대한수학교육학회지 <학교수학> 제 12 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.12, No.4 585-604. Dec. 2010

포함제와 등분제에 따른 나눗셈 의미에 대한 이해 조사

장 혜 원*

본 연구에서는 나눗셈의 도입시 이용되는 두 가지 의미인 포함제와 등분제에 대한 초등학생 및 예비초등교사의 이해에 대해 조사하였다. 역대 교육과정 및 그에 따른 교과서에서 나눗셈을 도입하는 상황으로 양자를 다루어왔지만 그 구별을 어느 정도로 명시적으로 다루었는가 하는 것은 시기에 따라 변화되어 왔다. 특히 현행 2007년 개정교육과정에 따른 교과서에서는 두 가지 의미에 따라 나눗셈을 별도로 정의하고 몫의 의미에 대해서도 명시적인 언어적 설명을 추가하는 등 이전과 다른 특징을 보여준다. 계산 기능뿐만 아니라 연산의 의미 이해를 강조하는 수학교육 경향의 한 단면으로 간주되는 이러한 의도가 학생들에게 얼마만큼 수용되고 있는지 알아보기 위해 초등학교 3학년 학생을 대상으로 질문지를 적용하여 그 결과를 분석하고, 또한 두 상황의 명시적인 구별 가능성을 타진하기 위한 기초 자료로서 예비초등교사의 이해도를 조사하였다. 결과적으로 현행 교과서의 접근 방식에 대한 재고의 필요성을 확인하고, 나눗셈의 지도를 위한 몇 가지 교수학적 시사점을 도출하였다.

I. 서론

시대의 변화에 따른 사회적 요구에 부합하여 학교수학에서 다루어지는 내용 역시 빠르게 변화할 것을 요구한다. 제7차 교육과정 이후 2007년 개정교육과정, 2009년 개정교육과정이라는 명칭 자체가 그러한 특징에 부합하여 수시 개정의 의지를 표출하고 있다.

학교수학은 현재 2007년 개정교육과정의 순차적 적용기에 해당하며, 2011년이면 5, 6학년까지 새로운 교육과정에 따른 교과서가 적용되는 완료 시기가 된다. 이미 적용 중인 1~4학년 교과서에는 오늘날 수학교육이 지향하는 의사소통이나 추론과 같은 활동을 적절하게 구현하고자 하는 노력이 들어 있다. 내용 및 접근 방식에서도 이전과는 차이를 보여주는 몇 가지 주제가 발견되는데, 본고의 관심 주제는 수학 3-1의 나눗셈 단원이다.

나눗셈은 의미상 두 가지로 분류된다. 포함제와 등분제[1]인데 우리나라 초등수학에서는 2~3학년 때 처음 나눗셈을 도입하면서 이 두 가지 의미가 암묵적으로 또는 명시적으로 지도되어왔다. 동일한 식으로 표현되는 두 가지 상황의 차이를 구별하는 것이 초등 저학년에게 결코 쉬운 일은 아니다. 이종욱(2007)은 몇 가지의 선행 연구를 토대로 하여 등분제뿐만 아니라 포함제는 분할과 측정의 이중적이고 양면적인 특성을 지닌다고 하면서 아동들이 등분제의 상황을 생각하지만 문제를 해결할 때는 포함제의 방법을 사용한다고 하였다. 따라서 놀랍게도 $42 \div 6$의 등분제 상황이 주어질 때 '42에

* 진주교육대학교 수학교육과 (hwchang@cue.ac.kr)

1) 각각을 측정 나눗셈과 분할 나눗셈(Carpenter et al., 2005) 또는 동수누감 나눗셈과 등분 나눗셈(교육과학기술부, 2010c)이라 하기도 하는데 본고에서는 포함제와 등분제로 지칭할 것이다.

는 6이 몇 번 들어가는가?'라고 물어도 학생들은 전혀 어려움을 느끼지 않는다고 하였다. 다시 말하면 학생들이 나눗셈의 상황에 대해 구별 없이 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하고 있다고도 할 수 있다.

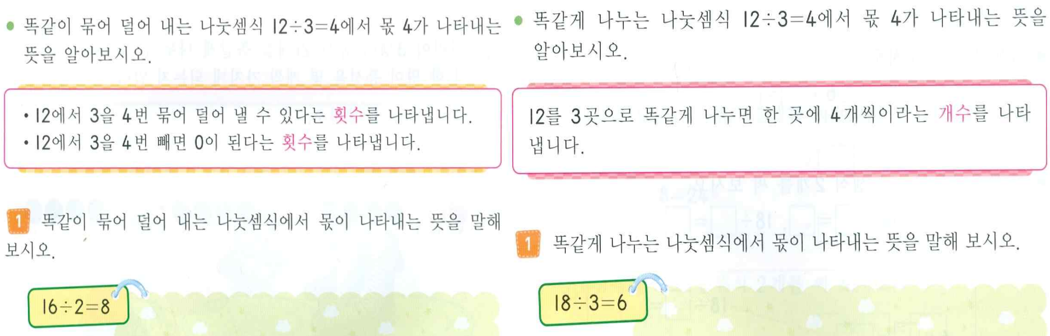
더욱이 교사들의 나눗셈 개념에 대한 인식 여부도 낮은 것으로 나타난다. 김민경(2003)에 따르면 예비초등교사들이 나눗셈 기호와 기계적인 연산에는 익숙하지만 나눗셈의 포함제 및 등분제 표현의 적절성에 대한 평가를 포함하여 개념적 지식과 절차적 지식간의 관련성에 대한 이해도는 낮은 것으로 확인된다.

Neuman(1999)에 따르면 스웨덴 교과서는 몇십 년 전에 포함제와 등분제를 명시적으로 구별하여 기호를 다르게 사용하였으나 이후 나눗셈을 하나의 연산으로 도입하는 이점을 강조하게 되었다. 여기서 생각해야할 문제 중 하나는 아동들이 포함제와 등분제의 차이를 인식 또는 경험하는가 하는 것이고, 만약 그렇지 않다면 그 차이에 주목하도록 할 필요가 있는지에 대한 것이다.

현행 수학 교과서에서는 포함제와 등분제를 '똑같이 묶어 덜어내는 나눗셈'과 '똑같게 나누는 나눗셈'으로 구별하여 나눗셈을 이중적으로 정의하고 양쪽 상황에서 몫의 의미를 명시적으로 구별하도록 하는 접근을 취한다는 점에서 이전 교과서와 큰 변화를 보여주고 있다. 그 변화의 적절성에 대해 재고하기 위한 고찰의 출발점으로 한 3학년 학생이 보인 나눗셈 학습 장면을 살펴보자.

[그림 I-1] 3학년 학생의 나눗셈 문장 만들기(교육과학기술부, 2010b, p.63)

[그림 I-1]에 제시된 익힘책의 문제 활동은 두 상황에 따른 몫의 의미의 차이를 인식시키고자 하는 의도에서 윗 문제는 몫이 묶음을 나타내는 나눗셈을, 아래 문제는 똑같게 나누는 나눗셈을 나타내는 문장을 만드는 문제로 구별되는데 학생의 수행 결과는 상황의 차이를 제대로 인식하지 못하고 있음을 드러낸다. 더욱이 양쪽 문장에 포함된 '똑같이 나누어주면'이라는 일관된 표현으로부터 나눗셈에 대한 학생의 관념이 등분의 상황이며 따라서 등분제



[그림 I-2] 2007년 개정교과서에서 몫의 의미(교육과학기술부, 2010a, p.56, 57)

상황에 보다 친숙하다는 사실을 알 수 있다.

또한 교과서 활동 중 주어진 나눗셈의 몫이 나타내는 뜻을 말하는 활동([그림 I-2])에서는 바로 앞에 제시된 교과서의 진술을 보고 쓸 수 있었지만 교과서의 도움 없이는 진술이 어려웠다. 교과서의 진술을 보여주는 상황은 토파즈 효과로, 그때 교과서의 진술을 보고 답했는데 학생이 의미를 충분히 이해했다고 판단하는 교사는 쥬르댕 효과로 간주되어 Brousseau(1998)의 교수학적 상황의 사례로 볼 수 있다.

이에 역대 교육과정 및 그에 따른 교과서에서 나눗셈을 어떤 방식으로 도입하였는지 비교 분석하고 나눗셈의 의미와 상황에 대한 초등학생 및 예비초등교사의 이해에 대해 조사할 것이다. 그 결과에 기초하여 2007년 개정교과서의 접근 방법에 대한 논의를 통해 나눗셈의 의미 지도를 위한 교수학적 시사점을 얻고자 하였다.

II. 이론적 고찰

1. 나눗셈의 의미

초등학교 수학의 기본 주제 중 하나인 수 연산을 지도하면서 의미 있는 학습이 되도록 하기 위해서 개념적 지식과 절차적 지식의 연계가 요구된다. 다시 말해 연산을 수행하는 것과 그 의미를 파악하는 것이 항상 일치하는 것은 아니기 때문에 교사는 지도하고자 하는 연산을 필요로 하는 다양한 상황을 제시하고 그것을 식으로 형식화하는 과정을 통해 그 연산의 의미에 대해 지도할 필요가 있는 것이다.

나눗셈의 의미에 대한 Vergnaud(1983)의 견해는 승법구조 속에서 설명된다. 그 구조 속에서 나눗셈의 두 가지 유형이 제시되는데, 제1유형은 [그림 II-1]과 같이 a, b가 주어질 때 단위 값 $x=f(1)$을 찾는 경우로, a와 1의 관계에 기초하여 b로부터 x를 얻기 위해 수직 방향의 $\div a$를 요구한다. 예제 중 'Connie는 Jane, Susan과 사탕을 나누어 먹고 싶어 한다. 어머니가 사탕 12개를 주셨다면 한 사람의 몫은 얼마인가?'에서 M_1은 아동의 수, M_2는 사탕의 수이고 $a=3$, $b=12$에 해당한다. 이 문제를 풀면서 $\div a$를 어려워하는 아동은 a에 얼마를 곱해야 b가 되는지를 찾는 절차 또는 나눌 대상을 다른 사람이나 장소에 하나씩 분배하는 절차를 따른다.

