대한수학교육학회지 <학교수학> 제 12 권 제 4 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.12, No.4 619-638. Dec. 2010

수학적 추론과 연결성의 교수·학습을 위한 소재 연구
- 도형수, 파스칼 삼각형, 피보나치 수열을 중심으로 -[1]

손 홍 찬*

본 고에서는 평면이나 공간에서 정의된 도형수가 일반적으로 유한 차원에서 일반화될 때 저차원의 도형수인 그노몬수, 다각수 그리고 다각뿔수의 성질을 통합적으로 설명할 수 있음을 논하고, 도형수와 파스칼 삼각형, 피보나치 수열의 성질과 그들 사이의 관계를 알아봄으로써 이들에 대한 성질 탐구가 수학적 추론과 연결성을 지도하기 적합한 소재가 될 수 있음을 논한다.

I. 서론

수학은 개연적 추론에 의해 발견되고 연역적 추론에 의해 체계화되고 확립되어간다. 관찰된 특수 사례의 공통 성질에 주목하여 그러한 사례 전체에 대해서 성립하리라고 예상되는 법칙을 추측하는 귀납적 추론과, 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대해 성립하는 성질로부터 그와 유사한 대상의 성질을 추측하는 유추는 대표적인 개연적 추론으로 수학적 지식의 확장을 돕는다. 또한 추측된 수학적 사실의 가정과 결론 사이의 타당성을 확보하여 수학적 지식으로서의 권위를 부여하는 연역적 추론은 지식의 체계화를 가능하게 한다(우정호, 2002). 따라서 수학에서의 추론은 수학적 활동에서 중추적인 역할을 한다. National Council of Teachers of Mathematics(2000)(이하 NCTM)은 연결성을 과정 규준의 하나로 제시하면서, 수학적으로 사고한다는 것의 의미에 연결성을 찾고 연결성을 구축하는 것을 포함시키고 있다. 연결성을 이해함으로써 수학적 개념이나 성질이 서로 어떻게 연결되어 있는지 이해하고, 각각의 아이디어에 기초하여 전체를 일관되고 통합적으로 바라볼 수 있다. 따라서 수학적 추론 활동을 활발히 할 수 있도록 하고 수학적 개념 및 성질 사이의 연결성을 드러내줄 수 있는 소재를 연구하는 것은 의미 있다고 하겠다.

도형수란 도형에 대응시킨 수로 삼각형, 사각형 등에 대응시킨 삼각수, 사각수 등이 있고 삼각뿔, 사각뿔 등에 대응시킨 삼각뿔수, 사각뿔수와 같은 도형수가 있다. 이 외에도 여러 가지 다양한 도형에 수를 대응시킨 도형수들이 있는데, 이 도형수들은 도형의 형상과 관련되어 있어 형상수라고도 한다. 도형수에 대한 연구는 기원전부터 현재에 이르기까지 오랜 동안 지속되어 왔는데 피타고라스 학파는 사각수를 이용하여 $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$, 또는 $1+2+3+\cdots+(2n-1)=n^2$이 됨을 알고 있었으며, 가로와 세로가 각각 n과 $n+1$인 사각형을 두 개의 삼각형으로 분리하고, 삼각수를 이용하여 $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$이 됨을 또한 알고 있었다

* 전북대학교 수학교육과 (hcson@jbnu.ac.kr)
1) 이 논문은 2009년도 전북대학교 연구기반 조성비 지원에 의하여 연구되었음

(Anglin, 1994). 도형수에 대한 연구는 단순히 홍미를 위한 것뿐만이 아니라 정수론 연구의 중심적인 부분을 차지하였는데, 가우스는 양의 정수와 삼각수의 관계를 탐구했고 오일러도 삼각수들 사이의 관계를 탐구했으며 근래에도 이와 같은 연구가 이루어지고 있다(Anglin, 1994; Trotter, 1973).

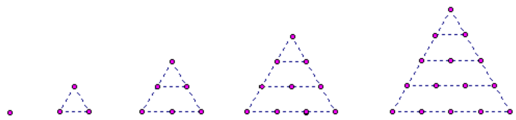
이 논문에서는 삼각수, 사각수, 삼각뿔수, 사각뿔수, 그노몬수, 그리고 일반적으로 유한 k차원에서의 r각뿔수의 성질에 대해 살펴보고, 도형수, 파스칼 삼각형과 피보나치 수열 등의 연관성에 대해 알아본다. 그리고 유한 k차원에서의 r각뿔수 $f^k_{r,n}$를 정의하고 이를 구하게 되면 그노몬수와 삼각수, 삼각뿔수 등은 k가 각각 $0, 1, 2$일 때에 해당되는 저차원에서의 각뿔수임을 알 수 있어서, 차원 k를 일반화해서 그노몬수와 삼각수, 삼각뿔수에 대한 성질을 통합적으로 설명할 수 있음을 논하고, 삼각수들 사이의 관계, 삼각수와 사각수의 관계, 도형수와 파스칼 삼각형, 피보나치 수열과의 관계 등을 살핌으로써 이들 소재가 수학적 추론과 연결성을 지도하는데 적절한 소재가 될 수 있음을 논하고자 한다.

II. 다각수와 각뿔수

여기에서는 다각수로 삼각수, 사각수, 일반적으로 r각형에 대응시켜 얻어지는 r각수를 정의하고 이들 수에 관한 성질과 그들 사이의 관련성을 탐구한다. 또한 삼차원 공간에서 r각뿔수를 정의하고 그들 사이의 관련성을 탐구한다. r각수들 또는 r각뿔수들 사이의 관련성은 유한 k차원 r각뿔수를 얻는데 필요한 성질을 중심으로 다룬다.

1. 다각수와 각뿔수

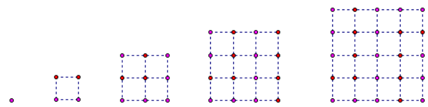
아래의 그림과 같이 점의 수를 늘려가면서 정삼각형 모양의 배열을 계속해서 만들어 나갈 때, 각각의 정삼각형 모양의 배열을 만드는 점의 수를 삼각수라고 한다. 삼각수는 차례대로 $1, 3, 6, 10, \cdots$과 같이 증가함을 알 수 있다.



[그림 Ⅱ-1] 삼각수

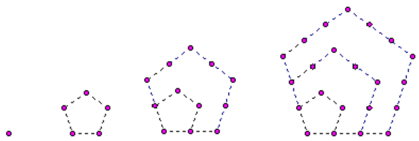
이 삼각수로 이루어진 수열의 제n번째 항은 $\frac{n(n+1)}{2}$임을 알 수 있다. 제n번째 삼각수를 $f^2_{3,n}$으로 표기하자. 윗 첨자에 '2'를 붙인 것은 나중에 3차원 또는 유한차원에서 삼각수의 일반화로 볼 수 있는 각뿔수를 표기할 때 통일성을 부여하고 혼돈을 피하기 위해서이다.

또 다음과 같이 점의 수를 늘려가며 정사각형 모양의 배열을 만들어나갈 때, 정사각형 모양의 배열을 이루는 점의 수를 사각수라고 한다. 사각수는 차례대로 $1, 4, 9, 16, \cdots$와 같음을 알 수 있다.



[그림 Ⅱ-2] 사각수

다음과 같이 점의 수를 늘려가며 정오각형 모양의 배열을 만들어나갈 때, 정오각형 모양의 배열을 이루는 점의 수를 오각수라고 한다. 오각수는 차례대로 $1, 5, 12, 22, \cdots$와 같음을 알 수 있다.



[그림 Ⅱ-3] 오각수

이와 같은 방식으로 정r각형을 이용하여 r각수를 얻을 수 있다. 이 때 꼭 정r각형일 필요는 없음을 알 수 있다. 앞서의 표기대로 하면 제n번째 r각수는 $f^2_{r,n}$과 같이 나타낼 수 있다.

사각수를 나열하면 [그림 Ⅱ-2]로부터, $1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, \cdots$ 즉, $1, 4, 9, 16, \cdots$과 같으므로 $f^2_{4,n}=n^2$임을 알 수 있다. 이것은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열의 합을 나타내는 공식을 이용하여도 같은 결과를 얻는다. 오각수의 일반항을 구해보자. 제$n-1$번째 오각수 $f^2_{5,n-1}$에서 제n번째 오각수 $f^2_{5,n}$가 되기 위해 필요한 점을 살펴보면, 꼭짓점 3개와 변 2개를 공유하고 있고, 나머지 변이 3개이고, 각 변의 점의 수가 n개라는 것으로부터, 점들의 중복을 피하여 계산하면 $3n-2$임을 알 수 있다. 따라서 관계식

$f^2_{5,n}=f^2_{5,n-1}+3n-2$ (단, $n \geq 2$)

을 얻는다.

각각의 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$
\begin{aligned}
f^2_{5,n} &= f^2_{5,n-1}+3n-2 \\
f^2_{5,n-1} &= f^2_{5,n-2}+3n-5 \\
&\cdots\cdots \\
f^2_{5,3} &= f^2_{5,2}+7 \\
f^2_{5,2} &= f^2_{5,1}+4
\end{aligned}
$$

위 식들을 변끼리 더하면

$$
\begin{aligned}
f^2_{5,n} &= f^2_{5,1}+4+7+\cdots+(3n-2) \\
&= 1+4+7+\cdots+(3n-2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(3i-2) = 3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2n=\frac{n(3n-1)}{2}
\end{aligned}
$$

따라서

$$f^2_{5,n}=\frac{n(3n-1)}{2}$$

이다. 마찬가지 방법으로 $f^2_{6,n}=n(2n-1)$임을 알 수 있다. 이것을 정리하면 다음과 같다.

