

몬테카를로 모사를 이용한 동압력 교정기 불확도 평가

Uncertainty Evaluation of Dynamic Pressure Calibrator by Monte Carlo Simulation

김 문 기*

Moon-Ki Kim

Abstract

This paper describes Monte Carlo Simulation(MCS) to assess the uncertainty of dynamic pressure calibrator and the expanded uncertainty results that were compared by GUM approximation and MCS. MCS uncertainties were computed using defining a domain of possible inputs, generating inputs randomly using probability distribution, performing a deterministic computation repeatedly and aggregating the results. It was revealed that the expanded uncertainty between GUM and MCS was different from each other. the expanded uncertainties were 0.5366%, 0.4856%, respectively. MCS is a suitable method for determining the uncertainty of simple and complex measurement systems. It should be more widely used and studied in measurement uncertainty calculations.

Keywords : MCS(몬테카를로 모사), Uncertainty(불확도), Dynamic Pressure Calibrator(동압력 교정기), GUM

1. 서론

시험 및 측정 결과의 정확성과 신뢰도를 표현하기 위해서는 결과의 불확실성을 불확도(uncertainty)로 표기해야 하며, 측정결과의 수용여부가 결정되고 측정결과가 허용한계에 매우 근접하는 경우, 확률적인 의미에서 허용공차를 초과할 위험성이 있을 경우는 반드시 측정불확도에 대한 고려가 필요하다. 측정 불확도 평가를 위해 현재 ISO(International Organization for Standardization)에서 제정된 측정불확도 표현 지침서 GUM(Guide to the Expression of Uncertainty in

Measurement)^[3]은 많은 규격에 적용되고 있고, ISO 국제 규격을 따르는 우리나라 또한 여러 분야에서 적용을 의무화하고 있다.

GUM에 따른 측정불확도 평가방법은 컴퓨터의 보조가 필요 없고, 간단한 수학적 모델에 적용하기에 손쉬운 장점이 있어 보편적으로 많이 사용하고 있지만, 테일러(taylor) 1차 급수전개에 의한 평가이기 때문에 측정모델식이 비선형성이 크거나 입력량의 표준불확도(standard uncertainty) 값이 입력값에 비해 매우 클 경우 또는 입·출력값의 개수가 많은 경우에는 처리하기 어려운 한계가 있다

MCS(Monte Carlo Simulation)를 이용한 불확도 산출 방법은 이러한 한계를 해결하기 위해 수치의 확률적 분포를 반복 가능한 실험의 통계로부터 구한다. 특히 GUM에 대한 계산의 정확성과 신뢰도를 보완할 수 있

† 2010년 4월 19일 접수~2010년 7월 12일 게재승인

* 국방과학연구소(ADD)

책임저자 : 김문기(kim4you@add.re.kr)

는 방법이기에 때문에 GUM의 보충 규격으로 제정하기 위한 검토가 진행되고 있다.

동압력 교정기는 각종 무기체계 개발시험 및 수락 시험시 강내압력과 같이 밀폐된 공간에서 매우 짧은 시간(수십 ms이내)에 급격히 변화하는 동압력을 측정하기 위해 사용되는 압전형 압력센서(piezoelectric pressure sensor)를 교정하는 정방향 스텝 동압력 교정 장치로서 응답속도가 1ms 이내이며, 압력을 80,000psi 까지 센서에 인가한 후 응답특성을 분석하여 교정하는 장비이다. 무기체계의 개발과정에서 강내압력의 정확한 측정은 포신의 중량 및 수명과 탄의 사거리 등에 직접적인 영향을 주는 요소이다^[1]. 따라서 이러한 동압력을 정확하게 측정하기 위한 센서 교정 및 동압력 교정기의 정확하고 신뢰성 있는 불확도 산출이 중요한 요소이며, 이에 대한 연구가 필요하다.

본 논문에서는 MCS를 이용한 동압력 교정기의 불확도 산출방법에 대해 기술하였다. 20,000psi부터 80,000psi까지 단계적으로 압력을 발생시켜 실험하였으며, 기준 센서와 교정 센서의 응답특성과 불확도 요인의 확률분포를 통해 랜덤함수를 발생하고 수학적 모델식에 반복 적용하여 확장 불확도(expanded uncertainty)를 산출하였다. 이 결과를 기존의 적용하였던 GUM에 의한 불확도 전파법칙을 통한 결과와 비교 분석하였다.

