d_{22}} \left(r_s^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_s}{2} - r_d^{-1/2} \sin \frac{\theta_d}{2} \right)$$

$$w = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{K_n^{\tau} + \lambda K_n^D}{\hat{\alpha}_s \mu_2} r_s^{\frac{1}{2}} \sin \frac{n}{2} \theta_s \quad (35)$$

$$\phi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-\frac{K_{III}^D}{d_{22}} r_d^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_d}{2} + \frac{\lambda(K_{III}^{\tau} + \lambda K_{III}^D)}{\hat{\alpha}_s \mu_2} r_s^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_s}{2} \right] \quad (36)$$

$$D_x = -\frac{K_{III}^D}{\sqrt{2\pi}} \frac{d_{11}}{d_{22}} r_d^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta_d}{2}$$

$$D_y = \frac{K_{III}^D}{\sqrt{2\pi}} r_d^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_d}{2} \quad (37a)$$

$$D_y = \frac{K_{III}^D}{\sqrt{2\pi}} r_d^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta_d}{2} \quad (37b)$$

그리고 에너지 해방률은 다음같이 얻어진다.

$$G = \frac{1}{2\hat{\alpha}_s \mu_2} \left[(K_{III}^{\tau})^2 + 2\lambda K_{III}^{\tau} K_{III}^D - \frac{\eta}{d_{22}} (K_{III}^D)^2 \right] \quad (38)$$

전기비투과형 균열인 경우 K_{III}^{τ} 와 K_{III}^D 는 독립적으로 균열선단에 영향을 미침을 알 수 있다.

일반적으로 동적모드 I, II 상태(Inplane) 하의 동적 전파균열은 균열면을 따라 표면파가 전파하며, 균열의 전파속도가 표면파의 속도에 도달하면 균열선단의 무차원 응력 및 변위장이 무한대로 증가하며, 또한 균열의 속도가 표면파의 속도에 도달 직전과 직후의 응력 및 변위값은 그 부호(+,-)가 반대적인 현상을 나타내고 있다⁽¹²⁻¹⁵⁾. 그러나 동적모드 III 상태(Out of Plane)하의 전파균열은 이러한 현상이 나타나지 않는다⁽¹⁶⁾. 그러나 본 연구에서와 같이 전기투과형 동적 균열인 경우에는 균열전파가 모드 III 상태임에도 불구하고 균열의 표면을 따라 표면파가 전파하고 있음을 알 수 있다. 이러한 원인은 기계적 하중이 비록 면외(Out of Plane)상태이더라도 면내상태(Inplane)의 전기적하중이 균열면에 영향을 미치기 때문이라 여겨진다. 그러나 전기 비투과형 모드 III 균열인 경우에는 이러한 현상이 발생하지 않는다. 이것은 균열면에서 전기가 투과하지 못하므로 전기하중이 균열면에서는 면내효과를 나타내지 못하기 때문이라 여겨진다.

3. 전파균열의 특성

전기투과형 균열의 압전재료에서 전파균열의 특성을 이해하기 위하여 적용된 응력장과 변위장은 균열선단에 매우 가까운 영역의 해인 $n=1$ 의 경우만을 적용하였다. 사용된 재료의 물성치들은 $G_{TV} = 3 \times 10^{10} \text{N/m}^2$, $e_{TV} = 17 \text{C/m}^2$, $d_{TV} = 1.5 \times 10^{-8} \text{C}^2/\text{Nm}^2$, $G_{LV}/G_{TV} = 2$, $e_{LV}/e_{TV} = 2$, $d_{LV}/d_{TV} = 2$ 이다. 또한 본 연구에서 이러한 물성치를 응력장 및 변위장에 적용하여 균열의 전파특성을 연구하였다. 이러한 물성치는 기존 연구자^(1,4)들이 사용한 등방성체의 물성치와 비슷하다.