(1) $f^2_{3,n}=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (Ⅱ-1)

(2) $f^2_{4,n}=n^2$

(3) $f^2_{5,n}=\dfrac{n(3n-1)}{2}$

(4) $f^2_{6,n}=n(2n-1)$

임의의 다각형 r각형으로부터 얻어지는 제n번째 다각수 $f^2_{r,n}$는 어떻게 나타나는지 살펴보자. 앞에서 주어진 방식대로 $f^2_{r,n}$을 얻는데 $f^2_{r,n-1}$ 으로부터 몇 개의 점을 더해야 하는지를 따져보면

$f^2_{r,n}=f^2_{r,n-1}+(r-2)n-(r-3)$의 관계가 성립함을 알 수 있다. 앞에서와 마찬가지로 각각의 n에 대하여 이 등식을 세로로 나열하여 변끼리 더하고 $f^2_{r,1}=1$임에 유의하면,

$$
\begin{aligned}
f^2_{r,n} &= f^2_{r,1}+\sum_{i=2}^{n}(\mathrm{r}-2)\mathrm{i}-(\mathrm{r}-3) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{r}-2)\mathrm{i}-(\mathrm{r}-3)
\end{aligned}
$$

이고, 우변을 계산하면

$$f^2_{r,n}=\frac{1}{2}n(r-2)(n-1)+2 \quad (Ⅱ\text{-}2)$$

을 얻는다.

지금부터는 다각수들을 삼각수들의 합으로 나타내보자. 아래의 [그림 Ⅱ-4]처럼 사각수를 분할하면 식

$$f^2_{4,n}=f^2_{3,n}+f^2_{3,n-1} \ (\text{단, } n \geq 2)$$

또는

$$f^2_{4,n}=n+2f^2_{3,n-1} \ (\text{단, } n \geq 2)$$

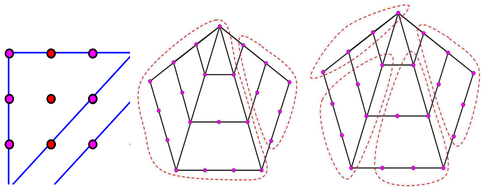
이 성립함을 알 수 있다. 마찬가지로 오각형을 삼각형과 사각형으로 분할할 수 있어서

$$f^2_{5,n} = f^2_{4,n} + f^2_{3,n-1} \text{ (단, } n \geq 2),$$
$$f^2_{5,n} = f^2_{3,n} + 2f^2_{3,n-1} \text{ (단, } n \geq 2)$$

또는

$$f^2_{5,n} = n + 3f^2_{3,n-1} \text{ (단, } n \geq 2)$$

이 성립함을 알 수 있다.



[그림 Ⅱ-4] 사각수와 오각수의 분할

일반적으로 임의의 r각형에서 얻어진 r각수와 삼각수 사이에

$$f^2_{r,n} = f^2_{r-1,n} + f^2_{3,n-1} \text{ (단, } n \geq 2)$$

와 같은 관계가 성립한다. 마찬가지로 다음과 같은 관계가 성립될 것이 예측된다.

$$f^2_{r,n} = f^2_{3,n} + (r-3)f^2_{3,n-1} (\text{단}, n \geq 2) \quad (\text{Ⅱ-3})$$

실제로 우변을 계산하여, 그 값이(Ⅱ-2)에 주어진 $f^2_{r,n}$과 같음을 보일 수 있다. 즉,

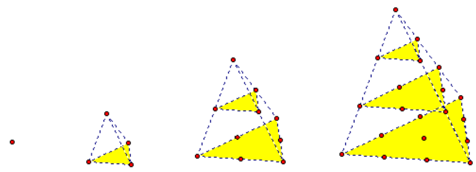
$$\begin{aligned} f^2_{3,n} + (r-3)f^2_{3,n-1} &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (r-3) \\ &= \frac{n(r-2)(n-1)+2n}{2} \end{aligned}$$

이다. 이 두 가지로부터 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$f^2_{r,n} = n + (r-2)f^2_{3,n-1} (\text{단, } n \geq 2)$$

지금부터는 각뿔수에 대해 알아보기로 한다. 삼각뿔수는 아래 그림과 같이 점의 수를 늘려가면서 정삼각뿔 모양의 배열을 계속해서 만들어나갈 때, 정삼각뿔 모양의 배열을 만드는 점의 수이다. 삼각뿔수는 차례대로, $1, 4, 10, 20, \cdots$임을 알 수 있다.

삼각형 이외의 다각형에 대한 각뿔수도 마찬가지로 정의될 수 있다. 일반적으로 r각형으로



[그림 Ⅱ-5] 삼각뿔수

부터 정의된 제n째 r각뿔수를 $f^3_{r,n}$으로 표시하기로 한다. 윗첨자 '3'은 평면에 놓여있는 다각형으로부터 만든 다각수와 달리, 각뿔이 3차원 공간에 놓여 있음을 표기하기 위한 것이다.

삼각뿔수의 정의로부터 제n째 삼각뿔수는 제 $n-1$번째 삼각뿔수에 제n번째 삼각수를 더한 것임을 알 수 있다. 따라서

$$f^3_{3,n} = f^3_{3,n-1} + f^2_{3,n}$$

이고, 이 식으로부터,

$$f^3_{3,n} = f^3_{3,1} + f^2_{3,2} + \cdots + f^2_{3,n}$$

을 얻는다. 따라서 $f^3_{3,1} = f^2_{3,1} = 1$이므로

$$\begin{aligned} f^3_{3,n} &= f^3_{3,1} + f^2_{3,2} + \cdots + f^2_{3,n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f^2_{3,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} i(i+1) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

이다. 따라서 제n째 삼각뿔수는 다음과 같다.

$$f^3_{3,n} = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \quad (\text{Ⅱ-4})$$

이와 같은 방식으로 일반적인 제n째 r각뿔수를 구할 수 있다. r각뿔수의 정의로부터 제n째 r각뿔수는 제 $n-1$번째 r각뿔수에 제n째 r각수를 더한 것임을 알 수 있다. 따라서

$$f^3_{r,n} = f^3_{r,n-1} + f^2_{r,n}$$

이고, 이 식으로부터,

$$f^3_{r,n} = f^3_{r,1} + f^2_{r,2} + \cdots f^2_{r,n}$$

을 얻는다. 그리고 $f_{r,n}^2=\frac{n(r-2)(n-1)+2n}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} f_{r,n}^3 &= f_{r,1}^3+f_{r,2}^2+\cdots f_{r,n}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{r,i}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(r-2)(i-1)+2i}{2} \end{aligned}$$

이고, 위 식의 우변을 계산하면

$$f_{r,n}^3=\frac{1}{6}n(n+1)(r-2)(n-1)+3 \quad (\text{Ⅱ-5})$$

을 얻는다.

예를 들어, 사각뿔수, 오각뿔수, 육각뿔수는 다음과 같다.

$$f_{4,n}^3=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$f_{5,n}^3=\frac{1}{2}n^2(n+1)$$

$$f_{6,n}^3=\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

앞 (Ⅱ-3)에서 임의의 r각형에서 얻어진 r각수와 삼각수 사이에

$$f_{r,n}^2=f_{3,n}^2+(r-3)f_{3,n-1}^2 \quad (\text{단, } n\ge 2)$$

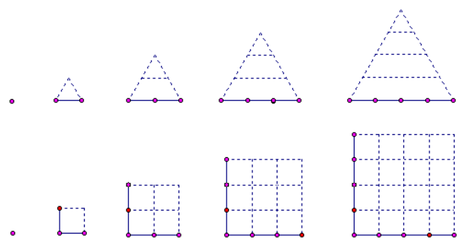
와 같은 관계가 있음을 보았다. 임의의 r각뿔수와 삼각뿔수 사이에도 이와 유사한 관계가 성립한다. 이 식과 $f_{3,n}^3=\sum_{i=1}^{n}f_{3,i}^2$과 $f_{r,n}^3=\sum_{i=1}^{n}f_{r,i}^2$ 을 이용하여

$$f_{r,n}^3=f_{3,n}^3+(r-3)f_{3,n-1}^3 \quad (\text{단, } n\ge 2) \ (\text{Ⅱ-6})$$

이 쉽게 증명된다.

지금까지의 다각수와 다각뿔수가 2차원 평면과 3차원 공간에서 정의된 것이었다면, 지금부터는 1차원에 해당하는 도형수인 그노몬수에 대해 알아보기로 하자.

임의의 $r\ge 3$에 대해, 제 n번째 r각수를 나타내는 정r각형을 간단히 n-정r각형이라 하면, 제n번째 r-그노몬수는 n-정r각형에서 그것의 한 각을 포함하는 $(n-1)$-정r각형을 제외한 나머지 모양에 점을 배열할 때의 점의 수를 말하고 $g_{r,n}$으로 표기한다. 예를 들어, 아래 그림([그림 Ⅱ-6])과 같이 $n-$정삼각형에서 한 각을 포함하는 $(n-1)$-정삼각형을 제외한 나머지 모양에 점을 배열할 때 점의 수를 제n번째 3-그노몬수라고 하고, $n=1$에서부터 $n=5$일 때까지의 3-그노몬수는 $g_{3,1}=1, g_{3,2}=2, g_{3,3}=3, g_{3,4}=4, g_{3,5}=5$가 된다. 또 마찬가지로 $n=1$에서부터 $n=5$일 때까지의 4-그노몬수는 $g_{4,1}=1, g_{4,2}=3, g_{4,3}=5, g_{4,4}=7, g_{4,5}=9$이다. 그러면 제$r$각형에서 얻게 되는 이웃하는 그노몬수는 등차수열을 이루고 그 공차는 $r-2$가 됨을 알 수 있다.



