East Asian Mathematical Journal
Vol. 26 (2010), No. 4, pp. 535-551

각뿔과 각뿔대의 부피에 대하여 산학서(『算學正義(上編)』, 『九章術解』)와 한국· 중국수학교과서와의 내용 비교연구

박 영 식 · 최 길 남

ABSTRACT. In this paper, we investigate the methodology to calculate the volume of the pyramid and frustum of the pyramid that is found in Gu Jang Sel Hae and San Hak Jeong Ui(The first volume)text. Comparing and analyzing content in Korean and Chinese mathematics education textbooks that uses as a foundation the aforementioned methodology, it is proposed that in future development of mathematics education curriculum the area of solid geometry be taught in greater depth in basic study guides.

Ⅰ. 서론

산학서 『구장술해』는 『구장산술(九章算術)』에 수록된 9장 246문제를 남병길(南秉吉:1820~1869)이 해석을 붙인 해설서이다. 『구장산술』은 263년 위(魏)의 유휘(劉徽)가 주를 붙이고, 당(唐) 초기 이순풍(李淳風:602~670) 등이 그 위에 주석을 붙임으로써 현재와 같은 방전장(方田章) 38문제, 속미장(粟米章) 46문제, 쇠분장(衰分章) 20문제, 소광장(少廣章) 24문제, 상공장(商功章) 28문제, 균수장(均輸章) 28문제, 영부족장(盈不足章) 20문제, 방정장(方程章) 18문제, 그리고 구고장(句股章) 24문제로 구성된 산학서이다.

『산학정의』는 남병길이 편찬하고 이상혁(李尙爀:1810~?)이 교정한 것으로 남병길은 서문(序文)에 “정묘하(丁卯夏)에 쓰다.”라고 되어 있어 1867년(高宗 4년)에 완성하여 목주자(木鑄字)로 간행된 것으로 상중하 3편으로 나누어져 있다.

본 논문에서는 『구장술해』5장 상공장과 『산학정의』상편의 각체율(各體率)에 수록되어 있는 입체도형 즉, 방추(方錐:정사각뿔), 원추(圓錐:원뿔), 참도(塹堵:직각삼각기둥), 양마(陽馬:사각뿔), 별노(鼈臑:직각삼각뿔), 방대(方臺:정사각뿔대),

2010년 8월 투고, 2010년 8월 심사완료.
2000 Mathematics Subject Classification : 97-03, 01A75
Key words: 각뿔과 각뿔대에 대한 부피 알고리즘

부등장방체(不等長方體:사각뿔대), 원대(圓臺:원뿔대), 원구(圓球:구) 중에서 각뿔(원뿔)과 각뿔대(원뿔대)의 부피에 대한 개념과 그 계산법을 고찰한다.

각기둥과 각뿔의 부피를 구하기 위해서 남병길은 『구장술해』의 권5 상공에서 "대개 한 개의 정방체를 나누어 2개의 참도체를 얻는다. 한 개의 참도체를 나누어 한 개의 양마와 한 개의 별노를 얻고, 한 개의 양마체는 2개의 별노를 얻어 이 양마체는 참도체의 $\frac{2}{3}$이다"(夫一正方體剖之得二壍堵一壍堵體剖之得一陽馬一鼈臑而一陽馬體剖之又得二鼈臑是陽馬體爲壍堵體三分之二)라고 서술한 것은 서양의 古典인 유클리드(BC 300)의 『원론』에 의해, "밑면이 삼각형인 각기둥은 밑면이 삼각형이며 부피가 서로 같은 세 개의 각뿔로 쪼갤 수 있다. 따라서 각뿔(원뿔)과 각기둥(원기둥)이 밑면이 같고 높이가 같으면 각뿔(원뿔)의 부피는 각기둥(원기둥)부피의 $\frac{1}{3}$이다."라고 서술한 것과 같은 의미이다.

본 논문에서 다루고 있는 수학 교과서의 내용은 한국의 『중학교수학 Ⅰ』과 중국의 『입체기하』의 입체도형 중 각뿔(원뿔)과 각뿔대(원뿔대)의 부피에 대한 것이다. 따라서 본 연구는 『구장술해』의 상공장과 『산학정의』 상편의 각체율에서 서술한 각뿔과 각뿔대의 부피의 개념과 그 계산법을 고찰하고, 그것을 토대로 하여 오늘날의 한국·중국의 수학 교과서에서 다루고 있는 관련되는 내용을 서로 비교 분석함으로써, 앞으로의 교과서 저술과 학습지도에 도움을 주고자 한다. 본문의 구장술해에서 표기 「」는 구장산술의 내용을 인용한 것이고, 표기 ( )는 남병길이 번역한 내용 부분이다.

Ⅱ. 본론

1. 각뿔의 부피

(1-1) 『구장술해(九章術解)』의 권5(劵五) 상공(商功)

「今有方錐 下方二丈七尺 高二丈九尺問積幾何
答曰七千四十七尺
術曰下方自乘以高乘之三而一(此方底尖體形假令下方二尺高一尺下方自乘以倍高二尺乘得八尺爲正方體此體上下四方之面皆與尖方體之底面積等又自正方體中心依各稜至各角剖之則成六尖方體此每一尖方體俱爲倍高正方體之六分之一若同高扁方體則必爲三分之一故三歸之得尖方體也)」
정사각뿔의 밑변이 2장 7자, 높이가 2장 9자이다. 부피는 얼마인가?
답 : 7.047(자^3)
풀이는 밑변을 제곱하고 높이를 곱하여 3으로 나눈다.