균열선단부근의 본 연구에서 적용된 균열 전파속도는 표면파의 속도이하에서 적용하였다. 즉 기계 및 전자적인 재료의 주 물성치 방향이 균열의 전파방향과 이루는 각도 $\alpha = 90^\circ$ 인 경우 $M = 0.833$, $\alpha = 0^\circ$ 인 경우 $M = 0.961$ 에 도달하는 경우 균열의 속도는 표면파의 속도에 도달한다. 그리하여 본 연구에서는 무차원 균열전파속도 $M \leq 0.7$ 를 적용하였다. 특히 전기전단파의 속도 c_{se} 는 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우가 $\alpha = 90^\circ$ 가 더 크다. 동일한 균열전파속도를 기준해야 하므로 $\alpha = 90^\circ$ 상태의

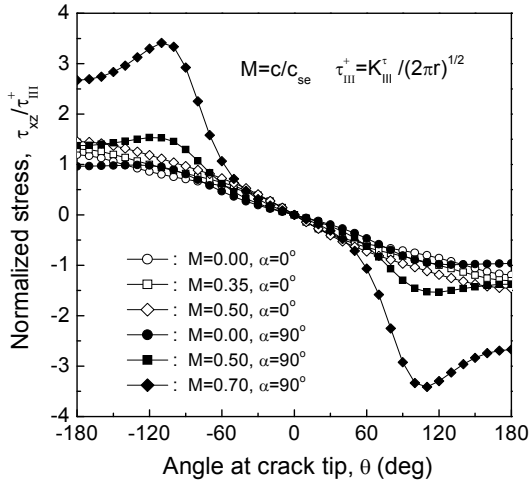


Fig. 2 Normalized stress τ_{xz}/τ_{III}^+ around crack tip

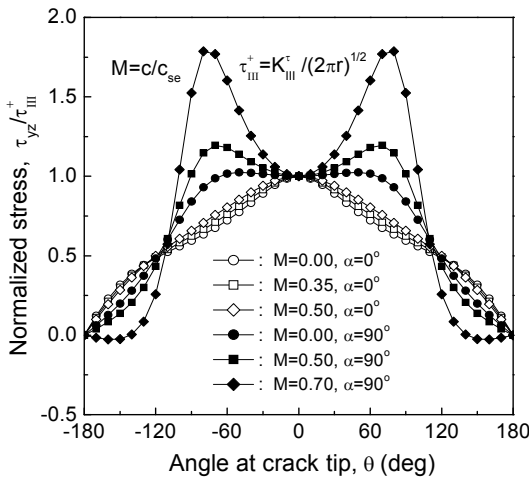


Fig. 3 Normalized stress τ_{yz}/τ_{III}^+ around crack tip

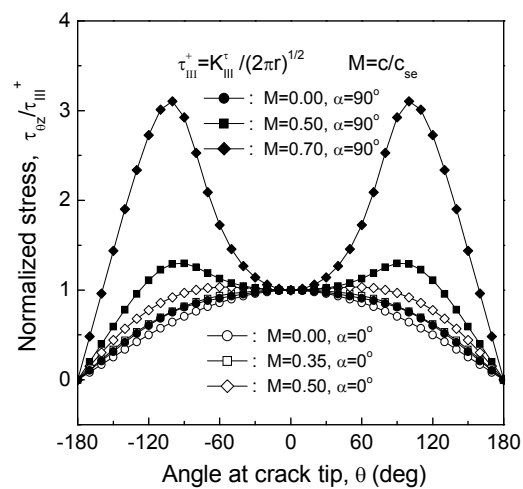


Fig. 4 Normalized stress τ_{0z}/τ_{III}^+ around crack tip

M=0, 0.5, 0.7 인 경우 $\alpha=0^\circ$ 인 상태에서는 각각 M=0, 0.35, 0.5 가 경우가 된다.