2. 동압력 교정기 특성

가. 동압력 교정 방법 및 불확도 요인^[2]

동압력 교정기의 시스템 구성도는 Fig. 1과 같다. 1단계 압력 펌프를 이용하여 약 35,000psi까지 압력 탱크에 압력을 발생시키고, 2단계 고압력 압축기가 65,000psi 이상의 압력을 체적을 변화시켜 최대 범위까지 압축한다. 압력 발생부에서 압력 변환부에 인가되는 압력을 기준 센서를 통해 획득하고, 압력 변환부의 밸브가 열리면 정압력이 동압력으로 변환되면서 교정 센서의 출력이 신호 조절기 및 A/D 변환부를 통해 자료 처리된다.

동압력 교정시 발생할 수 있는 우연효과의 불확도, 분해능에 의한 불확도, 교정환경 및 방법에 의한 불확도를 검토했을 때 다음과 같은 측정 오차 요인을 고려한다.

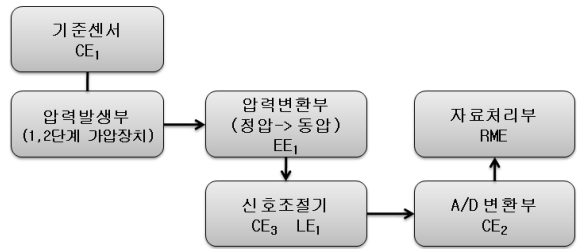


Fig. 1. 동압력교정기 시스템 구성도



Fig. 2. 동압력교정기

- 기준센서 오차 (CE_1)
- A/D 변환기 오차 (CE_2)
- 신호조절기 이득 오차 (CE_3)
- 신호조절기 직선성 오차 (LE_1)
- 압력 변환 오차 (TE_1)
- 교정센서 직선성 오차 (LE_2)

1) 기준센서에 의한 불확도

기준 압력센서는 불확도가 0.0009%(95% 신뢰수준)인 표준기(표준과학연구원)로부터 교정 소급된 스트레인 게이지형 센서로 일반적인 성능은 다음과 같다.

- 측정범위 : 145,000psi
- 감도 : 0.0684mV/psi
- 교정불확도 : 0.11% of F.S

2) A/D변환기에 의한 불확도

A/D변환기 성능은 입력범위가 ±10V, 양자화 분해능은 24bit이며, 샘플링수는 100kS/sec이며, 이득오차는

±0.01dB@DC, max이다. 이득오차를 통한 불확도는 0.065% of F.S이고, 직사각형 분포이다.

3) 신호조절기 오차에 의한 불확도

신호조절기는 제작사의 규격에서 제시된 이득 안정도 오차 0.02%, 직진성 오차 0.05%를 적용하며 직사각형 분포이다.

4) 압력변환 오차에 의한 불확도

압력변환기 불확도 성분은 압력저장 탱크대 시험챔버의 부피비가 1,000 대 1의 압력변화를 고려하여 0.05%의 오차를 갖으며 직사각형 분포이다.

5) 교정센서 직진성 오차에 의한 불확도

교정센서는 압전형 압력센서로 Kistler 6213BK를 사용했으며, 측정 최고압력은 145,000psi이고, 직진성 오차는 0.3% of F.S이고, 직사각형 분포이다.

나. 수학적 모델링⁽³⁾

동압력 교정기 압력 계산식은 식 (1)과 같으며, 주요 측정 불확도 오차 요인을 적용한 오차항 ΔP 는 식 (2)와 같다.

$$P_g = P_{c(i)} + \Delta P \quad (1)$$

여기서 P_g 는 출력량(수정된 압력), $P_{c(i)}$ 는 입력량식 (3)에 의해 구해진 압력 그리고 ΔP 는 오차항이며, P_c 는 반복성에 의해 야기된 오차이다.

$$\Delta P = \delta P_c + \delta P_{CE_1} + \delta P_{CE_2} + \delta P_{CE_3} + \delta P_{LE_1} + \delta P_{TE_1} + \delta P_{LE_2} \quad (2)$$

$$P_{c(i)} = \sum_i^n \frac{C_{f(i)}}{n} \times P_{t(i)} \quad (3)$$

$$C_{f(i)} = \frac{P_{r(i)}}{P_{t(i)}} \quad (4)$$

여기서 $C_{f(i)}$ 는 교정기에서 사용하는 압력센서의 교정 factor이며, $P_{r(i)}$ 는 i^{th} 기준센서의 값이고, $P_{t(i)}$ 는 i^{th} 교정하는 센서의 값이다. Kacker와 Jones의 표준편차와 불확도 법칙을 이용하여 식 (5)와 (6)을 유도한다.