[그림 Ⅱ-6] 3-그노몬수와 4-그노몬수

즉, 그노몬수의 정의로부터

$$g_{r,n}=f_{r,n}^2-f_{r,n-1}^2$$

이고, 식 (Ⅱ-2)

$$f_{r,n}^2=\frac{1}{2}n\{(\mathrm{r}-2)(\mathrm{n}-1)+2\}$$

로부터

$$f_{r,n-1}^2=\frac{1}{2}(n-1)\{(r-2)(n-2)+2\}$$

이므로

$$g_{r,n}=f_{r,n}^2-f_{r,n-1}^2=(r-2)(n-1)+1 \quad (\text{Ⅱ-7})$$

를 얻는다.

Ⅲ. 유한 k차원 각뿔수

이 장에서는 4차원 각뿔수를 알아보고, 이를 유한 k차원까지 확대하여 정의하고, 이렇게 얻어진 k차원 각뿔수가 앞에서의 여러 성질을 만

족하고, 그노몬수, 다각수와 각뿔수를 통합적으로 설명할 수 있음을 보이고자 한다.

1. 4차원 각뿔수

앞에서 삼각수와 삼각뿔을 알아보았다. 삼각수는 점 하나에서 시작하여 그 밑에 1차원 도형인 선분을 그어 두 번째 삼각수를 얻고, 좀 더 기다란 선분을 그 밑에 그어 세 번째 삼각수를 얻는 것으로 생각할 수 있다. 또한 삼각뿔은 점에서 시작하여 그 밑에 2차원 도형인 삼각형을 놓아 점과 잇고, 그 밑에 좀 더 큰 삼각형을 놓아 이어 붙인 것으로 생각할 수 있다. 따라서 삼각뿔은 삼각수를 차원 높게 확장한 것으로 볼 수 있다([그림 Ⅱ-5] 참조). 이러한 관점에서 한 점에서 시작하여 3차원 각뿔수를 앞에서와 같은 방법으로 차례대로 이어 붙여 얻는 도형수를 생각해볼 수 있다. 이러한 도형수를 4차원 삼각뿔수라고 부른다. 그리고 제n번째 4차원 삼각뿔수를 $f^4_{3,n}$으로 표기하기로 하자. 즉 4차원 삼각뿔수를 $f^4_{3,n}$를

$$f^4_{3,n}=\sum_{i=1}^{n}f^3_{3,i}$$

와 같이 정의한다. 4차원 삼각뿔수 $f^4_{3,n}$를 계산해보자. 식 (Ⅱ-4)에서

$$f^3_{3,n}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

이므로

$$\begin{aligned}f^4_{3,n} &= \sum_{i=1}^{n}f^3_{3,i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}i(i+1)(i+2)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}(i^3+3i^2+2i)\end{aligned}$$

마지막 식을 구하면

$$f^4_{3,n}=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (Ⅲ\text{-}1)$$

를 얻는다.

4차원 삼각뿔수를 정의한 것과 마찬가지로 4차원 r각뿔수를 정의하고 그것을 $f^4_{r,n}$이라 하고 이것을 계산해보자.

식 (Ⅱ-5)로부터 제n째 r각뿔수는

$$f^3_{r,n}=\frac{1}{6}n(n+1)(r-2)(n-1)+3$$

이고, 정의로부터

$$f^4_{r,n}=\sum_{i=1}^{n}f^3_{r,i}$$

이므로

$$\begin{aligned}f^4_{r,n} &= \sum_{i=1}^{n}f^3_{r,i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6}i(i+1)(r-2)(i-1)+3\end{aligned}$$

이다. 위 식의 우변을 계산하면

$$f^4_{r,n}=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(r-2)(n-1)+4) \quad (Ⅲ\text{-}2)$$

를 얻는다.

식 (Ⅱ-6)에서는 r각뿔수와 삼각뿔수 사이에

$$f^3_{r,n}=f^3_{3,n}+(r-3)f^3_{3,n-1} \quad (\text{단, } n\geq 2)$$

와 같은 관계가 성립함을 보았다. 마찬가지로 4차원 r각뿔수와 4차원 삼각뿔수 사이에도 유사한 관계가 성립한다.

정의에서 $f^4_{r,n}=\sum_{i=1}^{n}f^3_{r,i}$이었다. 만일 $f^2_{3,0}=0$이라고 하면 위 식은 모든 자연수에 대해 성립하므로,

$$\begin{aligned}f^4_{r,n} &= \sum_{i=1}^{n}f^3_{r,i}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\ f^3_{3,i}+(r-3)\,f^3_{3,i-1}\end{aligned}$$

이고, 정의에 의해

$$f^4_{3,n-1}=\sum_{i=1}^{n}f^3_{3,i-1}$$

이므로

$$f^4_{r,n}=f^4_{3,i}+(r-3)f^4_{3,n-1} \quad (Ⅲ\text{-}3)$$

을 얻는다.

2. 유한 k차원 각뿔수

앞에서 4차원 각뿔수를 정의하는 방식을 일반화하면 유한 k차원 각뿔수를 정의할 수 있다. 한 점에서 시작하여 그 밑에 두 번째 $k-1$차원 각뿔을 놓고, 그 밑에 세 번째 $k-1$차원 각뿔을 놓는 것을 상상하여, k차원 r각뿔수 $f_{r,n}^{k}$를

$$f_{r,n}^{k}=\sum_{i=1}^{n}f_{r,i}^{k-1}$$

로 정의한다. 먼저 k차원 r각뿔수 $f_{r,n}^{k}$와 k차원 3각뿔수 $f_{3,n}^{k}$사이의 관계를 알아보자. 앞의 식 (Ⅱ-3), (Ⅱ-6) 그리고 (Ⅲ-3)으로부터 각각

$$f_{r,n}^{2}=f_{3,n}^{2}+(r-3)f_{3,n-1}^{2} \quad (\text{단, } n\geq 2)$$

$$f_{r,n}^{3}=f_{3,n}^{3}+(r-3)f_{3,n-1}^{3} \quad (\text{단, } n\geq 2)$$

$$f_{r,n}^{4}=f_{3,i}^{4}+(r-3)f_{3,n-1}^{4} \quad (\text{단, } n\geq 2)$$

이 성립함을 보였다. 여기에서 만일 $r\geq 3$인 r에 대하여 $f_{r,0}^{k}=0$이라 가정하면 위 식들은 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로, $f_{r,0}^{k}=0$라 가정하자. 그러면 모든 자연수 n에 대해, k차원 r각뿔수 $f_{r,n}^{k}$와 k차원 3각뿔수 $f_{3,n}^{k}$사이에도

$$f_{r,n}^{k}=f_{3,n}^{k}+(r-3)f_{3,n-1}^{k} \quad (\text{단, } k\geq 2) \quad (\text{Ⅲ-4})$$

이 성립됨이 예측된다. 이를 보이기 위해 차원 k에 대하여 수학적 귀납법을 사용하자. $k=2$인 경우는 이미 (Ⅱ-3)에서 보였다. 따라서 위 식이 $k-1$차원의 경우에 성립한다고 가정하고 k차원에서도 성립함을 보인다. 위 식이 $k-1$차원의 경우에 성립한다고 가정하면,

$$f_{r,n}^{k-1}=f_{3,n}^{k-1}+(r-3)f_{3,n-1}^{k-1}$$

이다. 만일 $f_{3,0}^{k}=0$이라고 하면

$$\begin{aligned} f_{r,n}^{k} &= \sum_{i=1}^{n}f_{r,i}^{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n}f_{3,i}^{k-1}+(r-3)f_{3,i-1}^{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n}f_{3,i}^{k-1}+(r-3)\sum_{i=1}^{n}f_{3,i-1}^{k-1} \\ &= f_{3,n}^{k}+(r-3)f_{3,n-1}^{k} \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$f_{r,n}^{k}=f_{3,n}^{k}+(r-3)f_{3,n-1}^{k} \quad (\text{단, } k\geq 2)$$

를 얻는다.

지금부터는 k차원 r각뿔수 $f_{r,n}^{k}$를 구해보자. 먼저 이것을 구하기 위해 k차원 3각뿔수 $f_{3,n}^{k}$를 구해보자.

(Ⅱ-1), (Ⅱ-4) 그리고 (Ⅲ-1)으로부터 각각

$$f_{3,n}^{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$f_{3,n}^{3}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$f_{3,n}^{4}=\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

임을 알고 있다. 따라서

$$f_{3,n}^{k}=\frac{1}{k!}n(n+1)\cdots(n+k-2)(n+k-1)(\text{단, } k\geq 2)$$

가 성립될 것이 예측된다. 이것을 차원 k에 대해 수학적 귀납법으로 증명해보자. k가 2차원일 때는 (Ⅱ-1)로부터 성립함을 알 수 있다. $k-1$차원일 때 위 식이 성립한다고 가정하자. 그러면 정의로부터

$$f_{3,n}^{k}=\sum_{i=1}^{n}f_{3,i}^{k-1}$$

이고

$$\begin{aligned} f_{3,n}^{k} &= \sum_{i=1}^{n}f_{3,i}^{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)\cdots(\mathrm{i}+\mathrm{k}-3)(\mathrm{i}+\mathrm{k}-2) \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)\cdots(\mathrm{i}+\mathrm{k}-3)(\mathrm{i}+\mathrm{k}-2) \end{aligned}$$

이다.