Fig. 2 는 균열선단부근의 무차원 응력 τ_{xz}/τ_{III}^+ 을

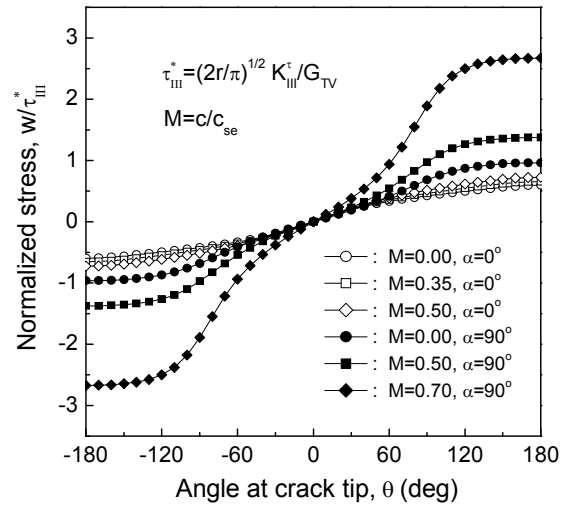


Fig. 5 Normalized displacement w/τ_{III}^* around crack tip

나타내고 있다. $\alpha=0^\circ$ 인 경우는 균열전파속도 에 크게 영향을 받지 않으나 $\alpha=90^\circ$ 인 경우는 크게 영향을 받는다. 정지균열상태에서는 $\alpha=0^\circ$ 인 경우가 $\alpha=90^\circ$ 인 경우보다 무차원 응력이 더 큰 경향을 가진다. 이것은 물성치의 방향과 응력성분 τ_{xz} 의 방향이 일치하기 때문이라 여겨진다.

그러나 균열이 전파하는 경우는 $\alpha=90^\circ$ 인 경우가 $\alpha=0^\circ$ 인 경우보다 무차원 응력이 더 크게 발생한다. 이것은 균열의 속도변화가 응력의 변화에 미치는 영향은 $\alpha=0^\circ$ 인 경우보다 $\alpha=90^\circ$ 인 경우가 더 크다는 것을 알 수 있다.

Fig. 3 은 균열선단부근의 무차원 응력 τ_{yz}/τ_{III}^+ 을 나타내고 있다. 정지균열 또는 전파균열에 관계없이 $\alpha=90^\circ$ 인 경우가 $\alpha=0^\circ$ 인 경우보다 무차원 응력이 더 큰 경향을 가진다. 이것은 물성치의 방향과 응력성분 τ_{yz} 의 방향이 일치하기 때문이라 여겨진다. 이러한 응력의 차이는 균열의 전파속도가 빠를수록 더욱더 크다.

Fig. 4 는 균열선단부근의 무차원 원주응력 τ_{0z}/τ_{III}^+ 을 나타내고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 균열이 고속으로 전파하는 경우 분지 균열 발생의 가능성은 $\alpha=90^\circ$ 인 경우가 $\alpha=0^\circ$ 인 경우보다 훨씬 크다. 특히 $\alpha=90^\circ$ 의 M=0.5 인 경우는 $\theta=\pm 90^\circ$ 에서 M=0.7 인 경우는 $\theta=\pm 100^\circ$ 에서 발생한다. 그러나 $\alpha=0^\circ$ 인 경우는 균열이 고속으로 전파하더라도 $|\theta|\leq 70^\circ$ 의 범위에서 비슷 응력이 발생한다. 따라서 초기균열의 전파의 방향 ($\theta=0^\circ$)과 다른 방향에서 응력의 증가가 거의 없으므로 고속 전파균열이 분지 균열로 될 가능성은 매우 낮다고 여겨진다.

Fig. 5 는 균열선단부근의 무차원변위 w/τ_{III}^* 을 나타내고 있다. $\alpha = 90^\circ$ 인 경우가 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우보다 훨씬 큰 변위를 가지며, 이러한 차이는 균열 전파속도가 클수록 더욱 크다. 균열의 전파방향을 기준으로 할 때 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우가 $\alpha = 90^\circ$ 인 경우보다 물성치가 더 크다. 따라서 $\alpha = 90^\circ$ 인 경우가 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우보다 변위가 크게 발생한다. 이러한 변위의 차이도 균열전파속도가 클수록 더욱 크다.

4. 결 론

본 연구에서는 재료의 기계적, 전기적성질이 직교이방성을 갖는 압전재료의 전기투과형 전파균열(Permeable propagating crack)선단부근의 응력장, 변위장 그리고 전기변위장등에 대하여 연구하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 전파균열면을 따라 표면파가 전파하며 균열의 전파속도가 표면파의 속도에 도달하면 무차원 응력장 및 변위장은 무한대로 증가한다. 또한 균열의 속도가 표면파의 속도에 도달 직전과 직후의 응력 및 변위값은 그 부호(+,-)가 반대적인 현상을 나타내고 있다.