$$\sigma(P_{c(i)}) = \sqrt{\frac{\sum_i^n (P_{c(i)} - \overline{P_{c(i)}})^2}{n-1}} \quad (5)$$

$$u(P_{c(i)}) = \frac{\left[\sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \right] \times \sigma(P_c)}{\sqrt{n}} \quad (6)$$

압력구간에서 발생할 수 있는 반복성에 의한 표준 불확도는 식 (7)과 같다.

$$u(\delta P_c) = \sqrt{c_1^2 \cdot u^2(\overline{C_f}) + c_2^2 \cdot u^2(P_{t(i)}) + u^2(P_{r(i)} - P_{t(i)})} \quad (7)$$

여기서 $c_1 = \frac{\partial P_{c(i)}}{\partial C_f}$, $c_2 = \frac{\partial P_{c(i)}}{\partial P_{t(i)}}$ 는 각 압력구간 편차에서 야기되는 감도계수(sensitivity coefficient)이고, 식 (6)에 의하여 구해지는 최대값 $\max u(P_{c(i)})$ 는 $u(P_{t(i)})$ 과 같다.

동압력 교정기의 측정 불확도 오차 요인(E)에 대한 분산은 식 (9)로 표현되며 Welch- Scatterthwaite 공식을 이용해 유효자유도(effective degree of freedom, ν_{eff})를 구한다.

$$E = f(P_c, CE_1, CE_2, CE_3, LE_1, TE_1, LE_2) \quad (8)$$

$$u_c^2(E) = \left[\frac{\delta E}{\delta P_c} u(\delta P_c) \right]^2 + \left[\frac{\delta E}{\delta CE_1} u(\delta CE_1) \right]^2 + \left[\frac{\delta E}{\delta CE_2} u(\delta CE_2) \right]^2 + \left[\frac{\delta E}{\delta CE_3} u(\delta CE_3) \right]^2 + \left[\frac{\delta E}{\delta \leq_1} u(\delta \leq_1) \right]^2 + \left[\frac{\delta E}{\delta TE_1} u(\delta TE_1) \right]^2 + \left[\frac{\delta E}{\delta \leq_2} u(\delta \leq_2) \right]^2 \quad (9)$$

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=0}^n \frac{C_i^4 u^4(x_i)}{\nu_i}} \quad (10)$$

여기서 x_i 는 입력변수, y 는 출력변수이다.

$$\nu_{eff} < \sum_{i=1}^n \nu_i \quad (11)$$

$C_i \equiv \delta f / \delta x_i$ 이고, 모든 $u(x_i)$ 는 상호독립이며, ν_i 는 $u(x_i)$ 의 자유도이고, 식 (11)의 조건을 만족한다.

3. GUM의 불확도 전파법칙과 MCS에 의한 불확도 평가결과

동압력 교정기의 불확도 초기설계 목표치는 1.5%

이내였으며, 현재 불확도는 1% of F.S 이내로 관리하고 있다. GUM의 불확도 전파법칙을 이용한 불확도 산출방법과 MCS에 의한 불확도 비교 평가를 위해 20,000psi 압력부터 단계적으로 20,000psi 압력을 상승하면서 5번씩 총 20회 실시하였으며, 실험결과 중 압력 누설(leakage)로 인한 결과 3회를 제외한 17회 결과를 비교 분석하였다.

가. GUM의 불확도 전파법칙에 의한 불확도 평가
동압력 교정기의 불확도 산출을 위해 현재까지 GUM에 의한 불확도 전파 법칙을 적용해 왔으며, 불확도