M_1	M_2
1	$x=f(1)$
a	$b=f(a)$

[그림 II-1]
나눗셈 유형1

M_1	M_2
1	$a=f(1)$
x	$b=f(x)$

[그림 II-2]
나눗셈 유형2

제2유형은 [그림 II-2]에서 보듯이 $b=f(x)$와 $a=f(1)$을 알고 x를 찾는 경우로, a와 1의 관계에 기초하여 b로부터 x를 얻기 위해 수평 방향의 $\div a$를 요구한다. 예제로서 제시된 'Peter는 15달러를 가지고 장난감 자동차를 사려고 한다. 하나당 3달러라면 몇 개를 살 수 있는가?'로 보면, M_1은 자동차의 개수, M_2는 값이고 $a=3$, $b=15$이다. 이 경우에도 직접 나눗셈을 하기 어려워할 때 b가 될 때까지 a가 몇 번 더해져야 하는지 그 횟수를 세는 절차를 따른다. 이와 같은 Vergnaud의 의미에서는 제1유형이 등분제, 제2유형이 포함제에 해당한다.

한편 Baroody & Coslick(2006)은 나눗셈 상황을 그 역산인 곱셈식을 고려하여 대칭적 상황과 비대칭적 상황으로 구분하였다. 전자는 조합이나 넓이 문제와 같이 피승수와 승수 중 어느 쪽이든 미지수가 될 수 있는 반면 후자는 곱하는 수들의 역할이 다름에 따라 모임을 만드는 두 가지 방법을 구별한 것인데 이것이 바

로 포함제와 등분제이다. 포함제는 지정된 크기의 모임을 만드는 것, 즉 양을 각 모임의 대상수로 나누어 몫으로 모임의 수를 얻는 반면 등분제는 몇 개의 지정된 모임을 만드는 것, 즉 양을 모임의 수로 나누어 몫으로 각 모임의 대상수를 얻는다.

Carpenter et al.(2005)은 미지수에 따른 차이로 봄으로써 포함제는 집합의 수를 구하는 것인 반면 등분제는 각 집합에 속한 사물의 수를 구하는 것으로 구분하였다. 그 구별이 중요한 이유는 문제에 주어진 서로 다른 정보를 되돌아보면서 그 정보를 서로 다른 방식으로 사용하여 문제를 해결하기 때문이라고 하였다. 다시 말해 기호적으로는 동일한 나눗셈식이지만 그것이 구현하는 상황에 대해 문제를 풀 때는 주어진 것과 구해야 할 것이 서로 다른 것을 의미하기 때문에 그 의미를 생각하면서 문제를 해결하는 것이 유용함을 말한 것으로 볼 수 있다.

이상에서 보듯이 나눗셈은 나머지 세 개의 사칙연산과 마찬가지로 다양한 상황으로 의미가 표출되지만 특히 중요한 두 가지는 포함제와 등분제의 상황이다. 서로 구별되는 양쪽 상황에서 주어진 것과 구해야 할 것이 다르기 때문에 두 상황에 대한 경험을 통해 나눗셈에서 각각의 역할을 파악하는 것은 학생들의 문제 이해 및 해결에 도움이 될 것이다.

2. 포함제와 등분제에 대한 비형식적 지식

대부분의 초등수학 내용과 마찬가지로 등분제와 포함제를 풀기 위해 아동이 갖는 비형식적 지식이 있다. Baroody & Coslick(2006)은 각각 두 가지를 들었는데, 전자를 위한 것이 ‘분배’와 ‘시행착오에 의한 나누기’이고 후자를 위한 것이 지정된 크기로 모둠을 만드는 ‘할당’과 ‘동수누감’이다.

한편 Carpenter et al.(2005)은 양쪽 상황에서 공통적으로 ‘직접적인 모델링’과 ‘수세기 전략’을 들었다. 직접적인 모델링은 연산 문제를 풀면서 학생들이 먼저 문제에 기술된 행위와 관계를 직접적으로 모델링함으로써 문제를 해결한다는 것인데, 포함제의 경우 문제에 기술된 대로 특정 개수의 사물로 주어진 개수의 묶음을 만들고 만든 묶음의 개수를 세는 것이다. 등분제의 경우에는 사물 전체를 한 번에 하나씩 각 묶음에 정확하게 분할하거나 한 묶음에 한 개 이상의 사물을 놓은 후 필요에 따라 각 묶음에서 사물을 제거하거나 각 묶음에 추가하는 방식인데 대부분의 학생은 오히려 후자와 같은 방법을 취하였다. Baroody & Coslick의 시행착오에 해당하는 전략이다. 한편 수세기 전략은 포함제의 경우 제수만큼씩 뛰어 세면서 셀 때마다 손가락 등으로 그 회수를 세는 것이고, 등분제의 경우에는 훨씬 어렵다. 뛰어 세어야 하는데 그것이 미지수이므로 어떤 수만큼 뛰어 세어야 하는지 알 수가 없는 것이다. 따라서 그것을 알기 위해 시행착오적으로 얼마만큼씩 뛰어 세어 제시되어 있는 묶음의 수만큼 뛰어야 하고 사물 전체의 수가 세는 것을 멈출 지점을 알려준다.

이종욱(2008)에 제시된 포함제와 등분제를 해결하기 위한 비형식적 지식은 각각 ‘거래 전략’, ‘어림-조절 전략’으로 명명되었다. 포함제를 해결하는 데 이용된 거래 전략은 ‘사물의 총 수에서 반복적으로 제거되는 각 집합에 속한 수 알기, 이들 각 집합이 거래되는 횟수 알기, 재구성된 사물의 총 수 확인하기’의 세 절차로 이루어진다. 집합의 수와 각 집합에 속한 수의 곱이 총 수라는 세 수 사이의 관계에서 집합의 수가 확정된 것인지, 총 수가 확정된 것인지에 따른 차이를 무시한다면 동수누가의 곱셈 상황과 같은 맥락에서 자연스럽게 해결할

수 있는 나눗셈 상황이 된다. 한편 등분제를 해결하기 위한 어림-조절 전략은 한 개 이상의 대상이 첫 회에 거래되면서 추가적으로 나누어 주어야 하는 개수를 1개가 아닌 몇 개로 어림하고 조절하는 전략이다. 한 번에 같은 수만큼 거래하는 등분제에 대한 아동의 비형식적 지식은 일반적으로 한 번에 1개씩 공평하게 나누어 주는 상황을 의미하는 등분제의 접근보다 오히려 발전한 형태이며 포함제와의 통합적 특성을 보여주기 때문에 더 자연스럽다.

이와 같은 비형식적 지식은 학생의 형식적 지식 학습의 출발점으로 역할해야 하기 때문에 고려되고 이해되어야 할 가치가 있는 것이다.

III. 교육과정 및 교과서 분석

1. 교육과정 분석

교수요목기부터 2007년 개정교육과정까지 초등수학과에서 나눗셈이 도입되는 학년 및 내용은 <표 III-1>과 같다(교육부, 2000; 교육인적자원부, 2007).

교육과정 상에 포함제와 등분제가 명시된 것은 교수요목기 뿐이고 그 이후에는 ‘나눗셈의 뜻’, ‘나눗셈이 이루어지는 경우’ 등의 문구에 따라 포함제와 등분제가 교수 상황에서 다루어졌을 것으로 기대된다. 따라서 실제로 과거와 오늘날의 교실 현장에서 나눗셈의 도입이 어떻게 이루어져왔는가를 알기 위해서는 교육과정 분석만으로는 부족하며 교사들의 수업에 크게 영향 미치는 교과서의 분석이 필수적이라 할 것이다.

2. 교과서 분석

포함제와 등분제의 취급은 나눗셈이 이루어

<표 III-1> 나눗셈 도입과 관련한 교육과정 분석

교육과정 구분	학년	지도 내용
교수요목	2	포함제
	3	등분제
		제산 (1) 포함제, 등분제의 총괄적 취급
제1차 교육과정	2 3	배(倍)의 관념을 주어 승제의 기초를 풍부히 함 승제의 뜻과 승법 구구
제2차 교육과정	2 3	곱셈, 나눗셈 (3)나눗셈에 관한 이해(곱셈과의 역관계) 곱셈 나눗셈(평이한 나눗셈)
제3차 교육과정	2	곱셈, 나눗셈의 연산의 뜻을 알아보고 이를 통하여 곱셈, 나눗셈을 하기(곱셈의 역연산으로 나눗셈을 하기)
제4차 교육과정	2	곱셈 구구를 알아보고, 이를 써서 간편한 곱셈과 나눗셈을 할 수 있다.
제5차 교육과정	2	곱셈과 나눗셈이 이루어지는 경우를 알아보고, 곱셈 구구의 범위에서 곱셈과 나눗셈을 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
제6차 교육과정	2	곱셈과 나눗셈이 이루어지는 경우를 알아보고, 곱셈 구구의 범위에서 곱셈과 나눗셈을 하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
제7차 교육과정	3-가	나눗셈의 도입 (1) 생활에서 나눗셈이 이루어지는 경우를 찾아 나눗셈의 의미를 이해한다.
2007년 개정 교육과정	3	나눗셈이 이루어지는 상황을 알고, 나눗셈의 의미를 이해한다.

지는 상황과 관련하여 나눗셈의 도입부에서 발견된다.