$S=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)\cdots(\mathrm{i}+\mathrm{k}-3)(\mathrm{i}+\mathrm{k}-2)$라 놓고

S를 먼저 구하여 보자. 이것을 구하기 위해 s_i을

$$s_i=i(i+1)\cdots(i+k-3)(i+k-2) \quad (i=1,\cdots,n)$$

라고 놓으면

$$S=s_1+s_2+\cdots\cdots s_{n-1}+s_n$$

가 된다. 그리고

$$s_1 = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (k-1)$$
$$s_2 = 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k$$
$$s_3 = 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (k+1)$$
$$s_4 = 4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (k+2)$$
$$\cdots\cdots$$
$$s_n = n \cdot (n+1) \cdot \cdots \cdot (n+k-2)$$

이다. 그러면

$$s_1 + s_2 = (2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (k-1))(k+1) = \frac{(k+1)!}{k \cdot 1}$$
$$s_1 + s_2 + s_3 = \frac{(k+1)!}{k \cdot 1} + 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (k+1) = \frac{(k+2)!}{k \cdot (2!)}$$
$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = \frac{(k+2)!}{k \cdot 2!} + 4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (k+2) = \frac{(k+3)!}{k \cdot (3!)}$$
$$\cdots\cdots$$

이 되어

$$S = s_1 + s_2 + \cdots\cdots s_{n-1} + s_n = \frac{(n+k-1)!}{k \cdot (n-1)!} \quad (Ⅲ\text{-}5)$$

일 것이 추측되고 이것은 수학적 귀납법에 의해 쉽게 증명된다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f_{3,i}^{k-1} &= \frac{1}{(k-1)!} S \\ &= \frac{(n+k-1)!}{(k-1)! \cdot k (n-1)!} \\ &= \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \end{aligned}$$

이다.

그런데 위 식의 우변은 곧

$$\frac{1}{k!} n(n+1) \cdots (n+k-2)(n+k-1)$$

이다. 즉 $k-1$차원일 때 식 $f_{3,n}^k = \frac{1}{k!} n(n+1) \cdots (n+k-2)(n+k-1)$이 성립한다고 가정하면 k차원일 때도 성립하므로, 모든 자연수 $k \geq 2$에 대하여

$$f_{3,n}^k = \frac{1}{k!} n(n+1) \cdots (n+k-2)(n+k-1)$$

가 성립한다. 따라서 증명된다.

위 식을 고쳐 쓰면

$$f_{3,n}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \quad (Ⅲ\text{-}6)$$

을 얻는다.

위의 두 식 (Ⅲ-4)와 (Ⅲ-6)을 이용하여 k차원 r각뿔수 $f_{r,n}^k$를 구하여 보자. 앞에서 식 (Ⅱ-2), (Ⅱ-5) 그리고 (Ⅲ-2)로부터 각각

$$f_{r,n}^2 = \frac{1}{2} n(r-2)(n-1) + 2$$

$$f_{r,n}^3 = \frac{1}{6} n(n+1)(r-2)(n-1) + 3$$

$$f_{r,n}^4 = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(r-2)(n-1) + 4)$$

임을 알고 있다. 따라서 k차원 r각뿔수 $f_{r,n}^k$는

$$f_{r,n}^k = \frac{1}{k!}[n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-2)](r-2)(n-1) + k$$

즉, 좀 더 간단히 나타내어

$$f_{r,n}^k = \frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!}(r-2)(n-1) + k \quad (Ⅲ\text{-}7)$$

와 같을 것이 예측된다.

앞에서 식 (Ⅲ-4)로부터

$$f_{r,n}^k = f_{3,n}^k + (r-3) f_{3,n-1}^k \quad (\text{단, } k \geq 2)$$

이었다. 이 식에 (Ⅲ-6)에서 얻은

$$f_{3,n}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

를 대입하면

$$\begin{aligned} f_{r,n}^k &= f_{3,n}^k + (r-3) f_{3,n-1}^k \\ &= \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} + (r-3)\frac{(n+k-2)!}{k!(n-2)!} \\ &= \frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!}(r-2)(n-1) + k \end{aligned}$$

를 얻게 되어 (Ⅲ-7)이 증명된다.

3. 다각수, 다각뿔수 그리고 그노몬수의 통합

앞에서 4차원 각뿔수를 정의한 후 4차원, 또는 5차원 이상을 염두에 두고 k차원 각뿔수를 정의하였다. 그러나 2차원 평면과 3차원 공간에서 정의된 다각수와 다각뿔수는 다름 아닌 2차원 각뿔수와 3차원 각뿔수이다. 예를 들어 삼각뿔수는 [그림 Ⅱ-5]에서 보는 바와 같이 정의해나가는 방식이 한 점에서 시작하여 두번째 삼각수를 나타내는 도형을 아래에 두고, 그

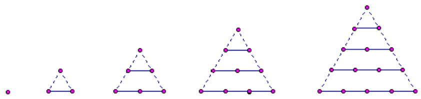
아래에 3번째 삼각수를 나타내는 도형을 두어 만들어 가는 방식으로 해석해볼 수 있다.

또한, 2차원 도형수인 삼각수를 예로 들면, 한 점에서 시작하여 1차원 도형인 선분을 아래에 쌓아놓은 모양이다. 즉 두 점이 있는 선분 아래에 세 점이 있는 선분을 계속적으로 쌓아

<표 Ⅲ-1> 여러 가지 도형수의 일반항

도형수		n번째 수
$f_{3,n}^{1}$	3-그노몬수	n
$f_{4,n}^{1}$	4-그노몬수	$2n-1$
$f_{5,n}^{1}$	5-그노몬수	$3n-2$
$f_{6,n}^{1}$	6-그노몬수	$4n-3$
$f_{r,n}^{1}$	r-그노몬수	$(r-2)n+(3-r)$
$f_{3,n}^{2}$	3각수	$\frac{n(n+1)}{2}$
$f_{4,n}^{2}$	4각수	n^2
$f_{5,n}^{2}$	5각수	$\frac{n(3n-1)}{2}$
$f_{6,n}^{2}$	6각수	$n(2n-1)$
$f_{r,n}^{2}$	r-각수	$\frac{1}{2}n(r-2)(n-1)+2$
$f_{3,n}^{3}$	3각뿔수	$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
$f_{4,n}^{3}$	4각뿔수	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
$f_{5,n}^{3}$	5각뿔수	$\frac{1}{2}n^2(n+1)$
$f_{6,n}^{3}$	6각뿔수	$\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
$f_{r,n}^{3}$	r-각뿔수	$\frac{1}{6}n(n+1)(r-2)(n-1)+3$
$f_{3,n}^{4}$	4차원 3각뿔수	$\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)$
$f_{4,n}^{4}$	4차원 4각뿔수	$\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+1)$
$f_{5,n}^{4}$	4차원 5각뿔수	$\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$
$f_{6,n}^{4}$	4차원 6각뿔수	$\frac{1}{6}n^2(n+1)(n+2)$
$f_{r,n}^{4}$	4차원 r각뿔수	$\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(r-2)(n-1)+4)$
$f_{3,n}^{k}$	k차원 3각뿔수	$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$
$f_{4,n}^{k}$	k차원 4각뿔수	$\frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!}(2n+k-2)$
$f_{5,n}^{k}$	k차원 5각뿔수	$\frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!}(3n+k-3)$
$f_{6,n}^{k}$	k차원 6각뿔수	$\frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!}(4n+k-4)$
$f_{r,n}^{k}$	k차원 r각뿔수	$\frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!}(r-2)(n-1)+k$

가는 모양이다. 따라서 k차원의 각뿔수 정의와 부합함을 알 수 있다.



[그림 Ⅲ-1] 2차원 각뿔수로서의 삼각수

그렇게 보면 1차원 삼각뿔 수는 바로 0차원으로 볼 수 있는 한 점, 두 점, 세 점 등이 나란히 놓여있는 그노몬수 $g_{3,n}$이 됨을 알 수 있고, 1차원 사각뿔수는 그노몬수 $g_{4,n}$이 됨을 알 수 있다. 즉, 1차원 그노몬수 $g_{r,n}$이 곧 $f^1_{r,n}$임을 알 수 있다. 그리고 그노몬수에서 성립하는 성질은 식 (Ⅲ-7)

$$f^k_{r,n} = \frac{(n+k-2)!}{k!(n-1)!}(\mathrm{r}-2)(\mathrm{n}-1)+\mathrm{k}$$

의 k 대신 1을 대입한

$$f^1_{r,n} = (r-2)(n-1)+1$$

으로 이것은 (Ⅱ-6)의

$$g_{r,n} = f^2_{r,n} - f^2_{r,n-1} = (r-2)(n-1)+1$$

과 같다.