Table 1. GUM의 불확도 전파법칙에 의한 동압력 교정기 불확도 분석

Standard Pressure	Indicated Pressure	Calibration Factor P_r/P_t	Modeled Indicated Pressure $\overline{C}_f \cdot P_t$	Standard Deviation (P_c)	Deviation ($P_r - P_c$)
P_r (psi)	P_t (psi)	C_f (psi)	P_c (psi)	$\sigma P_{c(i)}$ (psi)	(psi)
20278	20310	0.998424	20370.729	239.980	-92.729
20048	20150	0.994938	20210.251		-162.251
19912	19867	1.002265	19926.405		-14.405
19755	19797	0.997878	19856.196		-101.196
20313	20294	1.000936	20354.682		-41.682
40256	40278	0.999454	40398.436	179.136	-142.436
40334	39986	1.008703	40105.563		228.437
40360	39994	1.009151	40113.587		246.413
40089	39854	1.005897	39973.169		115.831
59519	59904	0.993573	60083.121	372.055	-564.121
60270	59985	1.004751	60164.363		105.637
59919	59650	1.004510	59828.361		90.639
59644	59195	1.007585	59372.001		271.999
59707	59221	1.008207	59398.078		308.922
77977	77789	1.002417	78021.599	220.211	-44.599
77823	77428	1.005102	77659.520		163.480
78373	77825	1.007041	78057.707		315.293
Mean Calibration Factor (\overline{C}_f)	Standard Deviation of C_f		$\max\{ \sigma P_d \}$	$\max u(P_{c(i)})$	
1.002990	0.00482		372.055	96.46687	
$C_1 = P_t = 80000$	$C_2 = \overline{C}_f$		$u(\overline{C}_f) = 0.00125$	$u(P_{r(i)} - P_{t(i)}) = 64.1462$	
$u(\delta P_c) = 0.047\%, u(P_{t(i)}) = \max u(P_{c(i)})$					

Table 2. GUM에 의한 교정기 불확도 총괄표

Source of Uncertainty	Type	Probability Distribution	Sensitivity Coefficient	Divisor	Degree of Freedom	Standard Uncertainty
Repeatability $u(\delta P_c)$	A	t	1	$\sqrt{17}$	16	0.05
$u(CE_1)$	B	Normal	1	1	∞	0.11
$u(CE_2)$	B	Rectangular	1	$\sqrt{3}$	∞	0.06
$u(CE_3)$	B	Rectangular	1	$\sqrt{3}$	∞	0.02
$u(LE_1)$	B	Rectangular	1	$\sqrt{3}$	∞	0.05
$u(LE_2)$	B	Rectangular	1	$\sqrt{3}$	∞	0.3
$u(TE_1)$	B	Rectangular	1	$\sqrt{3}$	∞	0.05
$u(P_g) = 0.2683\%$	Expanded uncertainty $U(P_g) = 0.54\%$, @80,000psi = ± 429.271 psi (Confidence Level =95%, k=2)					

평가절차는 Fig. 3과 같다.

먼저 측정항목과 불확도 성분은 식 (2)와 같으며, 반복측정에 의해 계산되어진 $u(\delta P_c)$ 은 A형 불확도를 적용하고 나머지는 B형 불확도를 적용했다. 이때 각각의 감도계수는 1이 된다. Table 1은 반복성에 의한 불확도 요인에 대한 표준불확도 산출 결과이며, Table 2는 불확도 요인에 확률분포에 맞는 적용인자를 적용한 표준불확도와 합성 표준불확도 결과를 나타낸다.

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\frac{u^4(\delta P_c)}{\infty} + \frac{u^4(CE_1)}{\infty} + \frac{u^4(CE_2)}{\infty}} + \frac{u_c^4}{\frac{u^4(CE_1)}{\infty} + \frac{u^4(LE_1)}{\infty} + \frac{u^4(LE_2)}{\infty} + \frac{u^4(TE_1)}{\infty}} \quad (12)$$

유효자유도(ν_{eff})는 식 (12)로 표현되며, 추정범위의 한계값에 대하여 100%확신 또는 “0%까지 신뢰할 수 있음”이라고 추정되므로 상대불확도를 백분율로 나타내는 $R = 0\%$ 가 되고 유효자유도는 ∞ 가 된다. 따라서 신뢰수준이 약 95%일때 포함인자(coverage factor)인 k의 값은 2가 되고 확장불확도는 Table 2와 같다^[3].

나. MCS에 의한 불확도 평가^[4~9]

MCS 방법으로 구하기 위해서는 Fig. 4와 같이 먼저 측정량에 대한 수학적 모델식과 각 입력량의 크기와 표준불확도 외에 각 입력량의 분포형식을 추가적으로 알아야 한다. 그리고, 각 입력량의 분포형식에 따른 난수를 구하고, 이들 난수들을 측정 모델식에 대입하여 반복 계산함으로써 확장불확도를 구하는 것이다.