가. 교수요목기

교수요목기는 교육과정뿐만 아니라 교과서 역시 아직 내용의 체계화가 이루어지지 않은 상태이기 때문에 단원의 설정 없이 문제 상황과 연습문제가 혼재되어있다. 교육과정에 따라 초등 셈본 2-2에서 포함제가 다루어질 것으로 기대되지만 실제로는 나눗셈 기호나 의미가 전혀 발견되지 않고 다만 승수가 미지수인 곱셈식을 이용하여 포함제의 상황을 다룬다. 예를 들어 다음과 같은 문제 상황에서, 각각을 위한 식으로 $48 = 6 \times \square$, $18 = 3 \times \square$을 요구하는 것이다.

- 정숙이 그림책은 마흔 여덟 페에지이다. 하루에 여섯 페에지씩 읽으면, 며칠에 다 읽겠느냐? (문교부, 1949a, p.32)
- 희순이는 열 여덟 동무들을 세 사람씩 나누었다. 몇 패나 되겠느냐?(Ibid., p.36)

한편 셈본 3-1에는 단원명은 없지만 '고기잡기', '사과'와 같은 제목 아래 대상을 몇 곳에 똑같이 나누는 등분제 상황을 제시한 다음 이번에는 마찬가지로 피승수가 □인 곱셈식, 예컨대 $14 = \square \times 2$와 같은 식으로 연결짓는다. 이어 나눗셈의 도입은 다음 문제 상황을 이용한다.

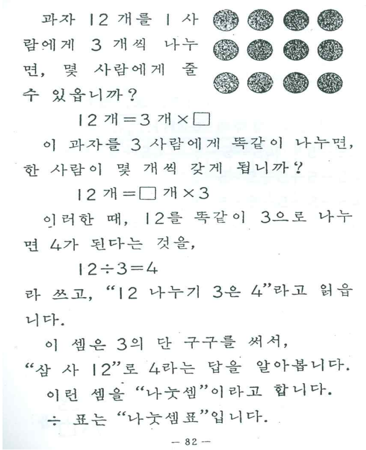
- 달걀 1꾸러미에는 달걀이 10개 들어 있다. 그것을 2사람이 똑 같이 나누면, 몇 개씩 가지게 되느냐? 이 달걀을 2개씩 나누어 놓으면, 몇 묶이 되느냐?(문교부, 1949b, p.17)

같은 문제 상황에서 두 개의 질문을 통해 등분제와 포함제의 두 가지 의미를 동시에 다룬 것이다. 그리고 이후에 '통졸임'이나 '장사 놀이'에서 물건을 몇 개의 상자에 똑같이 나누어 놓는 상황을 다루면서 등분제를 더 비중 있게 다룬 것을 볼 수 있다.

요컨대 교수요목기에는 교육과정 상의 구분에 따라 2학년에서 포함제 상황을, 3학년에서 등분제 상황을 다루지만 각각 비대칭적 곱셈식을 통해 직관적으로 파악하게 한 후, 등분제와 포함제를 통합적으로 다루면서 나눗셈을 도입한다.

나. 제1차 교육과정기

산수 2-2에서 나눗셈의 기초로서 과자 12개를 한 사람이 2개씩 가질 때 몇 사람에게 줄 수 있는지, 4사람이 똑같이 나누면 한 사람이 몇 개씩 갖는지를 묻는 문제로 포함제와 등분제 상황이 나눗셈에 대한 언급 없이 다루어진다. 산수 3-2의 5단원인 '정월'에서 나눗셈의 의미가 제시된다. 편을 갈라 윷놀이를 하는 상황이나 과자를 나누어주는 상황에서 12개를 1사람에게 3개씩 나누는 포함제와 3사람에게 똑같이 나누는 등분제를 승수 또는 피승수가 미지수인 곱셈식으로 취급한 다음, 나눗셈식을 도입한다. 그리고 그 답은 구구단을 이용하여 구함을 설명한다([그림 III-1]).


과자 12 개를 1 사람에게 3 개씩 나누면, 몇 사람에게 줄 수 있읍니까?

12 개＝3 개×□

이 과자를 3 사람에게 똑같이 나누면, 한 사람이 몇 개씩 갖게 됩니까?

12 개＝□ 개×3

이러한 때, 12를 똑같이 3으로 나누면 4가 된다는 것을,

12÷3＝4

라 쓰고, "12 나누기 3은 4"라고 읽읍니다.

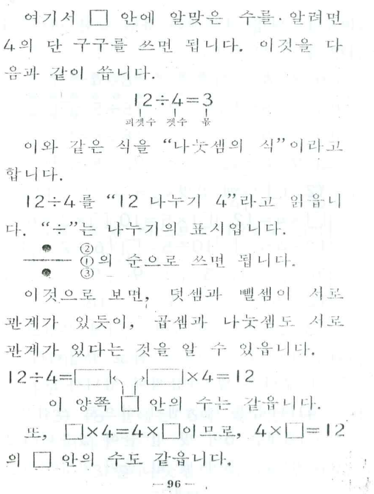
이 셈은 3의 단 구구를 써서, "삼 사 12"로 4라는 답을 알아봅니다.

이런 셈을 "나눗셈"이라고 합니다.

÷ 표는 "나눗셈표"입니다.

— 82 —

[그림 III-1] 제1차 교과서의 나눗셈 도입(문교부 ,1962 ,p.82)



여기서 □ 안에 알맞은 수를 알려면 4의 단 구구를 쓰면 됩니다. 이것을 다음과 같이 씁니다.

$$\underset{\text{피젯수}}{12} \div \underset{\text{젯수}}{4} = \underset{\text{몫}}{3}$$

이와 같은 식을 "나눗셈의 식"이라고 합니다.

12÷4를 "12 나누기 4"라고 읽읍니다. "÷"는 나누기의 표시입니다.

②①③의 순으로 쓰면 됩니다.

이것으로 보면, 덧셈과 뺄셈이 서로 관계가 있듯이, 곱셈과 나눗셈도 서로 관계가 있다는 것을 알 수 있읍니다.

12÷4=□ □×4=12

이 양쪽 □ 안의 수는 같읍니다.

또, □×4=4×□이므로, 4×□=12의 □ 안의 수도 같읍니다.

— 96 —

[그림 III-2] 제2차 교과서의 나눗셈 도입(문교부, 1972, p.96)

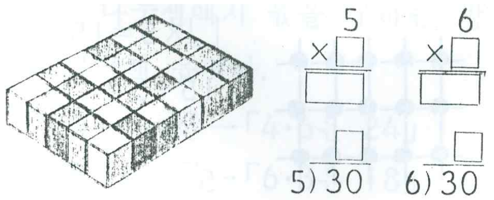
다. 제2차 교육과정기

2차 교육과정에 따르면 나눗셈의 곱셈과의 역관계가 2학년에서 다루어질 것으로 기대되지만 교과서에는 사물의 사각배열을 통해 곱셈의 대칭적 상황만 다루고 나눗셈의 도입은 산수 3-1의 6단원에서 이루어진다. 연필, 테이프, 물 등을 소재로 등분의 의미를 알려주고, 12사람을 4사람 씩 한 분단으로 만드는 포함제와 4분단을 만들기 위한 사람 수를 묻는 등분제의 상황에서 모르는 것을 □로 하여 곱셈식을 만들고 나눗셈 식을 도입하여 표현할 수 있음을 설명한다. 하나의 문제 상황에서 포함제와 등분제가 동시에 다루어지고, □가 있는 곱셈식을 이용하여 나눗셈식을 도입한다는 점 등은 제1차 교과서[2]와 일치하지만 다음과 같은 차이를 확인할 수 있다([그림 III-2]).

- 소재로 이산량뿐만 아니라 물이나 테이프와 같은 연속량을 이용한다.
- 나눗셈 식에서 피젯수와 젯수와 몫이라는 명칭을 지도한다.
- 나눗셈 기호 ÷의 명칭이 '나눗셈표'에서 '나누기의 표시'로 바뀌었고 이를 소개할 때 쓰는 순서까지 제시한다.
- 곱셈과 나눗셈의 관계를 덧셈과 뺄셈의 관계에 비유하여 명시적으로 지도한다.
- 몫을 구하는 별해로 뺄셈의 활용 즉 동수누감을 시각적 표현, 식(연속된 가로, 세로 뺄셈식), 수직선 등의 다양한 방법을 이용하여 강조한다.

라. 제3차 교육과정기

산수 2-2에서 24개의 별을 4개씩 한 묶음으로 할 때의 묶음 수와 똑같이 4묶음으로 나눌 때의 한 묶음 속의 개수를 구하는 활동을 통해 각각 4×□=24와 □×4=24에서 □안에 알맞은 수를 구하는 것으로 나눗셈을 도입하므로, 역시 비대칭적 상황을 이용하여 구별한 것이다. 주목할 점은 □가 있는 곱셈식을 풀기 위해 곱셈구구를 이용하기 전에 1, 2, 3, …과 같은 수를 넣어보게 하는 시행착오 전략을 구사한다는 것이다. 한편 [그림 III-3]과 같이 대칭적 상황도 예시되고 이어 동수누감을 통한 나눗셈의 의미와 곱셈과의 역연산 관계에 대해서도 명시적으로 다루고 있다.



[그림 III-3] 대칭적 상황(문교부, 1975, p.31)

마. 제4차 교육과정기

산수 2-2의 단원 '나눗셈의 기초'에서 먼저 포함제와 등분제 상황을 각각 3문제씩 제시하여 □가 있는 곱셈식이나 나눗셈식을 배우기 전에 그림을 이용하여 직관적으로 답하는 활동

2) 본고에서는 제n차 교육과정에 따른 교과서를 제n차 교과서라고 지칭할 것이다.