(가령 밑면이 정사각형인 뿔의 밑변이 2자, 높이가 1자이면 밑변을 제곱하고 2배 한 높이 2자를 곱하여 8자를 얻어 정육면체의 부피를 얻는다. 이 정육면체의 위·아랫면과 정사각뿔의 밑면의 넓이는 모두 같다. 또 정육면체의 중심에서 각 모서리에 따라 각 각(角)에 이르도록 자르면 6개의 정사각뿔이 된다. 각 뿔 모두는 높이를 2배 한 정육면체의 $\frac{1}{6}$이 된다. 만약 높이가 같은 직육면체(편방체)이면, 반드시 $\frac{1}{3}$이므로 3으로 나누어 정사각뿔의 부피를 얻는다.

(분석) 밑변이 2자, 높이가 1자인 사각뿔에서 (그림 1)과 같이 정사각뿔과 정육면체를 만든다.

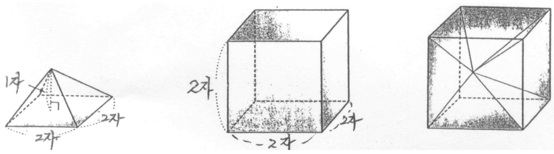


그림 1

① 밑변이 2자인 정사각형을 밑면으로 하고, 높이가 1자인 정사각뿔에서 높이를 2배 한 정육면체를 만든다.
② 정육면체에서 합동인 6개의 정사각뿔을 만든다.
③ 한 정사각뿔은 높이를 2배 한 정육면체의 $\frac{1}{6}$이 된다.
④ 한 정사각뿔의 밑면과 높이가 같은 직육면체는 3개의 정사각뿔이다.

따라서 사각뿔의 부피를 V라 하면, $6V = 2\times2\times2$에서 $V=\frac{1}{3}(2\times2\times1)$이다. 그러므로

$$(\text{정사각뿔의 부피}) = \frac{1}{3}(\text{정사각뿔과 높이가 같은 직육면체의 부피})$$

이다.

(1-2) 『산학정의(算學正義) 상권(上編)』의 각체율(各體率)

가) 「陽馬體卽尖方體之尖在一隅者與尖方體皆爲長方體三分之一也」

양마체(사각뿔) 곧, 첨방체(밑면이 직사각형인 뿔)이다. 뿔이 한 꼭지점에 있는 것으로 첨방체는 모두 장방체의 $\frac{1}{3}$이다.

나) 「鼈臑體卽以勾股面爲底之尖體故得長方體六分之一也」

별노체 즉, 구고(직삼각형)가 밑면인 첨체(직각삼각뿔)이므로 장방체의 $\frac{1}{6}$이다.

(1-3) 중국교과서 『입체기하(立体几何)』

我国古代著名数学家祖冲之(429年~500年)在计算圆周率等问题方面有光挥的成就. 祖冲之的儿子祖暅(gèng)[1]也在数学上有突出貢献. 祖暅在实践的基础上, 于5世纪末提出了下面的体积计算原理

祖暅原理 来在两个平行平面间的两个几何体被平行于这两个平行的任何平面所截, 如果截得的两个截面的面积都相等, 那么这两个几何体的体积相等.

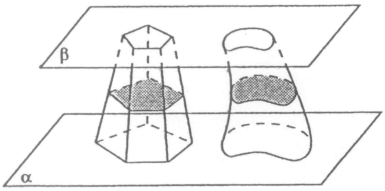


图 1

如图1, 来在平行平面 α, β间的两个几何体(它门的形状可以不同), 被平行于 α, β的任何一个平面所截, 如果截面(阴影部分)的面积都相等, 那么这两个几何体积一定相等. 祖暅提出上面的原理, 要比其他国家的数学家早一千多年. 在欲洲值到17世纪, 才有意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri. B, 1598年~1647年) 提出上述结论.

우리나라의 고대 유명한 수학자 조충지(429~500)는 원주율 등의 문제 계산에서 빛나는 성과를 이루었다. 조충지의 아들 조긍도 수학에서 뛰어난 공헌을 했다. 5세기말 조긍은 실제로 다음과 같이 부피를 계산하는 원리를 제시했다.

조긍의 원리 : 평행하는 두 평면 사이에 있는 두 입체를 그 두 평면에 평행인 임의의 평면으로 잘랐을 때, 생긴 두 단면의 넓이가 모두 같으면 그 두 입체의 부피는 서로 같다.

图 1과 같이 주어진 평행하는 두 평면 α, β 사이의 두 입체(그들의 모양은 같지 않다)를 α, β에 평행한 임의의 한 평면으로 잘랐을 때, 생긴 면(음영의 부분)의 넓이가 모두 같으면 그 두 입체의 부피는 일정하게 서로 같다. 조긍이 위의 원리를 제시한 것은 다른 나라 수학자보다 1000여년 앞선다. 17세기에 이르러 유럽에서 이탈리아 수학자 Cavalieri. B(1598~1647)[2]가 위에서 말한 결론을 제

1) 조긍(祖暅)은 당(唐)의 산학자인 조충지(祖冲之:429~500)의 아들로 π값을 정확하게 계산하는데 도움을 주었고 다른 책에는 조훤지(祖暅之)라고 기록되어 있으나 오류인 것 같다.