MCS는 입력량의 불확도 분포에 대한 정보를 사용하여 불확도를 전파시키기 때문에 GUM의 테일러 급수에 의한 근사법과 달리 계산의 오류가 최소화된다.

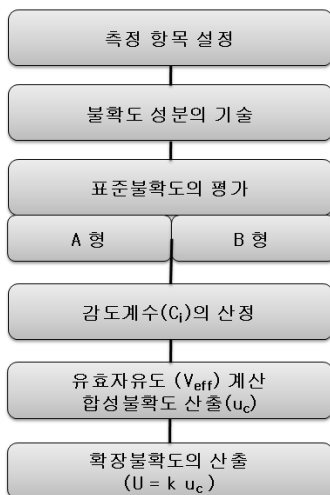


Fig. 3. 불확도 전파법칙에 의한 불확도 산출절차

그러나 반복 계산의 횟수가 정확성에 영향을 미치고 횟수가 너무 적은 경우 모사된 각 입력량의 표준편차가 실제 목표로 했던 값과 상이하게 된다. 최소 1,000 번 이상의 모사가 입력변수의 표준편차와 분산을 입력변수의 목표 값에 수렴하기 만든다고 알려져 있으며 본 연구에서는 5,000회의 결과가 10,000회의 계산 결과와 수렴하여 일치하기 때문에 5,000회의 결과를 이용하였고, 입력량에 따른 분포형식의 난수를 발생 및 시뮬레이션하기 위해 Matlab을 이용하였다.

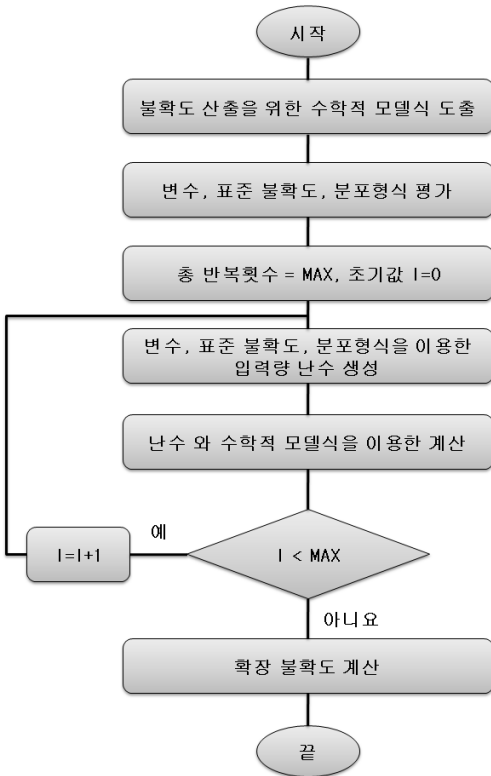


Fig. 4. MCS에 의한 불확도 산출절차

Fig. 5는 불확도 요인의 확률분포 종류에 따라 각각 t 분포, 정규분포 그리고 직사각형 분포의 난수발생 결과를 보여주고 있다. 이렇게 발생된 난수를 동압력 교정기 수학적 모델식에 적용하여 결과값에 평균을 취하고 표준불확도를 계산하면 Fig. 6과 같은 결과를 얻을 수 있다. 모사횟수를 2,000번, 3,000번 수행한 결과와 5,000번 수행한 결과를 비교해보면 모사 횟수가 많아질수록 표준불확도 $u(P_g)$ 는 0.2428%로 수렴해간다.