을 포함한다. 이어 몇 줄로 늘어놓는 상황에 대해 □를 이용한 비대칭적 곱셈식의 연습 후 나눗셈을 도입하는데, 이때 □가 있는 곱셈식에서 미지수의 위치에 따라 그에 대응하는 나눗셈식을 구별하여 제시한다([그림 III-4]). 제3차 교과서와 같이 사각 배열을 통해 대칭적 상황도 다룬다.

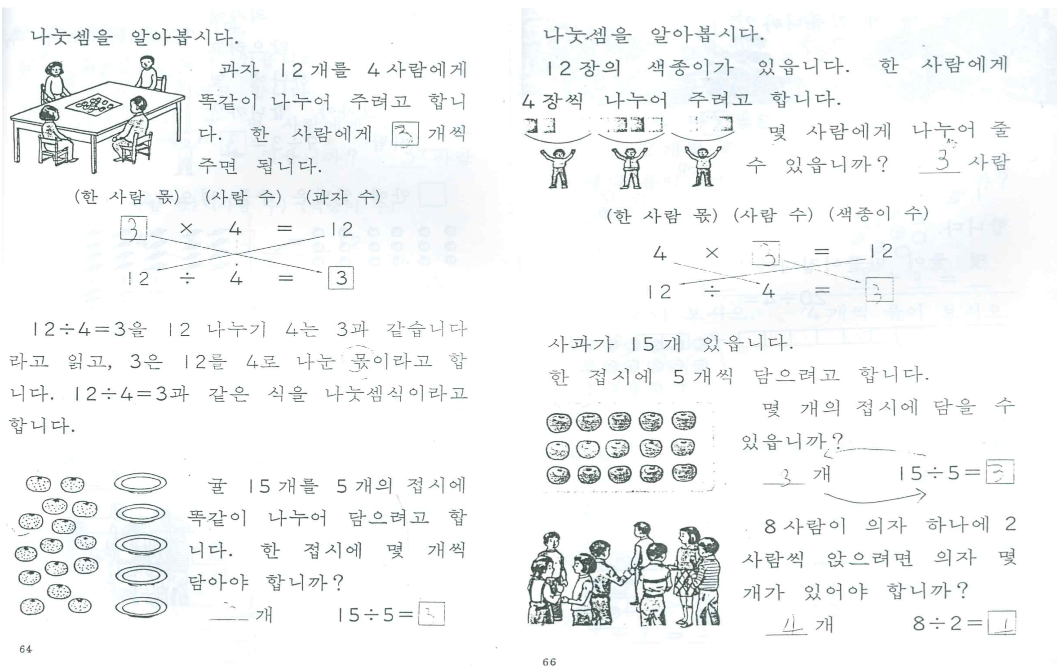
바. 제5차 교육과정기

산수 2-2에서 '몇씩 몇 줄인지 알아봅시다'라는 공통 활동으로 15명이 5명씩 서면 몇 줄인 것과 20개를 4줄로 똑같이 나누어 늘어놓는 것을 역시 식 $5\times\square=15$, $\square\times4=20$으로 다룬 다음, '똑같이 나누어 봅시다' 차시에서 등분제와 포함제에 해당하는 다양한 상황을 제시하여 그림 및 □가 있는 곱셈식으로 다룬다. 그리고 등분제를 이용하여 나눗셈을 정의하고 동수누감의 의미를 다루면서 포함제와 관련짓는다.

4차에서 5차로의 변화는 □이 있는 곱셈식을 이용하여 나눗셈 상황을 두 가지로 구분하는 기초 활동의 강조는 일치하지만 막상 나눗셈의 정의에서는 차이를 보인다. 4차에서는 곱셈식에서 □의 위치에 따라 나눗셈의 유형을 구별하고 있지만 5차에서는 주어진 등분제 상황에 대해 곱셈식 없이 시각적 표현을 통해 몫을 구하고 이를 나눗셈식으로 표현하는 방법을 취한다.

사. 제6차 교육과정기

수학 2-2에서 수를 똑같이 나누는 상황으로 포함제와 등분제 상황을 곱셈식이나 나눗셈식 없이 빈 칸 있는 문장이나 그림을 통해 직관적으로 다룬 후, 포함제와 등분제 상황을 '나눗셈을 알아봅시다.(1)'과 '나눗셈을 알아봅시다.(2)'의 별도의 차시로 구별하여 다루면서 전자에서 나눗셈식을 정의한다. 이때 포함제는 동수누감의 의미로 설명되는데, 제5차 교과서부터 나타난 이 현상은 이전까지 상황 또는 곱셈식으로부터 나눗셈을 정의하고 난 후 동수누감의


나눗셈을 알아봅시다.

과자 12개를 4사람에게 똑같이 나누어 주려고 합니다. 한 사람에게 3개씩 주면 됩니다.

(한 사람 몫) (사람 수) (과자 수)

3 × 4 = 12

12 ÷ 4 = 3

12÷4=3을 12 나누기 4는 3과 같습니다 라고 읽고, 3은 12를 4로 나눈 몫이라고 합니다. 12÷4=3과 같은 식을 나눗셈식이라고 합니다.

귤 15개를 5개의 접시에 똑같이 나누어 담으려고 합니다. 한 접시에 몇 개씩 담아야 합니까?

___개 15÷5=3

64

나눗셈을 알아봅시다.

12장의 색종이가 있습니다. 한 사람에게 4장씩 나누어 주려고 합니다.

몇 사람에게 나누어 줄 수 있습니까? 3 사람

(한 사람 몫) (사람 수) (색종이 수)

4 × 3 = 12

12 ÷ 4 = 3

사과가 15개 있습니다. 한 접시에 5개씩 담으려고 합니다.

몇 개의 접시에 담을 수 있습니까?

3 개 15÷5=3

8사람이 의자 하나에 2사람씩 앉으려면 의자 몇 개가 있어야 합니까?

4 개 8÷2=4

66

[그림 III-4] 제4차 교과서의 나눗셈 도입(문교부, 1982, p.64, 66)

의미가 차후 지도된 것과 구별된다.

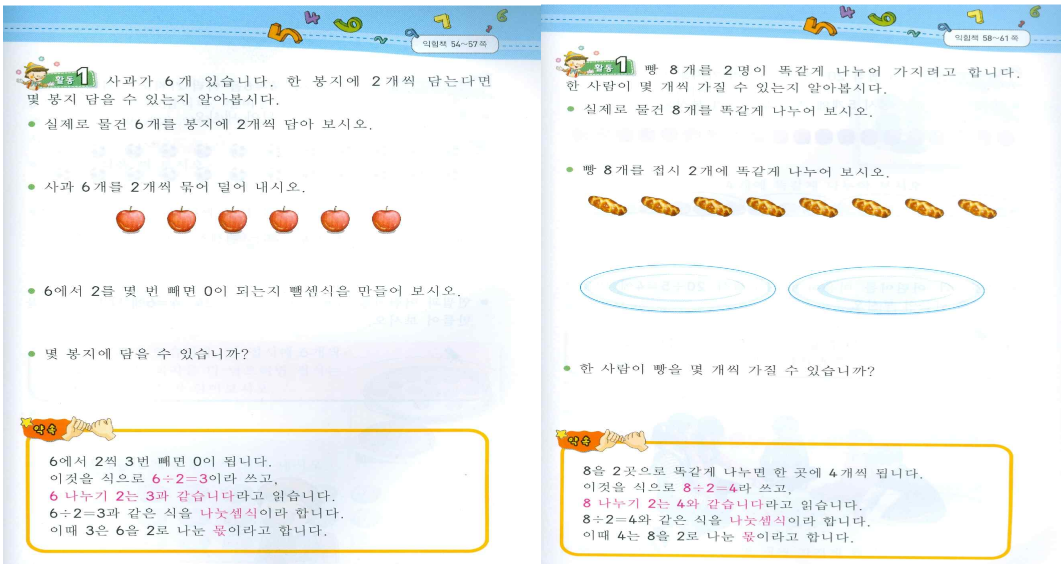
아. 제7차 교육과정기

수학 3-가(교육자원인적부, 2001)에서 별도의 기초 활동 없이 곧바로 주어진 포함제 상황에 대한 일련의 활동을 통해 나눗셈식을 정의한다. 그리고 다음 차시에서 등분제 상황을 나눗셈식으로 나타내는 활동을 하게 된다. 동수누감의 의미를 다루지 않는다는 특징도 보인다.

자. 2007년 개정교육과정기

나눗셈의 도입은 2007년 개정교과서에서 변화가 큰 주제 중 하나이다. 수학 3-1에서 ‘똑같이 묶어 덜어내는 나눗셈’과 ‘똑같게 나누는 나눗셈’을 구별하여 다루면서 각각에서 나눗셈을 별도로 정의하고([그림 III-5]), 나눗셈의 몫을 $12 \div 3 = 4$를 예로 든다면 각각 ‘12에서 3을 4번 묶어 덜어 낼 수 있다는 횟수’ 또는 ‘12에서 3을 4번 빼면 0이 된다는 횟수’와 ‘12를 3곳으로 똑같게 나누면 한 곳에 4개씩이라는 개수’로 설명하고 그것을 학생이 진술할 것을 요구함으로써 포함제와 등분제를 명확히 구별하여 다룬다([그림 I-2]). 이어 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계를 다룬 다음 나눗셈의 몫을 구하는 방법으로 묶어 덜어내기, 똑같게 나누기, 곱셈과의 관계를 제시하고 있다. 그러나 곱셈과 나눗셈의 관계에서는 포함제의 역연산인 $3 \times \square = 12$만 다루고 등분제의 역연산인 $\square \times 3 = 12$는 다루지 않아 나눗셈의 두 가지 의미를 강조해온 앞의 경향과 일관성이 부족함을 보여준다.