2) Cavalieri의 불가분량법(不可分量法:method of indivisibles) : 한 쌍의 평행한 평면 사이에 두

시했다.

定理 ： 如果三棱锥的底面积是 S，高是 h，那么它的体积是

$$V_{\text{三棱锥}} = \frac{1}{3}Sh$$

已知 ： 三棱锥 1($A' - ABC$)的底面积是S，高是 h.

求证 ： $V_{\text{三棱锥}} = \frac{1}{3}Sh$

证明 ： 把三棱锥1以 $\triangle ABC$ 为底面，AA' 为侧棱补成一个三棱柱，然后再把这个三棱柱分割成三个三棱锥，就是三棱锥1和另两个三棱锥 2，3(图2-63)

三棱锥 1，2 的底 $\triangle ABA'$，$\triangle B'A'B$的面积相等 高也相等(顶点都是 C; 三棱锥 2，3 的底 $\triangle BCB'$，$\triangle C'B'C$ 的面积相等，高地相等(顶点都是 A')

$$\therefore\ V_1 = V_2 = V_3 = \frac{1}{3}V_{\text{三棱柱}}$$
$$\because\ V_{\text{三棱柱}} = Sh$$
$$\therefore\ V_{\text{三棱锥}} = \frac{1}{3}Sh.$$

最后，因为和一个三棱锥等底面积等高的任何锥体都和这个三棱锥的体积相等，所以我们得到下面的定理:

定理 ： 如果一个锥体(棱锥，圆锥)的底面积是S，高是h，那么它的体积是

$$V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh$$

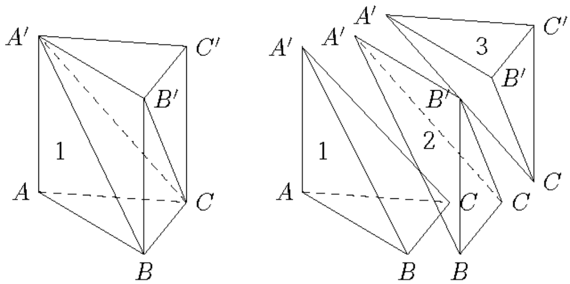


图 2-63

입체도형이 있고, 이 평면과 평행한 임의의 평면에 의해 절단된 두 입체도형의 넓이가 항상 일정한 비율이면, 두 입체도형의 부피의 비율은 그 넓이의 비율과 같다.

정리 : 삼각뿔의 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h이면 삼각뿔의 부피는 다음과 같다.

$$V_{\text{삼각뿔}} = \frac{1}{3}Sh$$

조건 : 삼각뿔1($A'-ABC$)의 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h이다.

결론 : $V_{\text{삼각뿔}} = \frac{1}{3}Sh$

삼각뿔 1을 기초로 하여 $\triangle ABC$를 밑면으로 하고 AA'를 모서리로 하는 삼각기둥을 만든 다음, 그 삼각기둥을 세 개의 삼각뿔 - 즉, 삼각뿔 1과 다른 두 삼각뿔 2, 3 - 으로 나눈다(图 2-63)

삼각뿔 1, 2의 밑면 $\triangle ABA'$, $\triangle B'A'B$의 넓이는 같으며 높이도 같다.(꼭짓점이 모두 C이다.)

$\therefore V_1 = V_2 = V_3 = \frac{1}{3}V_{\text{삼각기둥}}$

$V_{\text{삼각기둥}} = Sh$

$\therefore V_{\text{삼각뿔}} = \frac{1}{3}Sh$

한 삼각뿔과 밑면의 넓이가 같고 높이가 같은 임의의 뿔은 모두 그 삼각뿔의 부피와 같으므로 다음과 같은 정리를 얻는다.

정리 : 뿔(각뿔과 원뿔)의 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h이면, 그 부피는 다음과 같다.

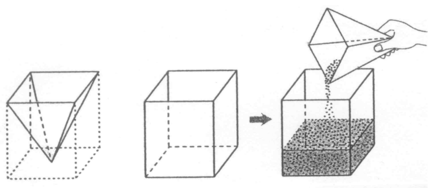
$$\therefore V_{\text{뿔}} = \frac{1}{3}Sh$$

(1-4) 한국 수학교과서『중학교수학 I』

탐구하기(뿔의 부피)

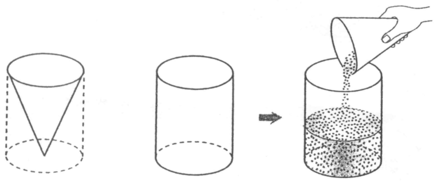
다음 물음에 답하여 보자.

(1) 다음 그림과 같이 밑면이 합동이고 높이가 같은 사각뿔과 사각기둥 모양의 그릇이 있다. 사각뿔 모양의 그릇에 물을 가득 담아 사각기둥 모양의 그릇에 부으면 몇 번만에 가득 채워지는지 알아보아라.



(2) 다음 그림과 같이 밑면이 합동이고 높이가 같은 원뿔과 원기둥 모양의 그릇이 있다. 원기둥의 부피가 원뿔의 부피의 몇 배인지 물음(1)과 같은 방법으로 알

아보아라.



알아보기

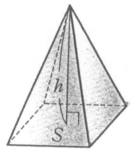
탐구하기에서 사각뿔과 원뿔 모양의 그릇에 물을 가득 담아 붓는 일을 세 번 반복하면, 각각 사각기둥과 원기둥 모양의 그릇을 가득 채울 수 있다.