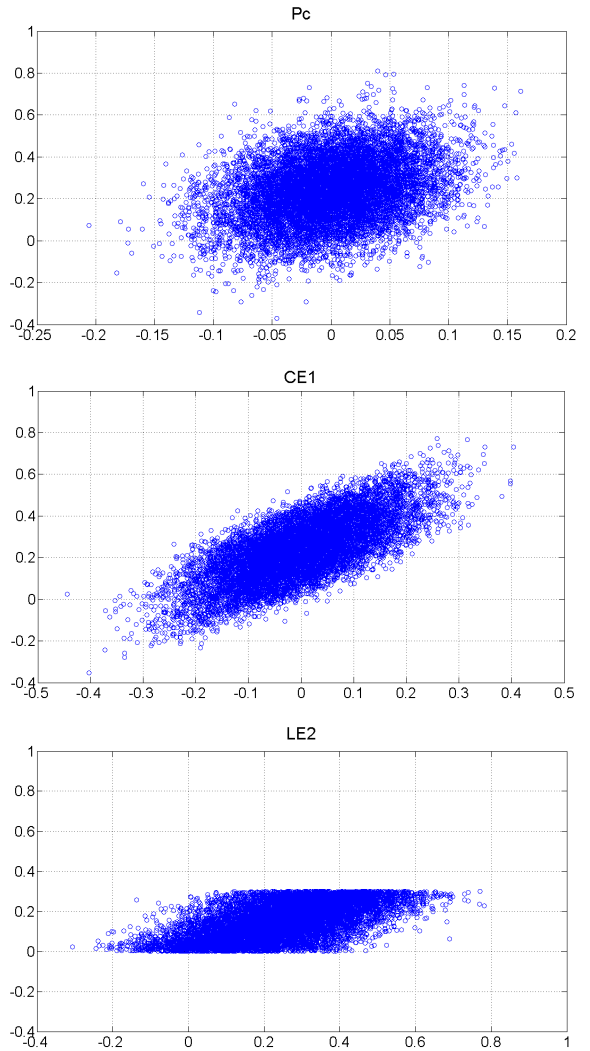


Fig. 5. MCS 정규분포 난수발생 결과

$$ST_{P_g} = \frac{1}{N\sigma_{P_g}(P_g)^3} \sum_{i=1}^N (P_{g(i)} - \bar{P}_g)^3 \quad (13)$$

$$KT_{P_g} = \frac{1}{N\sigma_{P_g}(P_g)^4} \sum_{i=1}^N (P_{g(i)} - \bar{P}_g)^4 \quad (14)$$

모사된 표준불확도의 왜도(skewness)를 식 (13)을 통해 알아보면 0.0011로 분포의 치우침이 거의 없고 첨도(kurtosis)를 식 (14)를 통해 알아보면 2.8391로 정규분포보다 약간 더 뾰족한 형태로 모사됐음을 알 수 있다. Fig. 7은 모사 횟수에 따른 왜도와 첨도결과이다.

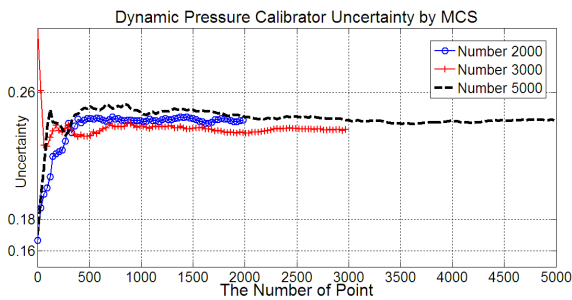
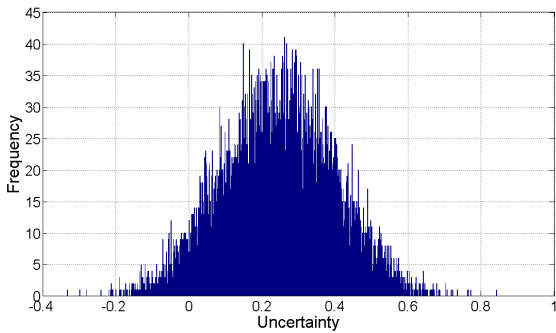


Fig. 6. MCS 불확도 모사 결과

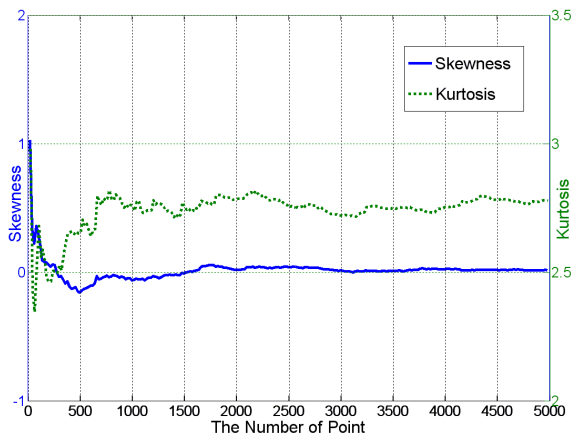


Fig. 7. MCS 결과의 왜도와 첨도

4. GUM과 MCS 불확도 평가결과 비교

GUM에서 제시한 불확도 전파법칙과 MCS 결과를 비교해 볼 때, 5,000회 모사를 통한 확장불확도가 0.051% 정도 낮게 산출되었다. 이러한 오차는 측정 모델식을 1차 테일러 전개에 의해 근사시킬 때 비선형성이 클 경우 GUM에 의한 불확도는 고차전개항이