이상의 분석으로부터 각 교육과정별 특징을 <표 III-2>와 같이 정리할 수 있다. 이때 ‘비대칭적 상황의 취급’은 나눗셈 도입 이전에 □가 있는 곱셈식을 이용한 비대칭적 상황이 다루어지는지 여부와 관련하며, ‘포함제와 등분제의 명시적 구분’은 차시, 용어 또는 몫의 의미 등을 구분하여 제시하였는가를 의미하여, 하나의 공통 상황에서 양쪽 의미를 다룬 후 나눗셈식을 정의하는 경우는 포함하지 않는다. 특히 나눗셈 도입시 포함제 또는 등분제를 다루고 나서 나눗셈을 한 번에 정의하는 타 교과서와 달리 2007년 개정교과서는 포함제와 등분제의 상황 각각에서 나눗셈을 별도로 정의함으로써 두 번 정의된다는 차이가 있다.

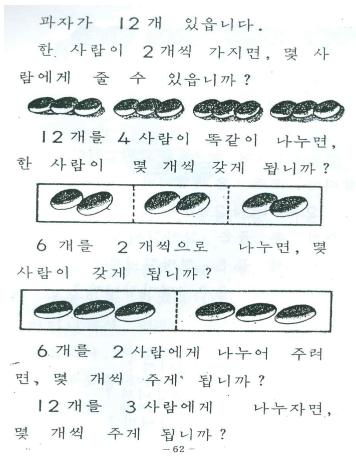


[그림 III-5] 2007년 개정교과서의 나눗셈 도입(교육과학기술부, 2010a, p.49,53)

□가 있는 곱셈식을 이용한 비대칭적 상황에 대한 인식은 제4, 5차기까지 강조되다가 제6차 교과서에서는 과도기적 특성을 보인다. 곱셈식이 없는 대신 글로써 '2개씩 _접시' 또는 '_개씩 3접시'와 같은 활동을 포함하고, 나눗셈을 정의한 다음에 몫을 구하는 활동에서 곱셈식 중의 □를 1부터 몫까지 변화시켜 가며 곱의 결과를 확인하는 과정이 포함되기 때문이다.

그리고 5차에서 6차로의 이행에서 상황으로부터 도입은 공통적이지만 전자는 등분제 상황으로, 후자는 포함제 상황으로 나눗셈을 도입한다는 차이도 주목할 만하다.

포함제와 등분제의 지도 순서와 관련해서는 교수요목, 4, 5차 교과서(특히 4, 5차 교과서는 등분제 상황에서 나눗셈을 정의)를 제외한 모든 교과서가 포함제를 먼저 다루고 있다. 이와 같이 포함제가 선호되는 이유는 미지수가 있는 곱셈식을 활용할 때 미지수의 위치가 승수인 포함제가 피승수인 등분제보다 쉽게 파악되기 때문이다. 곱셈식이 아니라 그에 대응하는 상황으로 생각해도 한 묶음의 수를 모르는 상태의 것을 몇 묶음 한다는 것은 파악하기 쉽지 않다.


과자가 12 개 있읍니다.
한 사람이 2개씩 가지면, 몇 사람에게 줄 수 있읍니까?
12 개를 4 사람이 똑같이 나누면, 한 사람이 몇 개씩 갖게 됩니까?
6 개를 2 개씩으로 나누면, 몇 사람이 갖게 됩니까?
6 개를 2 사람에게 나누어 주려면, 몇 개씩 주게 됩니까?
12 개를 3 사람에게 나누자면, 몇 개씩 주게 됩니까?
— 62 —

[그림 III-6] 나눗셈의 시각적 표현(문교부, 1961, p.62)

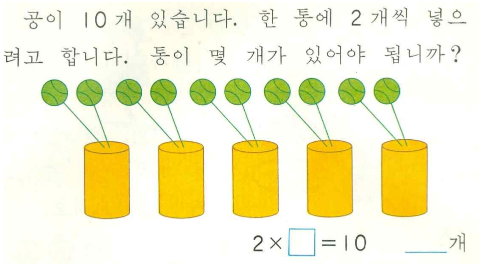
한편 동수누감의 측면에서 비교해보자. 동수누감은 나눗셈에 대한 비형식적 지식의 한 가지로 곧 포함제를 설명하는 접근 방법이다. 교수요목기와 제7차 교과서를 제외한 교과서에서는 동수누감과 관련한 내용을 볼 수 있다. 제1차 교과서에서는 '42에서 6을 몇 번 뺄 수 있읍니까?'와 같이 문제 속에서 비형식적으로 다루어지며 제2, 3, 4차 교과서에서는 '덧셈을 써서 곱을 알아 낼 수 있듯이, 뺄셈을 써서 몫을

<표 III-2> 교육과정별 비교

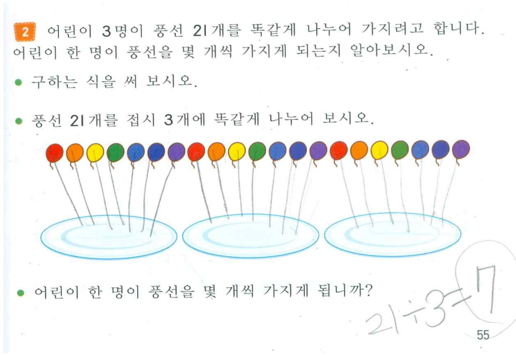
교육과정	비대칭적 상황의 취급	나눗셈의 도입	나눗셈 정의시 이용하는 상황	포함제와 등분제의 명시적 구별
교수요목	○	상황으로부터 '…를 …로 나누는 것'	등분제, 포함제	X
제1차	○	□가 있는 곱셈식 활용, '똑같이 …로 나누면 …가 된다는 것'	포함제, 등분제	X
제2차	○	□가 있는 곱셈식 활용	포함제, 등분제	X
제3차	○		포함제, 등분제	X
제4차	○		등분제	○
제5차	○	똑같이 나누는 상황 활용	등분제	○
제6차	X	동수누감 상황 및 식 활용	포함제	○
제7차	X	똑같이 나누는 상황 활용	포함제	○
2007년개정	X	상황 및 동수누감 활용	포함제, 등분제	○

알아 낼 수 있습니다.' 또는 '같은 개수를 덜어 내어 몫을 알아봅시다.' 라고 하여 몫을 구하는 별해로 다루어진다. 한편 동수누감이 나눗셈(포함제) 도입에 적극적으로 이용되는 것은 제5차 교과서부터이다. 제7차 교과서를 제외하고 공통적으로 포함제 상황을 동수누감식으로 나타낸 후 나눗셈 식으로 나타냄으로써 정의에 활용하는 적극적인 취급을 보인다.

마지막으로 표현 측면에서 교육과정에 따른 교과서의 변화를 고찰하면, [그림 III-6]에서 보듯이 제1차 교과서에서는 포함제와 등분제의 표현상 차이가 없는 반면 제4차 교과서([그림 III-4]) 이후에는 등분제에 배분할 곳으로 사람이나 접시가 표현되기 시작하고 포함제에도 사람이 있는 등 일관성이 유지되지 않는다. 더욱이 제5차 교과서에는 포함제를 다루면서도 묶음 그림을 동반하여 얼핏 등분제를 연상시키는 그림을 제시하였다([그림 III-7]). 2007년 개정교과서에서는 포함제와 구별하여 등분제의 경우 묶음(접시, 사람 등)을 함께 나타냈기 때문에 표현을 통해서 양자의 활동을 구별할 수 있고 그림을 이용한 분배활동을 돕는 역할을 한다. 그러나 3학년 학생의 활동 결과([그림 III-8])에서 볼 수 있듯이 일곱 빛깔의 무지개 색이 등분제를 포함제로 혼동시킬 가능성이 있으므로 시각적 표현의 활용시 세심한 주의가 요구된다.



[그림 III-7] 제5차 교과서의 포함제 그림(문교부, 1990, p.69)



[그림 III-8] 2007년 개정교과서의 등분제 그림(교육과학기술부, 2010a, p.55)

IV. 조사 내용 및 방법

1. 조사 대상

본 연구에서 다루는 수학 내용인 포함제와 등분제는 현행 2007년 개정교육과정에 따라

<표 IV-1> 조사 대상의 특성

학생	특성
S1	또래에 비해 어른스럽고 집중력 뛰어남. 수학적 이해 부족한 편임.
S2	도형 및 수와 연산 영역에서 재능을 보이나, 수학적 지식의 응용 능력은 부족함.
S3	활동 중심의 수업에서 다소 산만하여 모든 수학문제를 급하게 해결하려는 경향이 있음.
S4	활동적이며 노력하는 학생이나 학습 동기나 학습 흥미가 부족할 경우 문제를 해결하지 않으려는 경향이 있음. 타교과에 비해 수학에 관심 큼. 집중력 보통
S5	주어진 일에 최선을 다하고 문제를 해결하려는 의지가 강하지만 경우에 따라서는 소극적으로 변하는 경향이 있으며 고집이 셈. 집중력 우수함.

초등학교 3학년 1학기에 지도된다. 3학년 학생들의 나눗셈에 대한 이해를 파악하기 위해 경상남도 군 지역에 위치한 S초등학교 3학년 학생 5명을 조사 대상으로 하였다. 이들은 그 학교의 3학년 전체 학생에 해당하며, 도시의 학생들은 사교육의 기회가 많기 때문에 학교 교육에만 의존하는 학생들을 대상으로 하기 위한 선정이었다. 담임교사와의 면담에서 드러난 학생들의 특성은 <표 IV-1>과 같다.