(2) 균열선단의 응력성분 τ_{xz} , τ_{yz} 는 정지균열인 경우, 응력성분방향과 주 물성치방향이 일치하는 경우의 응력이 수직하는 경우의 응력보다 크다. 그러나 전파균열의 경우에는 $\alpha = 90^\circ$ 인 경우가 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우보다 응력이 크게 발생한다.

(3) 고속전파균열에서 분지균열은 $\alpha = 90^\circ$ 인 경우가 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우보다 크게 발생한다.

(4) 균열선단의 변위는 $\alpha = 90^\circ$ 인 경우가 $\alpha = 0^\circ$ 인 경우보다 크게 발생하며, 균열전파속도가 증가할수록 그 차이는 더욱더 크다.

후 기

본 연구는 2008 년도 KNU 학술연구비지원사업에 의해 연구되었으며 관계자에게 감사 드립니다.

참고문헌

- (1) Pak, Y. E., 1990, "Crack Extension Force in a Piezoelectric Materials," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 647~653.
- (2) Pak, Y. E., 1992, "Linear Electroelastic Fracture Mechanics of Piezoelectric Materials," *International Journal of Fracture*, Vol. 54, pp. 79~100.
- (3) Shindo, Y., Narita, F. and Tanaka, K., 1996, "Electroelastic Intensification Near Anti-Plane Shear Crack in

- Orthotropic Piezoelectric Ceramic Strip," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 25, pp. 65~71.
- (4) Shindo, Y., Tanaka, K. and Narita, F., 1997, "Singular Stress and Electric Fields of a Piezoelectric Ceramic Strip with a Finite Crack Under Longitudinal Shear," *Acta Mechanica*, Vol. 120, pp. 31~45.
- (5) Li, X. F. and Duan X. Y., 2001, "Closed-Form Solution for a Mode-III Crack at the Mid-Plane of a Piezoelectric Layer," *Mechanics Research Communication*, Vol. 28, pp.703~710.
- (6) Sosa, H. A., 1991, "Plane Problem in Piezoelectric Media with Defects," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 28, pp.491~505.
- (7) Ou, Y. L., Chue, C. H., 2006, "Mode III Eccentric Crack in Functionally Graded Piezoelectric Strip," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp.6148~6164.
- (8) Chen, Z.T., Yu, S. W., 1997, "Antiplane Yoffe Crack Problem in Piezoelectric Materials," *Int. J. Fract.*, Vol. 84, pp. L41~L45.
- (9) Hou, M. A., Quan, X. Q., Bian, W. F., 2001, "Energy Release Rate and Bifurcation Angles of Piezoelectric Materials with Antiplane Moving Crack," *Int. J. Fract.*, Vol. 107, pp.297~306.
- (10) Kwon, S. M. and Lee, K. Y., 2001, "Constant Moving Crack in a Piezoelectric Block: Anti-Plane Problem," *Mechanics of Materials*, Vol. 33, pp.649~657.
- (11) Piva, A., Tornabene, F. and Viola E., 2006, "Crack Propagation in a Four-Parameter Piezoelectric Medium," *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 25, pp. 230~249
- (12) Lee, K. H., Hawong, J. S. and Choi, S. H., 1996, "Dynamic Stress Intensity Factors K_I , K_{II} and Crack Propagation Characteristics of Orthotropic Materials," *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 53(1), pp. 19~140.
- (13) Lee, K. H. 2000, "Stress and Displacement Fields for Propagating the Crack Along the Interface of Dissimilar Orthotropic Materials Under Dynamic Mode I and II Load," *J. Appl. Mech.*, Vol. 67, pp. 223~228.
- (14) Lee, K. H., 2004 "Characteristics of a Crack Propagating Along the Gradient in Functionally Gradient Materials," *Int. J. of Solids Struct.*, Vol. 41, pp. 2879~ 2898.
- (15) Lee, K. H., Lee, Y. J. and Cho, S. B., 2009, "Characteristics of a Transiently Propagating crack in Functionally Graded Materials," *JMST*, Vol. 23, pp.1306~1322.
- (16) Lee, K. H., Cho, S. B., 2006, "Stress and Displacement Fields of a Propagating Mode III Crack in Orthotropic Functionally Gradient Materials with Property Graduation Along X Direction," *Trans of KSME (A)*, Vol. 30(3), pp. 249~259.