실제로 각뿔과 원뿔의 부피는 각각 밑면이 합동이고, 높이가 같은 각기둥과 원기둥의 부피의 $\frac{1}{3}$이다.

$$(\text{각뿔 또는 원뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times (\text{밑넓이}) \times (\text{높이})$$

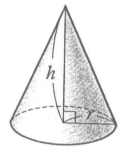
이상을 정리하면 다음과 같다.

각뿔, 원뿔의 부피



밑넓이가 S이고 높이가 h인 각뿔, 원뿔의 부피 V는

$$V = \frac{1}{3}Sh$$



특히, 밑면인 원의 반지름의 길이가 r이고, 높이가 h인 원뿔의 부피는 V는

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

(분석) 중국 수학교과서에서 삼각뿔은 삼각기둥을 3개의 삼각뿔로 나누어 삼각뿔의 부피가 삼각기둥 부피의 $\frac{1}{3}$임을 보인 반면, 한국수학교과서는 사각기둥을 3개의 삼각뿔로 나누어 사각뿔의 부피가 사각기둥 부피의 $\frac{1}{3}$임을 보였다. 중국수학교과서에는 조긍의 원리(또는 Cavalieri의 불가분량법)에 의해 각뿔의 부피를 $\frac{(\text{밑넓이}) \times (\text{높이})}{3}$로 나타내고 있으나, 오늘날 한국 중·고등학교 수학과 교육과정의 내용 중 입체도형과 측정, 그리고 기하에서는 Cavalieri의 불가분량법에 대한 내용이 전혀 언급되지 않고 각뿔의 부피를 구하는 공식만을 보여주고 있다.

2. 각뿔대의 부피

(2-1) 『구장술해(九章術解)』권5(卷五)의 상공(商功)에서

추동(芻童)은 사각뿔대로 그 부피를 다음과 같이 서술하고 있다.

「芻童曲池盤池冥谷皆同術.
術曰 倍上袤下袤從之亦倍下袤上袤從之各以其廣乘之并以高若深乘之皆六而一
(此倍上袤加下袤與上廣相乘卽上袤上廣相乘倍之 又加上廣乘下袤之數此長方面三也倍下袤加上袤與下廣相乘卽下袤下廣相乘倍之又加下廣乘上袤之數此長方面三也將此六長方面形以高乘之得六長方體形其二上下方面俱如上袤上廣相乘面也其二上下[3]方面俱如下袤下廣相乘面也其一上[4]下方面俱如上廣下袤相乘面也其一上下方面俱如上袤下廣相乘面也以下袤下廣相乘之二長方體比上袤上廣相乘之二長方體其四面多八方廉體四角又多八長廉體又以上廣下袤相乘之一長方體比上袤上廣相乘之一長方體其兩傍多二方廉體又以上袤下廣相乘之一長方體比上袤上廣相乘之一長方體其兩邊多二方廉體 共得六長方體十二方廉體八長廉體乃以每一方廉體變爲二塹堵體每一長廉體變爲三陽馬體共得二十四塹堵體二十四陽馬體將六長方體 各加四塹堵體 四陽馬體 則成芻童者六故以六除之得一芻童體也)」

추동 곡지 반지는 모두 같은 방법으로 구한다.

풀이는 윗면의 길이를 2배 하여 아랫면의 길이에 더하고 또, 아랫면의 길이에 2배 하여 윗면의 길이를 더하고, 각각 그 너비를 곱하여 더한 후 높이 또는 깊이를 곱해 6으로 나눈다.

(이것은 윗면의 길이를 2배 하여 아랫면의 길이에 더하고 윗면의 너비를 서로 곱한다. 즉, 윗면의 길이와 윗면의 너비를 서로 곱하여 2배하고 또 윗면의 너비를 아랫면의 길이에 곱한 수를 더한다. 이것은 장방면으로 3개이다. 아랫면의 길이를 2배 하여 윗면의 길이에 더하고, 아랫면의 너비를 서로 곱한다. 즉, 아랫면의 길이와 아랫면의 너비를 서로 곱하여 2배 하고 또 아랫면의 너비를 윗면의 길이에 곱한 수를 더한다. 이것은 장방면으로 3개이다.

또한 이 6개의 장방면에 높이를 곱하면 6개의 장방체를 얻는다.

그 두 개의 윗방면은 모두 윗면의 길이와 윗면의 너비를 서로 곱한 넓이와 같다.

그 두 개의 아랫방면은 모두 아랫면의 길이와 아랫면의 너비를 서로 곱한 넓이와 같다.

그 한 개의 위·아랫방면은 모두 윗면의 너비와 아랫면의 길이를 서로 곱한 넓이와 같다.

그 한 개의 위·아랫방면은 모두 윗면의 길이와 아랫면의 너비를 서로 곱한 넓이와 같다.

아랫면의 길이와 아랫면의 너비를 서로 곱하여 이루어진 장방체 2개는 윗면의 길이와 윗면의 너비를 서로 곱하여 이루어진 장방체 1개보다 그 네 면에서 8개

3) ‘下’字는 오자로 삭제
4) ‘上’字는 오자로 삭제

의 방염체와 그 네 모서리에서 8개의 장염체가 많다.