담임교사는 지역의 교육대학교 졸업생으로 근무 1년차의 초임교사이다. 교육경력이 부족하기 때문에 교사용 지도서와 교과서에 제시된 대로 활동 및 지시 사항에 따라 수업을 실시하고 있다고 하였다. 한편 예비교사에 대한 인식 조사는 C교대 2학년 학생 36명을 대상으로 하였다. 이들은 수학 심화과정에 속하여 수학에 대한 관심이 비교적 높은 편이며 해당 학기에 '수와 연산 교재연구'를 수강하고 있는 중이었기 때문에 등분제와 포함제에 대한 의미를 학습한 학생들이다.

2. 조사 내용 및 방법

<표 IV-2> 질문지의 내용 및 문항 수

회	내용 요소	문항수
1	• 문장제를 식으로 나타내기 • 문장제의 상황을 그림으로 나타내어 풀기	6
2	• 나눗셈 상황의 몫의 의미 구별하기(보기 이용)	6
3	• 나눗셈 상황의 몫의 의미 구별하기(스스로 진술, 이유, 그림을 통한 확인)	2
4	• 나눗셈식에 대한 상황 만들기 - 포함제 상황, 등분제 상황, 자유롭게 선택하여 만들기	7

본 연구는 학생들의 나눗셈 이해 상황을 파악하기 위해 연구자가 작성한 문제지를 통한 조사방법을 이용하였다. 질문지는 총 4회분으로 구성하였으며 각각의 내용 요소와 문항 수는 <표 IV-2>와 같다.

1회차 질문지에 포함된 6문항 중 1, 4, 5번은 등분제 상황을, 2, 3, 6번은 포함제 상황을 구현한 문장제이다. 이 문제에 대한 응답을 통해 나눗셈 상황의 파악 여부 및 몫을 구하기 위한 그림 활용 능력을 평가할 수 있었다. 2회차에서는 1회차와 동일한 문장제를 제시하고 '○번 묶어 덜어낼 수 있다는 횟수'와 '똑같게 나누면 한 곳에 ○개씩이라는 개수'를 표현한 문장을 보기로 주어 고르도록 하였다. 교과서에 그대로 제시된 표현이지만 학생들이 그것을 그대로 외워서 표현하는 것은 무리일 것으로 판단하여 보기를 이용한 선택형 문제로 처리하였다. 1회차의 그림 전략과 독립적으로 문장으로부터 상황의 차이를 구별하여 적절한 의미를 찾아낼 수 있는지 알아보기 위한 질문이다. 3회차에서는 나눗셈식에서 몫의 의미를 포함제와 등분제에 따라 진술하게 하고 그 이유를 쓰고 그림을 그려 정당화할 것을 요구하였다. 물론 교과서 내용대로 포함제는 '똑같이 묶어 덜어내는 나눗셈'으로, 등분제는 '똑같게 나누는 나눗셈'으로 표현하였다. 2회차의 질문이 보기의 두 경우 중 선택하는 유형이므로 거짓 이해의 가능성이 있어 3회차에서는 스스로 설명해 보도록 하고 그림 표현을 통해 이해 정도를 평가하고자 하였다. 교과서와 마찬가지로 포함제에서는 사물 그림만, 등분제에서는 사물과 묶임(구체적으로 접시)을 모두 제시하여 파악 및 활동이 쉽도록 하였다. 4회차는 주어진 나눗셈식에 대응하는 상황을 문장으로 표현하는 문제로, 포함제와 등분제 각각 한 문제와 나머지 다섯 문제에 대해서는 자유롭게 상황을 설정하

도록 하여 학생의 선호도를 확인할 수 있었다.

문제지는 나눗셈 단원을 마친 6월 말에 학생들에게 배부되었다. 매일 일정한 시간을 이용하여 하루에 한 회분씩 4일간 문제를 풀었고 회수된 문제지는 연구자에 의해 검토, 분석되었다.

한편 예비초등교사의 나눗셈 상황에 대한 인식을 조사하기 위해 질문지를 작성하였다. 질문지는 제시된 A, B 두 유형의 나눗셈 상황에 대해 두 유형을 분류한 기준이 무엇인지 설명하고 두 유형 각각에 적합한 나눗셈 문장제를 하나씩 만드는 세 문항으로 이루어진다.

조사 대상인 3학년 학생들의 담임교사인 J교사와는 전화와 이메일을 통한 면담을 실시하였다.

V. 결과 분석

본 장에서는 조사 대상에게 적용된 질문지의 반응 결과에 기초하여 몇 가지 관점에서 학생들의 이해 정도를 분석하고, 예비초등교사 및 담임교사의 나눗셈 인식에 대한 조사 결과 및 시사점을 제시한다.

1. 초등학교 3학년 학생들의 나눗셈 상황에 대한 이해

가. 나눗셈 상황의 파악 여부

S1, S2, S5는 주어진 상황을 나눗셈식으로 표현하여 몫까지 옳게 구하였지만, S3와 S4는 주어진 상황을 나눗셈 상황으로 인식하는 데 부분적인 오류를 보였다. S3는 6문제 중 4개를 곱셈식으로 표현하였지만 그림으로는 나눗셈 상황을 나타냈다. 반면 S4는 나눗셈식을 쓸 수는 있었지만 2문제를 곱셈으로 풀어 문제 상황에 맞지 않는 오답을 얻었다. 5명 중 2명의 학생은 연산의 의미와 식, 포괄적으로는 개념적 지식과 절차적 지식이 적절히 연결되어있지 못함을 보여준다.

나. 그림을 이용한 풀이

주어진 상황을 식으로 표현하는 것과 그림을 그려 직관적으로 푸는 것은 별개의 과정으로 간주되므로 형식적인 식으로의 표현 및 그 풀이에서 부분적인 오류가 있더라도 그림을 그려 풀 수 있는지, 그리고 주어진 두 종류의 상황에 대한 그림 표현에 어떠한 차이가 있는지를 1회차에서 확인해보았다. S1은 문장에 등장하는 소재들을 그림으로 나타냈을 뿐 묶어세기나 분배 등의 어떤 표시도 없었으므로 그림이 문제 해결에 어떻게 이용되었는지 파악되지 않았다. S2는 모든 상황을 묶어세기(포함제)로 나타내었고, S5는 포함제 상황인 2번 하나만 등분제로 잘 못 그리고 나머지는 모두 묶어세기로 나타내었다. 이 결과는 나눗셈 상황을 파악한 학생들도 나눗셈의 두 의미에 따른 그림 표현을 적절히 활용하지 못한다는 사실을 말해준다. 오히려 S3는 포함제 전부와 등분제인 1, 4번도 적절하게 나타내었고, S4는 포함제와 등분제 중 각각 2개씩을 적절하게 나타내어 나눗셈 상황에 대한 이해와 그림 표현의 활용 사이에 어떠한 관계도 도출할 수 없었다.

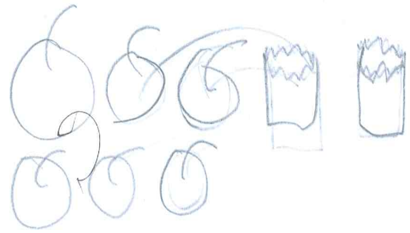
다. 포함제와 등분제의 구분

학생들이 포함제와 등분제의 상황을 잘 이해하고 있는지 파악하기 위하여 그림 표현 및 몫의 의미 이해에 대해 조사하였다. 학생들이 학습한 교과서에 따르면 포함제는 대상만 그려서 묶음을 표시하고 등분제는 나누어지는 곳으로 봉지나 접시 등을 그려서 한 개씩 분배되는 것을 표시할 것으로 기대되었다. 그러나 전술했

듯이 1회차 문제지의 응답 결과는 그림 표현을 통한 나눗셈 상황의 구별에 대해 부정적인 답을 준다. S1은 모든 상황에 대해 묶음인 사람, 접시, 봉지 등을 그려서 등분제 상황으로 간주될만한 그림([그림 V-1])을 그린 반면3) 나머지 학생들은 나누어지는 곳을 표현하지 않고 포함제 방식을 선호하는 경향이 있었고, 등분제의 일부를 옳게 표현한 S3와 S4도 제1차 교과서([그림 III-6])처럼 묶어세기와 동일한 방식으로 표현하였다. 이는 Reys et al.(1999)의 '등분제는 그림으로 보여주기에 매우 어렵다'는 주장을 뒷받침한다.

2회차 문제지는 몫의 의미에 따른 차이를 구별할 수 있는가 하는 것이다. S1과 S5는 모두 맞혔으나 나머지 학생은 6문항 중 차례대로 2, 2, 1개씩 오답을 하여, 몫의 의미를 보기로 제시해 주었음에도 불구하고 그 의미를 상황 속에서 뚜렷하게 구별하지 못하는 것으로 드러났다.

2회차에서 거짓 성공의 가능성 때문에 3회차에서는 교과서의 진술을 아동이 잘 이해하고 있는지, 스스로 교과서의 방식대로 진술이 가능한지 알아보고자 하였다. 따라서 상황 없이 주어진 똑같이 묶어 덜어내는 나눗셈식과 똑같게 나누는 나눗셈식에서 몫의 의미를 묻고



[그림 V-1] S1의 포함제 그림

그 이유와 그림을 통한 정당화를 요구하였다. 학생들의 응답은 <표 V-1>과 같다.

S1은 이유에서 알 수 있듯이 진술의 용어 힌트인 '덜어내는'과 '나누는'을 각각 횟수와 개수에 짝지어 기억하는 전략을 지닌 것으로 해석된다. 답하지 못한 S3를 제외한 그 외의 학생들은 몫의 의미를 포함제 상황으로 설명하는 경향을 보여준다. 따라서 그림 표현에서도 등분제의 원래 의미인 하나씩 분배하는 것이 아니라 4개를 한 묶음으로 묶어 접시 하나마다 대응시키는 일관된 반응을 보였다. 차후 교사와의 면담에서 확인한 대로 수업에서 하나씩 분배하는 활동을 했음에도 불구하고 학생들은 스스로 그 활동을 재현하지 못하였다.