포함안되기 때문에 오차가 생기며, 입력변수의 확률분포함수가 다르고 시험시료가 적은 변수값의 합성으로 산출된 추정표준편차가 변수의 분산, 분포형태 등을 나타낼 수 없기 때문에 MCS의 불확도와 차이를 나타낸다.

Table 3. GUM과 MCS에 의한 불확도 비교 결과 (최고압력이 80,000psi일 때)

Uncertainty	GUM	MCS
Standard Uncertainty $u(P_g)$ [%]	0.27	0.24
Expanded Uncertainty $U(P_g)$ [%]	0.54	0.49
Expanded Uncertainty $U(P_g)$ [psi]	± 429.27	± 388.48

5. 결론

본 연구에서는 동압력 교정기의 불확도 산출의 신뢰성을 높이기 위하여 기존의 GUM의 불확도 전파법칙에 의한 산출방법과 비교하여 MCS를 이용한 불확도 산출방법에 대하여 기술하였다. Basil과 Jamieson의 MCS에 의한 불확도 정확도 연구^[4]에 의하면 선형적이고 입력변수의 개수가 적은 경우 GUM의 불확도 계산값과 유사하게 나타났으며, 비선형적이고 입력변수의 개수가 많은 복잡한 시스템 불확도는 차이를 보인다고 발표하였다. 이 연구 결과를 바탕으로 국내에서도 기계, 화학 및 유체 분야뿐만 아니라 여러 분야에서 불확도를 산출하는데 MCS를 적용 또는 검토하고 있다. 이번 연구는 종합시험단에서 수행하는 불확도 측정에 신뢰성을 높이는 목적이며, 실험 결과는 기존의 방법과 합성 표준불확도 차이가 0.051%, $\pm 40.79\text{psi}$ 차이를 나타냈다. 이것은 정확한 수학적 모델식과 입력변수 및 확률분포를 분석하여 모사를 할 경우 MCS 방법이 GUM의 근사법을 보완 또는 대체가 가능함을 확인하였다.

향후 MCS 방법의 신뢰성을 높이고 불확도 전파법칙의 불확도 평가결과와 차이점을 입증하기 위하여 입력변수 개수와 고차항에 따른 불확도 평가연구가

필요하고 추가적으로 선형성 및 비선형성 시스템의 불확도 비교연구가 필요하다.

References

- [1] 최주호, 홍성수, “정방향 스텝 동압력 교정장치 개발보고서”, 국방과학연구소, DSTC-409-010372, 2001.
- [2] 최주호, “측정 불확도 평가”, 한림원, pp. 85~90, 2006.
- [3] ISO, “Guide to the Expression of Uncertainty in Measurements”, 1999.
- [4] Martin Basil and Andrew W Jamieson, “Uncertainty of Complex Systems by Monte Carlo Simulation”, 16th North Sea Flow Measurement Workshop, Gleneagles, 1998.
- [5] Martin Basil and Christos Papadopoulos, “Application of Probabilistic Uncertainty Methods (Monte-Carlo Simulation) in Flow Measurement Uncertainty Estimation”, Flow Measurement 2001-International Conference, 2001.
- [6] Bo-Hwa Lee and KyungJae Lee, Inyoung Yang, Bong-Jun Cha, Sooseok Yang, “Uncertainty Assessment Using Monte Carlo Simulation in Net Thrust Measurement”, KSME Conference, pp. 7~12, 2006. 11.
- [7] Jungkee Suh and Hyungsik Min, “A Study on Comparison between the Propagation of Uncertainty by GUM and Monte Carlo Simulation”, Journal of the Korean Chemical Society Vol. 47, No. 1, pp. 31~37, 2003.
- [8] Samik Raychaudhuri, “Introduction to Monte Carlo Simulation”, Proceeding of the 2008 Winter Simulation Conference, 2008.
- [9] Michael Bair, “Guide to Determining Pressure Measurement Uncertainty For Q-Rpt Based Products”, Fluke Technical Note 8050TN11, 2009.