예를 들어 특별한 경우로 $r=3$인 경우는

$$f^1_{3,n} = n$$

마찬가지로 $r=4$인 경우는

$$f^1_{4,n} = 2n-1$$

이 되어 앞 Ⅱ에서 언급한 바와 같음을 알 수 있다.

지금까지 논의한 그노몬수, 다각수, 다각뿔수에 관련한 수식을 정리하면 아래 <표 Ⅲ-1>과 같다.

<표 Ⅲ-2> 여러 가지 도형수

단계 / 도형수	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f^1_{3,n}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f^1_{4,n}$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
$f^1_{5,n}$	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43
$f^1_{6,n}$	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57
$f^2_{3,n}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
$f^2_{4,n}$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225
$f^2_{5,n}$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	247	287	330
$f^2_{6,n}$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325	378	435
$f^3_{3,n}$	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680
$f^3_{4,n}$	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	819	1015	1240
$f^3_{5,n}$	1	6	18	40	75	126	196	288	405	550	726	936	1183	1470	1800
$f^3_{6,n}$	1	7	22	50	95	161	252	372	525	715	946	1222	1547	1925	2360
$f^4_{3,n}$	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060
$f^4_{4,n}$	1	6	20	50	105	196	336	540	825	1210	1716	2366	3185	4200	5440
$f^4_{5,n}$	1	7	25	65	140	266	462	750	1155	1705	2431	3367	4550	6020	7820
$f^4_{6,n}$	1	8	30	80	175	336	588	960	1485	2200	3146	4368	5915	7840	10200

그리고 또 실제로 그노몬수, 다각수, 다각뿔수, 4차원 다각뿔수 몇 가지를 구해보면 <표 Ⅲ-2>와 같다.

이와 같이 일반적인 유한 k차원에 정의한 k차원 각뿔수는 저차원에서는 그노몬수, 다각수, 다각뿔수가 됨을 알 수 있고, 그들의 성질을 만족함을 알 수 있다. 수학에서의 일반화는 여러 가지 놓여 있는 상황을 일관되게 통합하여 설명할 수 있다는 점에서 유한 k차원에 대한 각뿔수를 정의하고 그들의 성질을 탐구하는 것은 의미 있다고 하겠다. 각뿔수를 유한 k차원으로 일반화하는 것은 그노몬수, 다각수, 다각뿔수에 대한 성질을 k대신, $1, 2, 3$을 대입하여 얻을 수 있어서 도형수의 성질을 통합적으로 다룰 수 있게 한다.

Ⅳ. 삼각수, 파스칼 삼각형 그리고 피보나치 수열

이미 오래 전 피타고라스 학파는 산술평균, 기하평균, 조화평균 사이의 관계, 완전수, 정다면체에 대한 연구뿐만 아니라 도형수에 대하여 연구하였다. 만물의 근원은 물이라고 주장한 탈레스에 비해 만물의 근원은 수라고 주장했던 피타고라스 학파는 삼각수 10을 '신비의 수'라고 불렀고 '완벽'한 의미를 갖는다고 보았다. 이는 숫자 10이 점을 나타내는 1, 선을 나타내는 2, 면을 나타내는 3, 그리고 입체를 나타내는 4의 합으로 나타낼 수 있었기 때문이라고 한다(Anglin, 1994; Trotter, 1973). 시간이 지나면서 피타고라스 학파의 수비주의는 쇠퇴했지만 이후에 많은 유명한 수학자들의 활약으로 도형수에 대한 성질은 피타고라스 당시에는 상상할 수 없었던 깊은 성질들이 발견되었다.

이 장에서는 잘 알려진 수학적 결과들을 바탕으로 삼각수의 성질, 삼각수와 삼각뿔수, 삼각수와 사각수 등을 다루면서, 도형의 다양한 분할에 대한 직관적 통찰을 통하여 삼각수 사이의 성질이 유도되고 기존의 알려진 성질로부터 유사한 성질들이 유도될 수 있음을 살펴본다. 특히 삼각수와 삼각뿔수 그리고 삼각수가 되는 사각수를 다룰 때는 많은 수치적 자료로부터 패턴을 찾고 귀납적 추론을 통하여 삼각수의 성질을 유도하거나 삼각수가 되는 동시에 사각수가 되는 수를 찾을 수 있음을 살펴본다. 또한 파스칼 삼각형과 피보나치 수열을 다룸으로써 파스칼 삼각형을 이루는 수가 다름 아닌 유한 k차원 삼각뿔수이며, 피보나치 수열을 이루는 항들이 적당한 유한 k차원 삼각뿔수들의 합이 됨을 보임으로써 도형수가 파스칼 삼각형과 피보나치 수열과 밀접하게 연결되어 있음을 보이고자 하였다. 또한 제 n번째 도형수가 제 $n-1$번째 도형수에 적당한 수를 더하여 얻게 되는 점과 앞의 두 항을 더하여 다음 항을 얻게 되는 피보나치 수열 정의의 유사성에 비추어서, 피보나치 수열에서 성립하는 성질과 유사한 도형수 사이의 성질을 유추해본다. 이 장에 나오는 성질의 증명은 지면 관계상 비교적 간략화 하였다.

1. 삼각수의 성질

피타고라스 학파는 [그림 Ⅳ-1]과 같이 삼각수를 배열하여

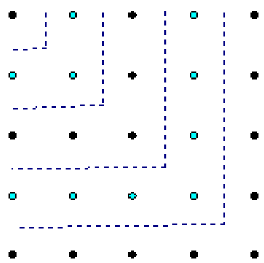
$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2$$

과

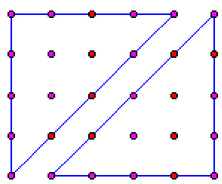
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

을 알게 되었고, [그림 Ⅳ-2]와 같이 두 개의 삼각수를 잘 짜 맞추어 직사각형 모양으로 만들어 $1+2+\cdots n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

임을 알게 되었다.



[그림 Ⅳ-1] 제곱수를 얻기 위한 삼각수 배열



[그림 Ⅳ-2] 삼각수의 일반항을 얻기 위한 삼각수 배열

이와 같이 삼각수는 이미 오래전부터 연구되어졌는데, 그 후로도 가우스(C. F. Gauss, 1777-1855)는 모든 양의 정수는 세 개의 삼각수의 합으로 나타낼 수 있음을 증명하였고, 1989년에 차나키스(N. Tzanakis)와 드 베거(B. de Weger)는 연속되는 세 정수의 곱으로 나타낼 수 있는 삼각수는 정확하게 6개만 존재한다는 것을 증명하는 등 많은 수학자들에 연구되었다(Anglin, 1994).

지금부터는 삼각수의 성질 몇 가지를 알아보기로 한다.

먼저 위에서 주어진 식$n^2+(2n+1)=(n+1)^2$을 삼각수와 사각수들로 고쳐 표현하면

$$f^2_{4,n+1}-f^2_{4,n}=2n+1$$

와 같다. 식 (Ⅲ-4)에서 $k=2$이고 $r=4$일 때는

$$f^2_{3,n}+f^2_{3,n+1}=(n+1)^2$$

를 얻는다([그림 Ⅱ-4] 참조). 이것은 이웃하는 두 삼각수의 합은 제곱수가 됨을 의미한다.

이와 유사한 관계식을 찾아보면

$$\begin{aligned} f^2_{3,n}+f^2_{3,n+2} &= \frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n+2)(n+3)}{2} \\ &= 2f^2_{3,n+1}+1 \end{aligned}$$

이고, 계속하여 유사한 방법으로

$$f^2_{3,n}+f^2_{3,n+3}=(n+2)^2+2$$

$$f^2_{3,n}+f^2_{3,n+4}=2f^2_{3,n+2}+4$$

$$f^2_{3,n}+f^2_{3,n+5}=(n+3)^2+6$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^2_{3,n}+f^2_{3,n+2k-1}=(n+k)^2+2f^2_{3,k-1} \quad \text{(Ⅳ-1a)}$$

$$f^2_{3,n}+f^2_{3,n+2k}=2f^2_{3,n+k}+k^2 \quad \text{(Ⅳ-1b)}$$

을 얻을 수 있다. 여기에서 $n=0$이라 놓고, $f^2_{3,0}=0$으로 약속하면

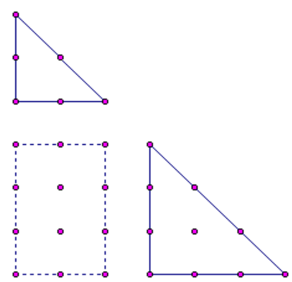
$$f^2_{3,2k-1}=k^2+2f^2_{3,k-1} \qquad \text{(Ⅳ-2a)}$$

$$f^2_{3,2k}=2f^2_{3,k}+k^2 \qquad \text{(Ⅳ-2b)}$$

을 얻는다. 식 (Ⅳ-2a)와 (Ⅳ-2b)는 삼각수에 관해 오래 전부터 알려진 결과로(Trotter, 1973), 임의의 삼각수는 제곱수와 삼각수의 2배의 합으로 표현됨을 의미한다.