4회차 문제지에는 두 가지 유형의 문제가 포함되었다. 하나는 제시된 두 개의 나눗셈식에 대해 각각 똑같이 묶어 덜어내는 상황의 문장과 똑같게 나누는 상황의 문장을 쓰도록 한 것

<표 V-1> 3회차 문제지의 학생 반응

학생	포함제	등분제	이유
S1	횟수	개수	'횟수는 덜어내는 거니까', '개수는 나누는 거니까'
S2	12에서 3을 4번 덜어내면 0이 된다는 횟수	횟수	양쪽 모두 동수누감으로 설명함
S3	어렵다고 답함	어렵다고 답함	
S4	4번 덜어낸다	3개씩 4번 덜어낸다	'나눗셈은 덜어내야 되니까'
S5	12개를 3개씩 4번 덜어내는 것	12를 3씩 4번 나누는 것	'12÷3이 4니까'

3) 그러나 등분제 문제에서도 대상을 한 개씩 분배하는 상황은 표현하지 못하는 한계가 있었다.

이다. 이 문제에 옳게 답한 아동은 S5 한 명 뿐이었다. S4는 두 상황을 바꾸어 답하였고 S2와 S3는 모두 등분제 상황을 답하였다. 한편 S1은 '앵두 18개를 6개씩 3개씩 덜어내려고 하는 횟수'와 같이 3회차에서 보인 횟수와 개수라는 용어에 대한 강한 집착을 보였다.

또 다른 유형은 다섯 개의 나눗셈식을 제시하고 자유롭게 문장제를 만들도록 한 것이다. 상황의 친숙도를 파악하기 위한 이 문제에서 S1은 뺄셈 상황을 제시하여 1회차 결과와 달리 연산의 의미에 대한 이해가 부족함을 드러내었고, S2와 S4는 모두 등분제 상황을, S3와 S5는 포함제와 등분제 상황의 비가 2:3이었다. 학생들에게 대체로 포함제보다는 등분제가 더 친숙한 상황이라는 사실을 재확인할 수 있었다.

결과적으로 본 연구의 조사 대상은 그림 표현이나 몫의 의미와 관련하여 포함제와 등분제를 구별하는 데 어려움을 드러내었고, 주어진 상황을 나눗셈 상황으로 인식하거나 역으로 나눗셈식으로부터 나눗셈 상황을 만드는 데 오류를 보인 경우도 있었다.

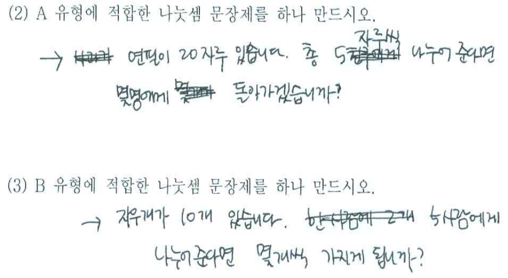
2. 교사의 나눗셈 상황에 대한 인식

가. 예비초등교사의 인식

C교대 2학년인 예비초등교사 36명의 질문지 응답을 분석한 결과, 두 유형의 분류 기준에 대해서는 주로 포함제와 등분제 용어를 직접 사용하거나 동수누감과 분배 등으로 설명하였으나 적절히 설명하지 못한 경우도 5명 있었다. 예를 들어 'A는 묶는 기준을 정해주고 몇 묶음이 나왔는가, B는 묶음의 개수를 정해주고 몇 묶음 나왔는가' 라고 몫이 둘 다 묶음의 수인 부적절한 표현을 하거나 'A는 $x \div \square = y$ 포함제, B는 $x \div y = \square$ 등분제' 라고 하여 곱셈식의 비대칭적 상황을 잘못 적용한 경우도 있었다.

그러나 분류 기준을 잘못 설명한 학생들도 각 유형에 대한 문장제는 적절하게 만들었다. 이와 별개로 분류 기준은 말하였지만 만든 문장제가 적절하지 않은 학생은 3명이었다. 한 명은 모두 포함제로 만들었고, 다른 한 명은 '어른 30명이 2줄로 선다면 총 몇 줄인지 말하여라'라고 하여 문제의 의미가 적절하지 않으며 나머지 한 명은 '28일은 4주이다. 한 주는 몇일인가?'를 포함제로, '1주를 7일이라 할 때 28일은 몇 주인가?'를 등분제로 하여 두 가지를 바꾸어 제시하였다. 초등 수학의 전형적 소재가 아닌 이 경우에 학생이 혼동을 일으키는 등 적절한 상황을 제시하지 못한 이유는 포함제와 등분제에 대한 명확한 이해가 부족한 데 있는 것으로 볼 수 있다.

이러한 현상은 한 학생의 답지에서도 확인된다([그림 V-2]). 처음 작성한 것을 수정하였듯이 나눗셈의 두 가지 의미는 혼동을 야기시키기에 충분한 요소가 있는 것이다.


(2) A 유형에 적합한 나눗셈 문장제를 하나 만드시오.
→ 연필이 20자루 있습니다. 총 5 자루씩 나누어 준다면 몇명에게 돌아가겠습니까?
(3) B 유형에 적합한 나눗셈 문장제를 하나 만드시오.
→ 지우개가 10개 있습니다. 5사람에게 나누어 준다면 몇개씩 가지게 됩니까?

[그림 V-2] 한 예비교사의 나눗셈 문장제

이와 같이 두 가지 상황 자체도 혼동되기 쉽지만 그것을 언어로써 명시적으로 설명한다는 것은 예비초등교사에게도 쉬운 과제가 아님을 보여준다.

나. 교사의 인식

J교사와의 면담은 전화와 메일을 통해 이루

어졌고 내용은 주로 나눗셈 지도시 등분제와 포함제 상황에 대한 교사의 준비도, 학생들의 이해도 및 지도상의 어려움에 대한 것이었다. 우선 J교사는 교대에서 포함제와 등분제를 학습한 적이 있지만 정확한 구별법이나 개념이 정립되어 있지 않았다고 했고, 학생이 작성한 답안에 대한 교사의 피드백을 고려했을 때 해당 내용에 대한 이해가 완전하지 않은 것으로 파악된다. 한편 교과서의 내용 구성에 대해서는 추상적, 형식적 접근으로 인해 수준이 높고 학생들에게 부담이 되므로, 2007년 개정교육과정의 난이도 조정 및 학업 부담 감소의 취지와 맞지 않는 것으로 생각하고 있었다. 특히 수업 설계를 하면서 교사가 경험한 어려움을 다음과 같이 설명하였다.

> 저 또한 나눗셈의 묶기와 덜어내기, 정확하게 나누기에 대한 개념이 없었으므로 어떻게 쉽게 설명해야 하는지 많이 답답했습니다. 더군다나 참신한 활동을 만드는 것은 거의 불가능에 가까웠습니다. (학생들은) 선생님이 말하는 것과 교과서에 있는 내용만 인식하고, 그 설명이 어떤 개념을 설명하는 것인지 구분하는 것조차 힘들어 했습니다. 시각적으로 보이는 활동만 해결할 뿐, 머릿속으로 구성하여 포함제와 등분제를 분류하는 것은 하지 못했습니다.

이후 단원평가에서 학생들의 결과는 평균 60점 정도였고, 수업시간의 문제는 따라서 잘 하더라도 문제의 유형을 조금만 바꾸면 어려워하고, 나눗셈과 관련된 의미나 상황에 대한 이해가 부족하고, 구체적인 사례 중에서 구별하는 것 역시 잘 하지 못한 것으로 드러났다.

J교사는 교수경험이 부족한 신임교사이지만 지도 열의를 고려할 때 그가 경험한 수업 준비 과정, 지도상의 어려움, 교사가 관찰한 학생 반응 등은 나눗셈 지도 내용에 대해 시사하는 바가 있다.

V. 결론

연산의 학습 과정에서 절차적 지식과 개념적 지식의 연계는 매우 중요하기 때문에 나눗셈도 나머지 연산들과 마찬가지로 다양한 상황 속에서 개념적으로 의미를 파악하고 그것을 형식화하는 수단으로 나눗셈식을 도입하는 것이 바람직하다. 그러한 상황으로 포함제와 등분제뿐만 아니라 Carpenter et al.(2005) 등에서 제시되듯이 비율, 가격, 승법적 비교, 넓이, 배열, 조합 등의 다양한 상황을 활용하는 것은 교수학적으로 이점이 크다.

특히 본고의 관심 주제인 포함제와 등분제에 대해서도 그것을 구현하는 다양한 상황을 다루는 것은 의미 있는 학습 활동이다. 앞서 설명하였듯이 서로 구별되는 양쪽 상황에서 주어진 것과 구해야 할 것의 의미가 다르기 때문에 각각의 의미와 나눗셈에서의 역할을 잘 파악하는 것이 문제를 해결하는 데 중요하므로 학생들은 두 가지 상황을 경험하고 그 의미를 파악할 필요가 있는 것이다.

다만 본 연구에서 고찰한 역대 교육과정 및 교과서의 비교 분석, 초등학교 3학년 학생의 이해, 예비초등교사 및 교사의 이해 조사 결과에 기초할 때 현행 교과서에서 취한 방식인 의미에 따른 나눗셈의 개별적 정의나 몫의 의미에 대한 언어적인 진술 등에 대해서는 재고의 여지가 있음을 확인할 수 있었다.