또, 윗면의 너비와 아랫면의 길이를 서로 곱하여 이루어진 장방체 1개는 윗면의 길이와 윗면의 너비를 서로 곱하여 이루어진 장방체 1개보다 그 양방에서 2개의 방염체가 많고 또, 윗면의 길이와 아랫면의 너비를 서로 곱하여 이루어진 장방체 1개는 윗면의 길이와 윗면의 너비를 서로 곱하여 이루어진 장방체 1개보다 그 양변에서 2개의 방염체가 많아 더하여 6개의 장방체를 얻는다. 방염체 1개는 참도체 2개가 되고 장염체 1개는 양마체 2개가 되어 12개의 방염체와 8개 장염체는 각각 24개 참도체와 24개 양마체가 되어 6개의 추동을 만들므로 6으로 나누면 1개의 추동체(사각뿔대)의 부피가 된다.

(분석) (그림 2, 3)으로부터 $(2x+a)y=2xy+ay$, $(2a+x)b=2ab+xb$에서 $(2xy+ay)$와 $(2ab+xb)$는 각각 3개의 장방면의 넓이다.

그러므로 $(2xy+ay)h+(2ab+xb)h$는 6개의 장방체의 부피가 된다. $2xy$와 $2ab$는 각각 윗면과 아랫면의 넓이이고

$$2abh=2xyh+(8\text{개 방염체의 부피})+(8\text{개 장염체의 부피}),$$

$$ayh=xyh+(2\text{개 방염체의 부피}),$$

그리고

$$bxh=xyh+(2\text{개의 방염체의 부피})$$

이므로

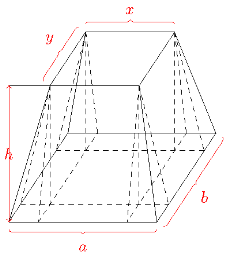


그림 2

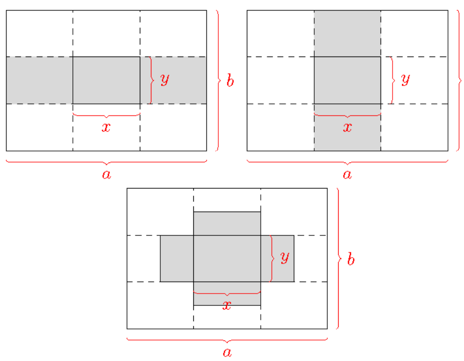


그림 3

$$\{(2x+a)y+(2a+x)b\}h$$
$$= 6xyh+(12\text{개 방염체의 부피})+(8\text{개 장염체의 부피})$$
$$= 6xyh+(24\text{개 참도체의 부피})+(24\text{개 양마체의 부피})$$

이다. 그러므로 구하고자 하는 추동체(사각뿔대)의 부피 V는 xyh, (4개 참도체의 부피)와 (4개의 양마체의 부피)의 합이므로

$$V=\frac{1}{6}\{(2x+a)y+(2a+x)b\}$$

가 된다.

(2-2) 『算學正義 上編』 각체율(各體率)에서 사각뿔대의 부피를 구하는 방법을 다음과 같이 서술하고 있다.

가) 今有上下不等長方體上長四尺闊三尺下長八尺闊六尺高十尺問積幾何

答曰二百八十尺

法以上長上闊相乘得數下長下闊相乘得數上長下闊相乘下長上闊相乘併之折半得數三數上併得八十四尺以股乘之三歸得積下長闊所成長方體比上長闊所成長方體多方廉體長廉體各四也上長下闊相乘下長上闊相乘共數折半所成長方體比上長闊相乘長方體多二方廉體也今以相併三數皆作上長闊相乘體則剩六方廉體四長廉體故每一方廉體分爲二塹堵體每一長廉體分爲三陽馬體共得十二塹堵體十二陽馬體將上長闊相乘體各加四塹堵體四陽馬體皆成不等長方體故三歸得積也」

위아래가 같지 않은 장방체에서 윗면의 길이가 4자, 너비가 3자이고 아랫변의 길이가 8자, 너비가 6자이고 높이가 10자이면, 부피는 얼마인가?

답: 280(자^3)

풀이는 윗면의 길이와 너비를 서로 곱하여 얻은 수, 아랫면의 길이와 너비를 서로 곱하여 얻은 수, 윗면의 길이와 아랫면의 너비를 서로 곱하고, 아랫면의 길이와 윗면의 너비를 서로 곱하여 더한 수의 절반인 수, 이 세수를 더하면, 84자를 얻어 높이를 곱하여 3으로 나누면, 그 부피가 된다.

아랫면의 길이와 너비로 이루어진 장방체는 윗면의 길이와 너비로 이루어진 장방체보다 방염체와 장염체가 각각 4개가 더 많다. 윗면의 길이와 아랫면의 너비를 서로 곱한 것과 아랫면의 길이와 윗면의 너비를 서로 곱한 것을 더한 수의 그 절반으로 만들어진 장방체는 윗면의 길이와 너비를 서로 곱한 장방체보다 2개의 방염체가 더 많다.