이번에는 1775 년경에 오일러에 의해 밝혀진 삼각수들의 또 다른 관계를 알아보기로 한다(Trotter, 1973). 아래 그림([그림 Ⅳ-3] 참조)로부터 $f^2_{3,n+k}$과 $f^2_{3,n}$과 $f^2_{3,k}$ 사이에는 다음과 같은 관계가 있음을 알 수 있다.

$$f^2_{3,n+k}=f^2_{3,n}+f^2_{3,k}+nk \quad \text{(Ⅳ-3)}$$



[그림 Ⅳ-3] $f^2_{3,7}=f^2_{3,3}+f^2_{3,4}+3\cdot 4$

식 (Ⅳ-3)으로부터

$$\begin{aligned} f_{3,n+k+1}^2 &= f_{3,n}^2 + f_{3,k+1}^2 + n(k+1) \\ &= f_{3,n}^2 + f_{3,k}^2 + (k+1) + n(k+1) \\ &= f_{3,n}^2 + f_{3,k}^2 + (n+1)(k+1) \end{aligned}$$

이고, $n > k$일 때,

$$\begin{aligned} f_{3,n-k}^2 &= f_{3,n}^2 - f_{3,k}^2 - (n-k)k \\ &= f_{3,n}^2 + f_{3,k+1}^2 - (k+1)^2 - (n-k)k \\ &= f_{3,n}^2 + f_{3,k}^2 - k(n+1) \end{aligned}$$

식 (Ⅳ-3)을 이용하면

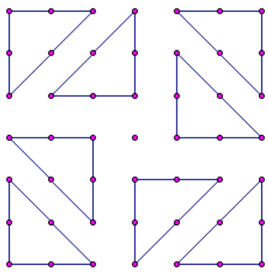
$$f_{3,3n+1}^2 = f_{3,2n+1}^2 + f_{3,n}^2 + n(2n+1)$$

이고, 이것으로부터

$$f_{3,3n+1}^2 - f_{3,n}^2 = (2n+1)^2 \qquad (Ⅳ\text{-}4)$$

을 얻는다.

한편, 아래 [그림 Ⅳ-4]에서 $(2n+1)^2 = 8f_{3,n}^2 + 1$임을 알 수 있다.



[그림 Ⅳ-4] $(2n+1)^2 = 8f_{3,n}^2 + 1$(Wells, 1991).

이것을 식 (Ⅳ-4) 에 대입하면

$$f_{3,3n+1}^2 = 9f_{3,n}^2 + 1$$

이고, 마찬가지로 식 (Ⅳ-3)을 이용하고 방금 얻은 결과를 대입하여 나가면

$$f_{3,5n+2}^2 = 25f_{3,n}^2 + 3$$

$$f_{3,7n+3}^2 = 49f_{3,n}^2 + 6$$

$$\cdots$$

등을 얻는다.

이 식을 일반화하면 다음을 얻는다.

$$f_{3,(2a+1)n+a}^2 = (2a+1)^2 f_{3,n}^2 + f_{3,a}^2 \quad (Ⅳ\text{-}5)$$

위 식은 1775년경 오일러에 의해 얻어졌다.

삼각수에 관한 성질로는 이 밖에도 다음과 같은 것들 있다.

$$f_{3,n}^2 - f_{3,n-1}^2 = n$$

이므로

$$f_{3,n}^2 + f_{3,n-1}^2 = (f_{3,n}^2 - f_{3,n-1}^2)^2 \quad (Ⅳ\text{-}6)$$

이다. 또 다음과 같은 성질들이 성립함을 어렵지 않게 알 수 있다.

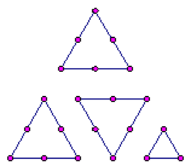
$$(f_{3,n+1}^2)^2 - (f_{3,n}^2)^2 = (n+1)^3 \qquad (Ⅳ\text{-}7)$$

$$3f_{3,n}^2 + f_{3,n+1}^2 = f_{3,2n+1}^2 \quad (Ⅳ\text{-}8)$$

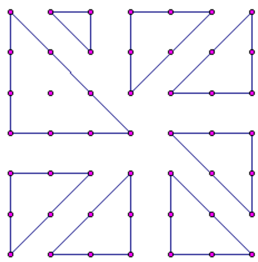
$$3f_{3,n}^2 + f_{3,n-1}^2 = f_{3,2n}^2 \quad (Ⅳ\text{-}9)$$

$$(2n+1)^2 = f_{3,n-1}^2 + 6f_{3,n}^2 + f_{3,n+1}^2 \quad (Ⅳ\text{-}10)$$

특히, (Ⅳ-9)는 [그림 Ⅳ-5]를 이용하여 성립함을 알 수 있고, (Ⅳ-10)은 [그림 Ⅳ-6]으로부터 알 수 있다(Conway & Guy, 1996).



[그림 Ⅳ-5] $3f_{3,n}^2 + f_{3,n-1}^2 = f_{3,2n}^2$



[그림 Ⅳ-6] $(2n+1)^2 = f_{3,n-1}^2 + 6f_{3,n}^2 + f_{3,n+1}^2$

또한

$$f_{3,n}^2 = n^2 - (n-1)^2 + (n-2)^2 - (n-3)^2 + \cdots \pm 1$$

(Ⅳ-11)

$$f_{3,2n-1}^2 = \sum_{i=1}^{n} (4i-3) \quad (Ⅳ\text{-}12)$$

$$f_{3,2n}^2 = \sum_{i=1}^{n} (4i-1) \qquad (Ⅳ\text{-}13)$$

와 같은 성질이 성립함을 알 수 있다.

2. 삼각수와 삼각뿔수

삼각뿔수 $f^3_{3,n}$과 삼각수와의 관계를 살펴보도록 한다(Trotter, 1973).

삼각뿔수는 $f^3_{3,n}=\sum_{i=1}^{n} f^2_{3,i}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$이었다. 이것을 삼각수 $f^2_{3,n}=\frac{n(n+1)}{2}$으로 나타내면

$f^3_{3,n}=\frac{(n+2)}{3}f^2_{3,n}$, 또는 $f^3_{3,n}=\frac{n}{3}f^2_{3,n+1}$

이 된다.

만일 삼각뿔대에 대응되는 점의 수를 구하여 보면

$$\sum_{i=m}^{n} f^3_{3,i}=\sum_{i=1}^{n} f^3_{3,i}-\sum_{i=1}^{m-1} f^3_{3,i} = \frac{1}{3}(n+2)f^2_{3,n}-(m-1)f^2_{3,m}$$

와 같이 삼각수들로 나타낼 수 있다.

한편 연속하는 삼각수들의 합으로서의 삼각뿔수는 다음과 같은 규칙을 가지고 있다.

<표 Ⅳ-1>의 맨 오른쪽 열에서의 규칙성을 살펴보면 세 개의 연속적인 삼각수들의 합은

$$\sum_{i=0}^{2} f^2_{3,n+i}=3f^2_{3,n+1}+1$$

와 같은 성질이 있음을 알 수 있다. 이 식과 $f^2_{3,n}=f^2_{3,n-1}+n$을 이용하면 네 개의 연속적인 삼각수들의 합이

$$\sum_{i=0}^{3} f^2_{3,n+i}=4f^2_{3,n+2}-2(n+1)$$

와 같음을 알 수 있다.

3. 삼각수와 사각수

지금부터는 삼각수이면서 동시에 사각수가 되는 수를 찾아보기로 하자. <표 Ⅲ-2>에서 보면 1과 36은 삼각수인 동시에 사각수가 된다. 이와 같은 수들이 더 있는지 알아보자. 삼각수가 되면서 동시에 사각수가 되는 것은 $f^2_{3,n}=\frac{n(n+1)}{2}$이고 $f^2_{4,n}=n^2$이므로

$$m^2=\frac{n(n+1)}{2} \quad (Ⅳ\text{-}14)$$

를 만족하는 양의 정수로 된 해를 구할 필요가

<표 Ⅳ-1> 삼각수와 삼각뿔수

n	$f^2_{3,n}$	$f^3_{3,n}=\sum_{i=1}^{n} f^2_{3,i}$	규칙성	
1	1	1	1・1	
2	3	4	2・2	
3	6	10		3・3＋1
4	10	20	4・5	
5	15	35	5・7	
6	21	56		6・9＋2
7	28	84	7・12	
8	36	120	8・15	
9	45	165		9・18＋3
10	55	220	10・22	
11	66	286	11・26	
12	78	364		12・30＋4
13	91	455	13・35	
14	105	560	14・40	
15	120	680		15・45＋5

있다. 식 (Ⅳ-14)를 변형하면

$$2m^2 = (\frac{2n+1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

이고

$$(2n+1)^2 - 2(2m)^2 = 1$$

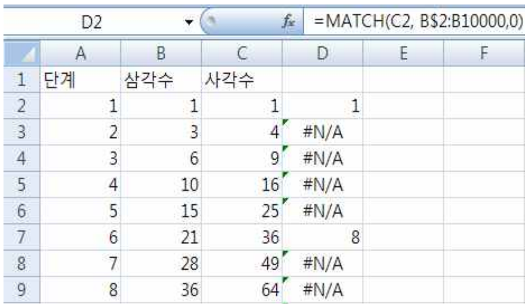
과 같이 쓸 수 있다. 만일

$$x = 2n+1,\ y = 2m$$

이라 하면

$$x^2 - 2y^2 = 1 \quad (\text{Ⅳ-15})$$

을 얻게 된다. 여기에서 $m^2 = (\frac{y}{2})^2$이 삼각수이면서 동시에 사각수가 되는 수이다. 식 (Ⅳ-15)는 타원의 방정식이므로 이 방정식을 만족하는 양의 정수해를 구하여 삼각수이면서 사각수인 수를 구할 수 있다. 식 (Ⅳ-15)과 같은 모양의 일반적인 $x^2 - Ny^2 = 1$과 같은 방정식을 Pell의 방정식이라고 하는데 이것을 다루는 것은 학교 수학의 범위를 넘으므로 수치적으로 접근한다. 여기서는 스프레드시트의 한 종류인 엑셀을 이용하여 찾아보기로 한다. 먼저 단계값을 아래로 나열하고 삼각수와 사각수를 계산한다. 예를 들면, 삼각수를 계산하기 위해 셀 B2에 “=A2*(A2+1)/2”를 입력하고, 사각수를 얻기 위해서는 셀 C2에 ‘=A2^2’를 입력하고 아래로 드래그하여 복사한다. 엑셀의 “match”함수 기능을 사용하면 찾고자 하는 수의 위치를 찾아주므로 삼각수이면서 사각수가 되는 수를 찾을 수 있다. 예를 들어, 아래 그림([그림 Ⅳ-7] 참조)과 같이 셀 D2에 ‘=MATCH(C2, B$2:B10000, 0)’와 같이 입력하여 C2에 있는 값 1과 정확히 일치하는 B2의 값이 B2부터 B10000까지를 검색하여 A의 어느 단계에 있는지를 찾을 수 있다. 셀 D7에 있는 숫자 8의 의미는 사각수 36이 A의 8단계에서 삼각수 36과 같음을 보여준다. 이때 찾는 값이 없으면 “#N/A”와 같이 표기된다.