나아가 나눗셈 지도와 관련하여 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 나눗셈 학습 전에 상황으로부터 직관적으로 몫을 구해보는 다양한 활동을 포함한다. 여기에는 포함제와 등분제 이외의 다양한 모델을 활용할 수 있다. 1차, 4차, 6차, 2007년 개정교과서(생각열기)에서처럼 상황으로부터 직관적으로, 또는 그림을 통해 몫을 구해보는 활

동은 나눗셈의 의미를 풍부하게 형성하는 데 도움이 된다. 특히 아동에게 더 친숙한 상황은 본고에서도 확인되었듯이 포함제가 아니라 등분제인데 대응하는 곱셈식에서 미지수가 앞서 위치한다든지 그림으로의 표현이 어렵다는 등의 형식화 과정에서의 특성 때문에 등분제를 어렵게 느끼는 경향이 파생된다. 이에 대해 Reys et al.(1999)의 '등분제는 그림으로 보여주기에는 매우 어렵지만 학생들이 실제로 해 보기에는 비교적 쉽다'는 말에 따라 주어진 등분제 상황에서 그림이나 식이 아닌 실제로 해보기 전략을 활용하는 것은 나눗셈의 의미 파악에 기초가 될 것이다. 몫을 제대로 구할 수 있었지만 나눗셈식을 표현하지 못한 S3과 나눗셈식을 잘 표현했지만 몫을 구하지 못한 S4의 대조적인 사례는 나눗셈에 있어서도 개념적 지식과 절차적 지식의 연계를 강조하도록 한다.

둘째, 비형식적 지식을 활용한다. 모든 수학적 지식의 학습에서 학교수업을 통한 형식적 지식의 학습 이전에 학습자가 일상 경험을 통해 지니고 있는 비형식적 지식을 파악하는 것은 매우 중요하다. 비형식적 지식에 기초하여 형식적 지식을 연계하는 것은 바람직한 교수법이기 때문이다. 앞서 말한 직관적으로 몫을 구하는 다양한 활동시 형식적인 지식으로서 교사가 제시한 그림 활용 방법 등에 의존하지 않고서도 II장에서 고찰한 여러 가지 비형식적인 지식을 이용할 것으로 기대된다. 더욱이 등분제의 모델로 한 개씩 배분이 아니라 적절한 몇 개씩 어림하여 배분하고 조절하는 전략은 더 높은 수준의 전략으로 간주된다. 제7차 교과서에서 한 개의 접시에 빵이 몇 개씩 담기는지 알아보는 등분제 상황에서 '빵을 접시마다 한 개씩 차례대로 담으시오. 남은 빵을 접시 하나에 한 개씩 더 담으시오.' 등으로 배분의 단계를 규정짓는 것에 대한 재고의 여지를 남긴다.

나눗셈 학습을 위한 비형식적 지식으로 동수누감이 포함된다. 동수누감은 포함제 문제를 해결하기 위해 이용되는 비형식적 지식이므로 이를 이용하여 나눗셈에 접근하는 것은 바람직하다. 제5차 교과서 이후에 나타난 바와 같이 동수누감을 이용해 포함제 상황을 이해하는 것은 학생들에게 어렵지 않은 것으로 간주된다.

셋째, 용어 선택에 신중할 필요가 있다. 나눗셈은 포함제이든 등분제이든 모두 똑같게 나누는 셈이다. 제5차 교과서에서 '똑같이 나누어 봅시다' 차시에서 등분제뿐만 아니라 포함제도 함께 다루었던 것과 제7차 교과서에서 포함제와 등분제를 구별하여 다루면서 '똑같게 나누어 봅시다(1)과 (2)'로 표현했던 것을 고려하면 2007년 개정교과서에서 포함제와 구별하여 등분제를 '똑같게 나누는 나눗셈'이라고 지칭하는 것은 혼란을 야기시킬 소지가 있다.

넷째, 나눗셈의 의미에 따라 적절한 표현을 이용한다. Vergnaud(1990)의 개념적 장 이론에 따르면 어떤 개념을 구성하는 세 가지 요소로 상황, 시니피에, 시니피앙을 들 수 있고, 이를 통해 개념 이해를 위해서는 그것이 구현되는 상황뿐만 아니라 도구로서의 표현의 중요함을 알 수 있다. 실제로 아동은 형식적 지식을 다루지 않은 상태에서 나눗셈 문제를 다루면서 대부분의 경우에 시각적 표현을 이용하여 문제를 다룰 수 있었다(이종욱, 2007). 그러나 본 조사결과에 따르면 학생들은 나눗셈의 의미와 그림 표현간의 관계를 파악하지 못하는 것으로 나타나, 역대 교과서를 거치면서 변화되어 온 시각적 표현 중 어느 것이 학생들의 의미 파악에 효과적인지에 대한 검토가 요구된다. 본 연구의 조사대상이 산출한 그림 표현을 1차 교과서([그림 III-6]), 4차 교과서([그림 III-4]), 5차 교과서([그림 III-7])와 관련하여 분석했을 때 2007년 개정교과서의 방식은 긍정적인 것으로

고려된다. 다시 말해 시각적 표현을 통해 포함제와 등분제의 상황을 구별하여 등분제의 경우에 한해 묶음(나누어지는 곳)을 제시하는 것은 학생들이 나눗셈의 구별되는 의미를 이해하는데 도움이 될 것으로 기대된다.

요컨대 나눗셈을 도입하면서 가장 중요한 것은 포함제와 등분제의 상황을 해결하기 위해 나눗셈이 필요하다는 것을 인식시키는 것이다. 구차(전체-부분), 구잔(이동), 비교 등의 여러 가지 상황을 뺄셈식으로 표현할 수 있다는 것을 아는 것처럼 포함제와 등분제 및 그 밖의 넓이, 배열 등의 다양한 상황을 경험하면서 그것이 나눗셈을 이용하여 해결되는 상황임을 파악하는 것이 최소의 성취수준이다. 본 연구의 결과에 기초할 때 그 이상으로 초등학교 3학년에 적합한 이해 정도를 정하는 것은 좀 더 심층적인 논의가 요구된다. 초등예비교사들도 어려워하는 나눗셈 의미의 차이를 명시적으로 구별하고, 그것을 언어적으로 진술할 수 있는 능력을 요구하는 것에 수학교육적으로 어느 정도의 가치를 부여해야 할 것인지를 재고할 필요가 있다.

참고문헌

교육과학기술부(2010a). **수학 3-1**. 서울: 두산동아(주)

______________(2010b). **수학익힘책 3-1**. 서울: 두산동아(주)

______________(2010c). **초등학교 교사용지도서 수학 3-1**. 서울: 두산동아(주)

교육부(2000). **수학과 교육과정 기준(1946-1997)**. 서울: 선명인쇄주

교육인적자원부(2001). **수학 3-가**. 서울: 대한교과서주식회사

______________(2007). **수학과교육과정**. 서울: 대한교과서주식회사

김민경(2003). 나눗셈 개념에 대한 초등예비교사의 이해도 분석. 대한수학교육학회지 **학교수학** 5(2). 223-240

문교부(1949a). **초등 셈본 2-2**. 서울: 조선서적인쇄주식회사

______(1949b). **초등 셈본 3-1**. 서울: 조선서적인쇄주식회사

______(1961). **산수 2-2**.

______(1962). **산수 3-2**

______(1972). **산수 3-1**. 서울: 국정교과서주식회사

______(1975). **산수 2-2**. 서울: 국정교과서주식회사

______(1982). **산수 2-2**. 서울: 국정교과서주식회사

______(1990). **산수 2-2**. 서울: 국정교과서주식회사

이종욱(2007). 한 초등학교 2학년 아동의 곱셈과 나눗셈 해결 전략에 관한 사례 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A. **수학교육**. 46(2). 155-171

______(2008). 자연수 나눗셈에 관한 비형식적 지식과 형식적 지식의 연결 방안. 한국수학교육학회지 시리즈 A. **수학교육**. 47(1). 91-106

Baroody, A.J., Coslick, R.T.(2006). **수학의 힘을 길러주자 왜? 어떻게?**. (권성룡 외 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1998년 출판)

Brousseau, G.(1998). *Theorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensee sauvage

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L., Empson, S.B.(2005). **어떻게 수학을 배우지?**. (김수환, 박영희, 백선수, 이경화, 한대희 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1999년 출판)

Neuman, D.(1999). Early learning and awareness of division: a phenomenographic approach.

Educational Studies in Mathematics 40(2): 101-128

Reys, R.E., Suydam, M.N., Lindquist, M.M., Smith, N.L.(1999). **초등 수학 학습지도의 이해**. (강문봉 외 역). 서울: 양서원. (영어 원작은 1998년 출판)

Vergnaud, G.(1983). Multiplicative structures. In Lesh, R. & Landau, M.(ed.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Precesses*(pp.127-174). New York: Academic press

____________(1990). La theorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathematicques*. vol.10(2,3). 133-170

Investigation on Awareness of Meanings of Division
: Quotitive Division and Partitive Division

Chang, Hye Won(Chinju National University of Education)

This study aims to investigate understanding of meanings of division, quotitive division and partitive division, by the third graders and preservice elementary teachers. To do this, we analysed and compared mathematics textbooks according to 9 mathematics curricula, gathered information about their understanding by questionnaire method targeting 5 third graders and 36 preservice elementary teachers, and analysed their responses in relation to recognition of division-based situations, solution using visual representations, and awareness of quotitive division and partitive division. In Korea, meanings of division have been taught in grade 2 or 3 in various ways according to curricula. In particular, the mathematics textbook of present curriculum shows a couple of radical changes in relation to introduction of division. We raised the necessity of reexamination of these changes, based on our results from questionnaire analysis that show lack of understanding about two meanings of division by the preservice elementary teachers as well as the third graders. And we also induced several didactical implications for teaching meanings of division.

* key words : quotitive division(포함제), partitive division(등분제), meanings of division(나눗셈의 의미), curriculum(교육과정), representation(표현)

논문접수 : 2010. 11. 4
논문수정 : 2010. 11. 25
심사완료 : 2010. 12. 10