지금 서로 더한 세 수로 모두 윗면의 길이와 너비를 곱한 체를 만든다. 즉, 6개의 방염체, 4개의 장염체가 많으므로 각 1개의 방염체를 2개의 참도체로 나누고 각 1개의 장염체를 3개의 양마체로 나누어 모두 12개의 참도체와 12개의 양

마체를 얻는다. 윗면의 길이와 너비를 서로 곱한 체에 각각 4개의 참도체와 4개의 양마체를 더하면, 모두 부등장방체[5]를 만들므로 3으로 나누어 부피를 얻는다.
(분석) (그림 2, 3)에서 V_1을 아랫면의 길이와 너비로 이루어진 장방체의 부피, V_2를 윗면의 길이와 너비로 이루어진 장방체의 부피, V_3를 윗면의 길이와 아랫면의 너비를 서로 곱한 것과 아랫면의 길이와 윗면의 너비를 서로 곱한 것을 더한 그 절반으로 이루어진 장방체의 부피, 그리고 V를 사각뿔대의 부피라 하자.

$$V_1 - V_2 = (4\text{개 방염체 부피}) + (4\text{개 장염체 부피})$$

이고

$$V_3 = V_2 + (2\text{개 방염체 부피})$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 = & \{V_2 + (4\text{개 방염체 부피}) + (4\text{개 장염체 부피})\} \\ & + \{V_2 + (2\text{개 방염체 부피})\} \end{aligned}$$

이다. 1개의 방염체는 2개의 참도체로, 1개의 장염체는 3개의 양마체로 나누어지므로

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 &= 3V_2 + (12\text{개 참도체 부피}) + (12\text{개 양마체 부피}) \\ &= 3\{V_2 + (4\text{개 참도체 부피}) + (4\text{개 양마체 부피})\} \\ &= 3V \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} V(\text{부등장방체의 부피}) &= \frac{1}{3}(V_1 + V_2 + V_3) \\ &= \frac{h}{3}\left(ab + xy + \frac{ay+bx}{2}\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right) \\ &= \frac{10}{3}(48 + 12 + 24) \\ &= 280(\text{자}^3) \end{aligned}$$

여기서 $a = 8,\ b = 6, x = 4,\ y = 3, h = 10$ 이고, S_1과 S_2은 각각 아랫면과 윗면의 넓이이다.
나) 「又法下長折半以高乘之以上下長相減折半除之得二十尺爲原體上補成尖體之共高與原高相減得十尺爲補高乃以下長闊相乘以共高乘之三歸得大尖方體又以上長闊相乘以補高乘之三歸得小尖方體以減大尖方體餘爲不等體積此勾股比例也下長折半爲勾則共高爲股上下長相減折半爲勾則原高爲股」
풀이는 아랫면의 길이의 절반에 높이를 곱한 것을 위와 아래의 길이를 서로 뺀 절반으로 나누면 20자를 얻어 원체(사각뿔대)로 하고, 원체 위를 보충하여 첨체

5) 부등장방체는 사각뿔대를 말한다.

(사각뿔)를 만든다. 첨체의 공고(높이)와 원체의 높이를 서로 빼면 10자를 얻어 보고(보충한 높이)라 한다. 이에 아랫면의 길이와 너비를 서로 곱한 것에 공고를 곱하여 3으로 나누면 큰 첨방체를 얻고, 또 윗면의 길이와 너비를 곱한 것에 보고를 곱하여 3으로 나누면, 작은 첨방체를 얻어 큰 첨방체에서 빼면 나머지가 부등장방체의 부피가 된다. 이것은 구고비례이다. 아랫면의 길이의 절반이 구(勾)이면, 공고는 고(股)가 되고, 윗면과 아랫면의 길이를 서로 뺀 그 절반이 구이면, 원고는 고가 된다

(분석) (그림 4, 5)에서 직각 $\triangle ACM$과 직각$\triangle GCG'$은 닮은꼴이므로

$$h_1 : h = \frac{a}{2} : \frac{a-x}{2}$$

이다. h_1을 원래의 장방체($ECDE-FGHI$)의 위를 보충한 첨체(사각뿔)의 높이(共高)라 하면,

$$h_1(\text{사각뿔 } A-BCDE\text{의 높이}) = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a-x}{2}} = \frac{ah}{a-x} = \frac{8\times 10}{8-4} = 20$$

이고, $h_1 - h = 10 = h_2$이다. 여기서 h_2는 보충한 높이(補高)이다. 따라서 $\frac{abh_1}{3}$은 사각뿔 $A-BCDE$의 부피이고, $\frac{xyh_2}{3}$는 사각뿔 $A-FGHI$의 부피가 되므로 구하는 사각뿔대 ($ECDE-FGHI$)의 부피 V 즉, 원체(부등장방체)의 부피 V는 $V = \frac{1}{3}(abh_1 - xyh_2)$이다.

이와 같은 풀이과정은 구고비례에 의한 것으로 $\frac{a}{2}$와 h_1(共高)는 각각 직각 $\triangle ACM$의 句와 股이고 $\frac{a-x}{2}$와 h(原高)는 각각 직각$\triangle GCG'$의 句와 股이다.