D2 =MATCH(C2, B$2:B10000,0)

	A	B	C	D	E	F
1	단계	삼각수	사각수			
2	1	1	1	1		
3	2	3	4	#N/A		
4	3	6	9	#N/A		
5	4	10	16	#N/A		
6	5	15	25	#N/A		
7	6	21	36	8		
8	7	28	49	#N/A		
9	8	36	64	#N/A		

[그림 Ⅳ-7] 엑셀에서 삼각수이면서 사각수인 수 찾기

이와 같이 삼각수이면서 사각수가 되는 수가 몇 단계에서 나타나는지를 살펴보면

$$1, 8, 49, 288, 1681, 9800, \cdots$$

와 같음을 알 수 있다. 이 수열의 항을 u_i라 하고 어떤 항이 직전 항의 대략 6배에 해당함을 알고, 규칙성을 찾으면

$$u_i = 6u_{i-1} - u_{i-2} + 2,\quad u_0 = 0,\ u_1 = 1$$

임을 알 수 있다. 따라서 $n = u_i$일 때의 삼각수는 $\frac{u_i(u_i+1)}{2}$이므로 삼각수이면서 사각수인 수를 찾아보면 아래 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 삼각수이면서 사각수인 수

i	u_i	삼각수이면서 사각수인 수
1	1	1
2	8	36
3	49	1225
4	288	41616
5	1681	1413721
6	9800	48024900
7	57121	1631432881
8	332928	55420693056
…	…	…

4. 삼각수와 파스칼 삼각형

삼각수는 파스칼 삼각형을 아래 그림([그림 Ⅳ-9] 참조)과 같이 그리면 세 번째 열과 같음을 알 수 있다. 삼각수 $f^2_{3,n} = \dfrac{n(n+1)}{2}$ 을 고쳐 쓰면

$$f^2_{3,n} = \frac{n(n+1)}{2} = {}_nC_2$$

이고, $(a+b)^2$를 이항 전개하였을 때의 이항계수와 같음을 알 수 있다.

일반적으로 k차원 삼각뿔수는 (Ⅲ-6)으로부터

$$f^k_{3,n} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = {}_{n+k-1}C_k$$

이고 이것의 특별한 경우인 $k=2$인 경우에 해당한다.

$k=1$일 때는 3−그노몬수 $f^1_{3,n} = \frac{n!}{(n-1)!} = {}_nC_1 = n$ 이 되고 [그림 Ⅳ-8]의 두 번째 대각선에 해당한다.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

[그림 Ⅳ-8] 이항계수 속에 나타난 삼각수

마찬가지로 $k=3$일 때는 삼각뿔수

$$f^3_{3,n} = \frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} = {}_{n+2}C_3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

가 되고, [그림 Ⅳ-8]의 네 번째 대각선에 해당하고, $k=4$일 때는 사차원 삼각뿔수

$$f^4_{3,n} = \frac{(n+3)!}{4!(n-1)!} = {}_{n+3}C_4 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

와 같고 [그림 Ⅳ-8]의 다섯 번째 대각선에 해당함을 알 수 있다.

5. 도형수와 피보나치 수열

피보나치 수열은 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,⋯와 같이 앞의 두 항을 더하여 다음 항이 만들어지는 수열이다. 이 수열의 일반항을 F_n으로 표기하면

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_1 = F_2 = 1\ (n \ge 3) \quad (Ⅳ\text{-}16)$$

와 같다. 피보나치 수열의 일반항 F_n은 다음과 같이 주어진다.

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

여기에서 α와 β는 $x^2 - x - 1 = 0$의 두 근이다. 피보나치 수열의 정의와 그 일반항을 살펴 다음과 같은 항등식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1 \quad (Ⅳ\text{-}17)$$

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1} \quad (Ⅳ\text{-}18)$$

$$F_nF_k + F_{n-1}F_{k-1} = F_{n+k-1} \quad (Ⅳ\text{-}19)$$

삼각수 제n번째 삼각수 $f^2_{3,n}$는 $f^2_{3,n} = f^2_{3,n-1} + n$과 같이 전 단계의 삼각수에 n을 더하여 만들어진다는 점에서 피보나치 수열의 정의와 유사점이 있다. 삼각수들의 성질과 피보나치수열의 유사성을 찾아보면, 위 식들과 유사한 성질이 삼각수에서 성립하는 것으로는 다음과 같은 것들이 있다. 우선 (Ⅳ-17)과 유사한 식으로는

$$\sum_{i=1}^{n} f^2_{3,i} = f^3_{3,n}$$

이 있다. 식 (Ⅳ-18)와 (Ⅳ-19)의 좌변의 형태와 같은 모양의 삼각수를 실제 계산하면

$$(f^2_{3,n})^2 - f^2_{3,n-1}\,f^2_{3,n+1} = f^2_{3,n} \quad (Ⅳ\text{-}20)$$

$$f^2_{3,n}\,f^2_{3,k} + f^2_{3,n-1}\,f^2_{3,k-1} = f^2_{3,nk} \quad (Ⅳ\text{-}21)$$

과 같은 유사한 결과를 얻는다.

그리고 앞에서 논의한 도형수와 파스칼 삼각형의 관계는 아래의 표처럼 피보나치 수열과도 관계가 깊다. 도형수를 대각선으로 더한 값들은 피보나치 수열을 이룬다.

<표 Ⅳ-3> 파스칼 삼각형과 피보나치 수열

F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	
1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							⋯
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
					⋯					

만일 $f_{3,n}^0=1$이라고 약속하고, <표 Ⅳ-3>을 도형수의 기호로 바꾸어 표기하면 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4> 도형수와 피보나치 수열

F_n	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	
$f_{3,1}^0$										
$f_{3,2}^0$	$f_{3,1}^1$									
$f_{3,3}^0$	$f_{3,2}^1$	$f_{3,1}^2$								
$f_{3,4}^0$	$f_{3,3}^1$	$f_{3,2}^2$	$f_{3,1}^3$							⋯
$f_{3,5}^0$	$f_{3,4}^1$	$f_{3,3}^2$	$f_{3,2}^3$	$f_{3,1}^4$						
$f_{3,6}^0$	$f_{3,5}^1$	$f_{3,4}^2$	$f_{3,3}^3$	$f_{3,2}^4$	$f_{3,1}^5$					
$f_{3,7}^0$	$f_{3,6}^1$	$f_{3,5}^2$	$f_{3,4}^3$	$f_{3,3}^4$	$f_{3,2}^5$	$f_{3,1}^6$				
$f_{3,8}^0$	$f_{3,7}^1$	$f_{3,6}^2$	$f_{3,5}^3$	$f_{3,4}^4$	$f_{3,3}^5$	$f_{3,2}^6$	$f_{3,1}^7$			
$f_{3,9}^0$	$f_{3,8}^1$	$f_{3,7}^2$	$f_{3,6}^3$	$f_{3,5}^4$	$f_{3,4}^5$	$f_{3,3}^6$	$f_{3,2}^7$	$f_{3,1}^8$		
					⋯					

위 표로부터 $n=2k$일 때 F_n은

$$F_2=f_{3,2}^0$$
$$F_4=f_{3,4}^0+f_{3,2}^1$$
$$F_6=f_{3,6}^0+f_{3,4}^1+f_{3,2}^2$$
$$\cdots$$

이므로

$$\begin{aligned}F_{2k}&=f_{3,2k}^0+f_{3,2k-2}^1+f_{3,2k-4}^2+\cdots+f_{3,2}^{k-1}\\&=\sum_{i=0}^{k-1}f_{3,2(k-i)}^i\end{aligned}$$

이고

$n=2k-1$일 때 F_n은

$$F_1=f_{3,1}^0$$
$$F_3=f_{3,3}^0+f_{3,1}^1$$
$$F_5=f_{3,5}^0+f_{3,3}^1+f_{3,1}^2$$
$$F_7=f_{3,7}^0+f_{3,5}^1+f_{3,3}^2+f_{3,1}^3$$
$$\cdots$$

이므로

$$\begin{aligned}F_{2k-1}&=f_{3,2k-1}^0+f_{3,2k-3}^1+f_{3,2k-5}^2+\cdots+f_{3,1}^{k-1}\\&=\sum_{i=0}^{k-1}f_{3,2(k-i)-1}^i\end{aligned}$$

이다.