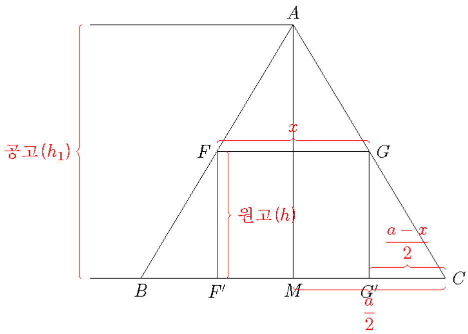


그림 4

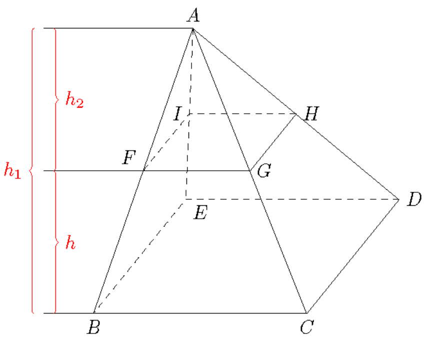


그림 5

(2-3) 중국 수학교과서『입체기하(立体几何)』

设任意台体(棱台或圆台)的上，下底面的面积分别是S'，S，高是 h. 截得台体时去掉的锥体的高是x，去掉的锥体和原来的锥体的体积分别是V'，V(图). 这时，

$$V'=\frac{1}{3}S'x,\quad V=\frac{1}{3}S(h+x)$$

所以台体的体积

$$\begin{aligned}V_{台体}&=V-V'=\frac{1}{3}S(h+x)-\frac{1}{3}S'x\\&=\frac{1}{3}[Sh+(S-S')x]\end{aligned}$$

因为台体上，下底面相似，所以

$$\frac{S'}{S}=\frac{x^2}{(h+x)^2},\quad \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}}=\frac{x}{h+x}$$

$$x=\frac{\sqrt{S'}\,h}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}$$

代入上式，得

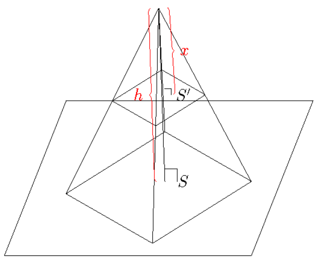
$$\begin{aligned}V_{台体}&=\frac{1}{3}h\left[S+(S-S')\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}\right]\\&=\frac{1}{3}h[S+\sqrt{S'}(\sqrt{S}+\sqrt{S'})]\\&=\frac{1}{3}h[S+\sqrt{SS'}+S']\end{aligned}$$

由此我们得到下面的定理:

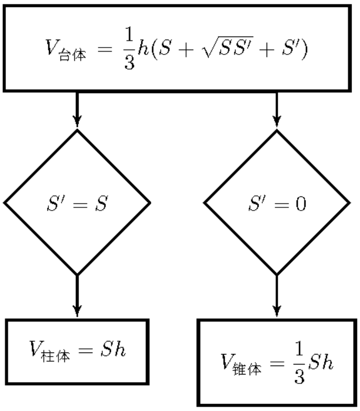
定理 ：如果台体(棱台，圆台)的上，下底面的面积分别是S'，S，高是 h，那么它的体积是

$$V_{台体}=\frac{1}{3}h\left(S+\sqrt{SS'}+S\right)$$

这样柱体，锥体，台体的体积公式之间的关系，可表示如下图 ：



图



임의의 대(각뿔대, 원뿔대)의 윗면과 아랫면의 넓이를 각각 S', S, 높이를 h, 대의 부피를 구할 때 떼어버린 뿔의 높이를 x, 떼어버린 뿔의 부피와 원래의 뿔의 부피를 각각 V', V라고 하자.

그러면 $V' = \frac{1}{3}S'x$, $V = \frac{1}{3}S(h+x)$이므로 대의 부피는

$$\begin{aligned} V_{대} &= V - V' = \frac{1}{3}S(h+x) - \frac{1}{3}S'x \\ &= \frac{1}{3}[Sh + (S - S')x]. \end{aligned}$$

이다. 대의 윗면과 아랫면은 닮음이므로

$$\frac{S'}{S} = \frac{x^2}{(h+x)^2}, \quad \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}} = \frac{x}{h+x} \qquad \therefore x = \frac{\sqrt{S'}\,h}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}$$

이다. 따라서

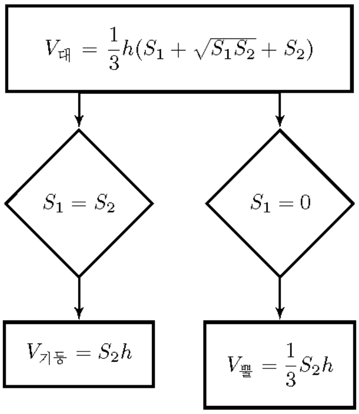
$$\begin{aligned} V_{대} &= \frac{1}{3}h\left[S + (S - S')\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}\right] \\ &= \frac{1}{3}h[S + \sqrt{S'}(\sqrt{S} + \sqrt{S'})] \\ &= \frac{1}{3}h[S + \sqrt{SS'} + S'] \end{aligned}$$

그러므로 다음 정리를 얻는다.

정리 : 대(각뿔대와 원뿔대)의 윗면과 아랫면의 넓이가 각각 S', S이고 높이가 h이면, 그 부피는 다음과 같다.

$$V_{대} = \frac{1}{3}h[S + \sqrt{SS'} + S']$$

여기서 기둥, 뿔, 대의 부피의 공식 사이의 관계를 그림으로 표시하면, 다음과 같다.



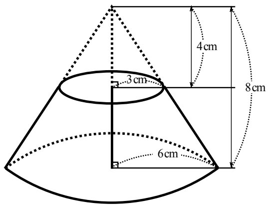
(2-4) 한국 수학교과서 『중학수학1』

(예) 오른쪽 원뿔대의 부피는 큰원뿔의 부피에서 점선부분인 작은 원뿔의 부피를 빼면 된다. 즉,

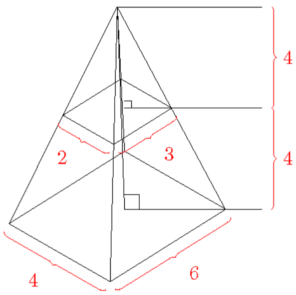
$$(\text{큰 원뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi(cm^3),$$

$$(\text{작은 원뿔의 부피}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi(cm^3)$$

$$\therefore (\text{원뿔대의 부피}) = 94\pi - 12\pi = 84\pi(cm^3)$$



(문) 그림과 같은 입체도형의 부피를 구하라.



Ⅲ. 결론 및 제언

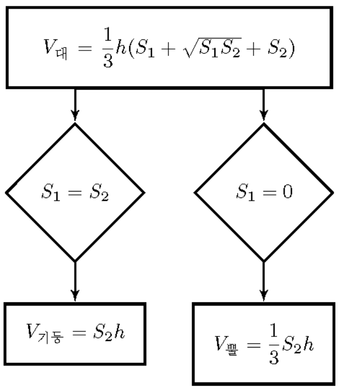
1. 한국의 수학과 교육과정 내용 중 『중학교 수학 I』의 기하 영역에서는 뿔의 부피를 계산할 때, 시각적이고 직관적인 측면만을 다루고 있는 반면에, 중국의 고급중학교 『입체기하』에서는 논증적인 면을 강조하고 있다.

2. 『중학교 수학 I』에서 사각기둥을 3개의 사각뿔로 나누어 사각뿔의 부피는 사각기둥부피의 $\frac{1}{3}$임을 보이고 있으며, 구(舊)중학교 수학교과서 『중학교 수학 7-나』에서의 뿔의 부피를 구하는 방법은 본론 (1-1)의 『구장술해』 방추(方錐:정사각뿔)의 부피를 구하는 방법과 서로 같다. 『입체기하』에는 삼각기둥을 3개의 삼각뿔로 나누어 삼각뿔의 부피가 삼각기둥 부피의 $\frac{1}{3}$임을 보이고 있다. 따라서 임의의 뿔(각뿔, 원뿔)의 부피는 조긍의 원리(Cavalieri의 불가분량법)에 의해 $\frac{(\text{밑넓이})\times(\text{높이})}{3}$로 나타내고 있으나 오늘날 한국 수학교과서에는 Cavalieri의 불가분량법에 대한 내용이 전혀 언급되지 않고 뿔(각뿔, 원뿔)의 부피를 구하는 공식만을 보여 주고 있다.

3. 각뿔대의 부피 V를 구할 때, 윗면의 길이를 x, 너비를 y, 아랫면의 길이를 a, 너비를 b, 각뿔대의 높이를 h, 그리고 윗면의 넓이를 S_1, 아랫면의 넓이를 S_2라 하면, 『산학정의』에서는 두 가지 방법 즉,

$$V=\frac{h}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)\text{와}\quad V=V_2-V_1$$

(여기서 V_1과 V_2는 각각 작은 각뿔과 큰 각뿔의 부피)으로 보이고 있다. 따라서 『입체기하』에는 『산학정의』의 두 가지 방법을 사용하고 있으나, 『중학교 수학 I』에서는 원뿔대의 부피를 구하는 방법을 『산학정의』에서 서술한 $V=V_2-V_1$만 사용하고 있어서 문제풀이의 다양성을 보여 주는 데는 부족하다고 본다. 특히 중국 수학교과서에서 기둥, 뿔, 뿔대의 부피공식 사이의 관계를 다음과 같이 보여 줌으로써 효율적인 학습지도 방안을 보이고 있다.



4. (2-4)의 『중학교 수학 I』의 (예)에서 원뿔대의 부피를 구하는 방법을 이용하여 사각뿔대의 부피 문제가 제시되어 있는데, 문제 제시 전에 Cavalieri의 불가분량법에 대한 언급이 필요하다고 본다. 따라서 기하영역에서 시각적이고 직관적

인 면에 논증적 방법을 보충하여 앞으로 수학 교과서를 저술할 때 꼭 고려되어야 함을 제언한다.

참고문헌

[1] 강옥기 외 2명, 중학교 수학7-나, (주)두산. 2007.
[2] 남병길·이상혁, 산학정의(算學正義) 상편.
[3] 남병길, 구장술해(九章術解).
[4] 양영오·조윤동 옮김, 수학의 역사(상), 경문사, 2002.
[5] 이강섭 외 4명, 중학교 수학 I, 도서출판 지학사, 2009.
[6] 최길남·박영식, 산학정의(上-1)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학논문, 9 (2) (2000), 151~167.
[7] 최길남·박영식, 산학정의(上-2)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학논문, 10 (1) (2000), 237~267.
[8] 최길남·박영식, 산학정의(上-3)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학논문, 11 (2) (2002), 37~77.
[9] 최길남·박영식, 산학정의(上-4)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학논문, 14 (1) (2004), 19~54.
[10] 최길남·박영식, 산학정의(上-5)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학논문, 15 (1) (2006), 1~25.
[11] 人民教育出版社 中学数学室 編著, 全日制 普通高級中学数科书(试验本), 数学 第二冊(下A), 立体几何, 1999.

Park Young Sik
Department of Mathematics
University of Ulsan
Ulsan 680-749, Korea
E-mail : yspark@mail.ulsan.ac.kr

Choi Kil Nam
Department of Mathematics
University of Ulsan
Ulsan 680-749, Korea
E-mail : knchoi@mail.ulsan.ac.kr