Ⅴ. 논의

지금까지 삼각수, 사각수, 삼각뿔수, 사각뿔수, 그노몬수, 그리고 일반적으로 유한 k차원에서의 r각뿔수를 다루고 그들 사이의 성질에 대해 알아보았다. 그리고 삼각수, 사각수, 삼각뿔수, 파스칼 삼각형, 피보나치 수열 등의 연관성에 대해 알아보았다. 일반적인 유한 k차원에서의 r각뿔수 $f_{r,n}^k$는 r, n, k 중에 어느 두 가지를 고정하면 나머지 문자에 대해 수열을 이루고 이들은 도형의 규칙성을 반영하여 나타나므로 일반적 규칙을 지니고 있다. 이러한 수열의 일반항을 탐구하는 것은 수열의 교수학습을 위한 좋은 소재가 된다(박교식, 2002). 삼각수, 사각수를 r각수로 확장하여가는 과정, r각수의 첫째항, 둘째항으로부터 제n번째 항을 구하는 과정, 그리고 그노몬수, 다각수, 각뿔수로부터 유한 k차원 각뿔수로 차원을 확장하는 과정에

서 학생들은 귀납적 추론과 연역적 추론을 풍부하게 경험하게 된다. 특히 저차원 각뿔수인 $f_{3,n}^{2}$, $f_{3,n}^{3}$으로부터 $f_{3,n}^{k}$나 $f_{r,n}^{k}$를 얻기 위해서는 귀납적 추론과 유추가 필요하고 이를 정당화하는 데는 수학적 귀납법도 활용될 수 있음을 보았다. 또한 다양한 도형의 분할로부터 도형과 관계된 삼각수의 성질을 찾는 과정에서 다양한 귀납적 추론과 연역적 추론을 경험할 수 있다. 연속하는 삼각수들의 합으로서 삼각뿔수가 갖는 규칙을 찾고, 삼각수이면서 사각수인 수를 찾는 과정에서는 수치적 자료를 생성하여 수치적 자료로부터 일정한 규칙과 삼각수의 성질을 찾는 추론 활동을 경험할 수 있음을 보았다. 또한 제n째 도형수가 제$n-1$째 도형수에 적당한 수를 더하여 정의되고 피보나치 수열에서의 제n째 항이 그 앞의 두 항을 더하여 정의되는 것과 같은 두 정의 방식 사이의 유사성에 착안하여 피보나치 수열에서 성립하는 성질과 유사한 성질이 삼각수에서도 성립하는지를 유추하여 그와 유사한 성질이 삼각수에서도 찾을 수 있음을 알 수 있었다.

이와 같이 도형수, 파스칼 삼각형 그리고 피보나치 수열의 탐구는 수학의 외연을 넓혀가는 귀납적 추론이나 유추와 같은 개연적 추론과 추측된 사실에 수학적 정당성을 부여하는 연역적 추론 모두를 경험할 수 있는 기회가 많이 있음을 볼 수 있다.

한편 학생들은 다각수나 다각뿔수를 r각형에 대해 일반화하는 것에는 쉽게 수긍하나 삼차원 공간을 넘어서는 고차원에서의 각뿔수의 정의의 필요성과 유용성에 대해서는 의문을 지닐 수 있다. 그러나 유한 k차원에서의 r각뿔수 $f_{r,n}^{k}$를 정의하고 이를 구하게 되면 그노몬수와 삼각수, 삼각뿔수 등은 k가 각각 $0, 1, 2$일 때에 해당되는 저차원에서의 각뿔수임을 알 수 있어서, 차원 k를 일반화해서 그노몬수와 삼각수, 삼각뿔수에 대한 성질을 통합적으로 논할 수 있다는 점에서 수학에서의 일반화의 의미를 일깨울 수 있다. 또한 일반적으로 유한 k차원의 고차원 각뿔수들이 파스칼 삼각형을 이루는 수들이라는 점에서, 또 피보나치 수열의 항들이 고차원 삼각뿔수들의 합으로 나타난다는 점에서 고차원 각뿔수가 학생에게 보다 친숙한 파스칼 삼각형과 피보나치 수열과 밀접하게 관련되어 있음을 보여, 유한 k차원의 고차원 각뿔수가 공허한 수가 아님을 이해할 수 있게 해주고 수학적 아이디어들이 매우 다양하게 연결될 수 있음을 일깨울 수 있다.

또한 유한 k차원에서의 r각뿔수를 나타내기 위해서는 $f_{r,n}^{k}$와 같이 복잡한 기호를 사용할 필요가 있다는 점에서 기호 사용에 관한 의미 있는 교수·학습을 도모할 수 있다. Franzblau와 Warner (2001)은 학생이 수열을 말로는 설명할 수 있지만 기호를 사용하여 설명하는 것에 어려움을 겪는 것을 예시하고 있다. 실제로 도형수를 소재로 한 어떤 수업에서 중학생들은 27각수를 'a_{27}^{t}', 120각수를 'a_{20}^{h}'와 같이 'twenty'와 'hundred'에서 't'와 'h'를 따와서 표기하자는 의견, 제n번째 삼각수와 사각수를 '3_n'과 '4_n'과 같이 표기하자는 의견 등을 제시하여 기호 표기에 어려움을 보였다. 그러나 계속되는 토론을 통해 제n번째 k각수에 대해 비교적 사용 가능한 '$p(n,k)$'이나 '$f(n,k)$'를 사용하자는 의견이 제시되는 것을 관찰할 수 있었다. 이것으로 미루어 도형수에서 파생되는 여러 수열을 다루는 것은 학생들로 하여금 어떻게 기호를 정할 것인지를 논의하게 하여 복잡한 기호 사용에 대한 거부감을 줄이고, 기호에 사용된 첨자들이 수학적 성질을 구조적으로 표현해줄 수 있음을 일깨울 수 있다.

한편 공학적 도구인 엑셀과 같은 스프레드시트를 사용하는 것이 규칙성 파악에 매우 도움

을 줄 수 있음을 알 수 있다. 유한 k차원에서의 r각뿔수 $f^k_{r,n}$, 파스칼 삼각형, 피보나치 수열을 계산하기 위해서는 간단한 수식에 자연수를 대입하는 지루한 활동을 반복하게 된다. 이와 같은 활동은 스프레드시트인 엑셀을 통해서 간단히 할 수 있다. <표 Ⅲ-2>, <표 Ⅳ-2> 그리고 <표 Ⅳ-3>에 주어진 수치는 엑셀을 통하여 쉽게 구할 수 있다. 그리고 엑셀을 통해 다량의 자료를 쉽게 구함으로써 그 자료들 사이의 규칙성과 관련성을 파악하는데 보다 집중할 수 있으므로 이와 같은 유형의 소재를 다룰 때는 공학적 도구를 적극적으로 활용할 필요가 있다.

참고문헌

박교식(2004). **도형수**. 서울: 경문사.

박교식(2002). 수열의 교수・학습을 위한 교수단원 소재 연구 - 다각수와 각뿔수. 학교수학, 4(3), 361-373.

우정호(2002). **학교수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판부.

우정호(2003). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울대학교 출판부.

Albert H. B.(1996). *Recreations in the Theory of Numbers*. New York: Dover, 1966.

Anglin W. S.(1994). *Mathematics: A Concise History and Philosophy*, Springer.

Boyer, C. B. & Merzbach, U. C(2000). **수학의 역사・상**. 양영오・조윤동(공역). 서울: 경문사.

Conway, J. H. & Guy, R. K. (1996). *The Book of Numbers*. New York: Springer-Verlag, 33-38.

Franzblau, D. S. & Warner, L. B.(2001). From Fibonacci Numbers to Fractals-Recursive Patterns and Subscript Natation-, In F. R. Curcio (Ed.), *The roles of representation in school mathematics: 2001 yearbook*. Reston: National Council of teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 류희찬・조완영・이경화・나귀수・김남균・방정숙(역). 학교수학을 위한 원리와 규준. 서울: 경문사.

Trotter, T. Jr. (1973). *Some Identities for the Triangular Numbers*. *J. Recr. Math. 6*, 128-135.

Wells, D.(1991). *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. London: Penguin Books, 1991.

A Study on Teaching Material for Enhancing Mathematical Reasoning and Connections

- Figurate numbers, Pascal's triangle, Fibonacci sequence -

Son, Hong Chan (Chonbuk National University)

In this paper, we listed and reviewed some properties on polygonal numbers, pyramidal numbers and Pascal's triangle, and Fibonacci sequence. We discussed that the properties of gnomonic numbers, polygonal numbers and pyramidal numbers are explained integratively by introducing the generalized k-dimensional pyramidal numbers. And we also discussed that the properties of those numbers and relationships among generalized k-dimensional pyramidal numbers, Pascal's triangle and Fibonacci sequence are suitable for teaching and learning of mathematical reasoning and connections.

* key words : figurate number(도형수), polygonal number(다각수), 각뿔수(pyramidal number), Pascal's triangle(파스칼 삼각형), Fibonacci sequence(피보나치 수열)

논문접수 : 2010. 11. 5
논문수정 : 2010. 11. 25
심사완료 : 2010. 12. 10