

무게중심을 이용한 사면체 내접구의 중심에 관련된 성질 탐구

한 인 기 (경상대학교)

본 연구는 사면체의 내접구의 중심을 무게중심을 이용하여 탐구하는 연구로, 사면체의 각 꼭짓점에 일정한 무게를 놓으면 이들 질량점의 무게중심이 사면체의 내접구의 중심이 된다는 것을 제시하였고, 이를 바탕으로 사면체의 내접구의 중심에 관련된 계량적 성질인 등식, 부등식을 증명하였다. 본 연구의 결과는 중등학교 수준의 수학영재교육, R&E, 과제탐구의 자료로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

1. 서론

우리를 둘러싼 주변 대상들이 공간도형이므로, 공간도형에 대한 탐구는 수학적 연구의 중요한 대상이 된다. 그러므로 수학의 고전인 Euclid 원론에서도 11-13권에 걸쳐 공간도형을 다루고 있는 것은 당연한 일이라 할 수 있다. 한편 Gotman(2006, p4)에 의하면, '공간도형의 문제는 공간표상을 길러주고 논리적으로 생각하는 능력을 길러주며, 학생들이 수학을 깊게 터득하도록 하는 훌륭한 도구'라고 하였다. 즉 공간도형에 대한 탐구는 실생활에서의 필요성 뿐만 아니라 학생들의 수학학습에서 공간표상 및 논리적 사고 능력의 계발에서도 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있다. 그리고 Kolmogorov(1959)는 공간도형을 생생하게 머릿속으로 상상하는 능력을 수학분야의 중요한 영재성으로 꼽았다. 즉 공간도형에 대한 탐구는 수학 영재교육에서도 중요한 탐구활동이며, 공간도형에 대한 표상 능력은 영재학생들이 계발해야 할 중요한 능력임을 알 수 있다.

우리나라의 초등학교, 중등학교의 수학교육에서도 공간도형을 다루고 있다는 것은 가치롭게 평가할 수 있다. 그러나 고등학교의 개정 교육과정(교육인적자원부, 2006)을 살펴보면, 공간도형과 관련하여 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치관계, 삼수선의 정리, 정사영, 공간좌표 정도만을 한 단원으로 다루고 있다. 결국 공간도형들, 다면체들의 수학적 성질에 대해서는 중등학교 수준에서 다양한 내용이 충분한 수준에서 다루어지지 못하고 있는 실정이다. 이러한 상황은 수학 영재교육에서도 비슷하다. 즉 중등학교 수학영재교육에서 활용할 수 있는 공간도형에 대한 다양한 교수-학습 자료들이 폭넓게 계발되어 있지 못하다.

사면체는 다면체 탐구의 기초가 된다. Bevez(1974, p.3)에 의하면, '사면체는 모든 다면체를 만드는

* 접수일(2009년 12월 11일), 심사(수정)일(1차: 2010년 1월 4일, 2차: 1월 24일), 게재확정일자(2010년 2월 8일)

* ZDM 분류 : G44

* MSC2000 분류 : 97D50

* 주제어 : 무게중심, 사면체, 내접구

벽들이다. 공간기하학에서 사면체는 평면기하학에서 삼각형과 같은 역할을 한다'고 주장하면서, 공간기하학에서 사면체 탐구의 중요성을 강조하였다. 사면체 탐구에 관련된 국내의 연구로는 에르든에프·한인기(2005)의 연구를 들 수 있는데, 여기서는 삼각형과의 유추를 바탕으로 사면체의 성질들을 고찰하고 있다. 본 연구에서는 삼각형의 내접원의 중심에 대한 사면체의 유추인 내접구의 중심의 성질을 무게중심을 이용하여 탐구할 것이다.

본 연구는 사면체의 내접구의 중심을 무게중심을 이용하여 탐구하는 연구로, 사면체의 각 꼭짓점에 일정한 무게를 놓으면 이들 질량점의 무게중심이 사면체의 내접구의 중심이 된다는 것을 보이고, 이를 바탕으로 사면체의 내접구의 중심에 관련된 몇몇 계량적 성질인 등식, 부등식을 유도하고, 이를 증명할 것이다. 특히 본 연구에서는 1991년 IMO에 출제된 삼각형의 내심에 부등식 문제를 사면체의 내접구의 중심으로 유추하여 새로운 부등식을 얻고 이를 증명할 것이다. 본 연구를 통해 얻어진 결과는 중등학교 수준의 수학영재교육, R&E, 과제탐구의 자료로 활용될 수 있을 것으로 기대되며, 사면체의 다양한 탐구의 한 방향을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

2. 연구의 방법 및 절차

사면체의 내접구의 중심에 관련된 등식들을 유도하고 증명하기 위해, 본 연구에서는 첫째 사면체의 내접구의 중심에 관련된 문헌연구를 수행하였으며, 둘째 문헌연구에서 얻어진 결과를 바탕으로 지렛대의 원리를 이용하여 다양한 등식들, 부등식을 유도하고, 이를 증명하였다.

(1) 문헌연구

문헌연구에서는 사면체의 내접구의 존재성, 사면체의 내접구의 중심에 관련된 기본 정리들에 대한 조사 및 증명이 이루어졌다. 사면체의 내접구의 존재성은 한인기·끌랴긴(2006)의 연구에 소개되어 있다. 이 연구에 의하면, 사면체의 내접구는 사면체의 6개의 이면각의 이등분면들의 교점이며, 이 교점으로부터 사면체의 각 면에 이르는 거리는 같다.

한편 사면체의 내접구의 중심에 관련된 벡터 등식들에 대한 문헌연구로 Kushnir I.(1996)의 연구를 고찰하였다. 이 연구에는 사면체 $DABC$ 의 내접구의 중심 I , 직선 DI 와 평면 ABC 의 교점을

J 라 할 때, 등식
$$\vec{IJ} = \frac{S_{JBC} \cdot \vec{IA} + S_{JAC} \cdot \vec{IB} + S_{JAB} \cdot \vec{IC}}{S_{JBC} + S_{JAC} + S_{JAB}}$$
 과 $S_{DBC} \cdot \vec{IA} + S_{DAC} \cdot \vec{IB} +$

$S_{DAB} \cdot \vec{IC} + S_{ABC} \cdot \vec{ID} = \vec{0}$ 이 제시되어 있고, 이들에 대한 간략한 증명 방법이 기술되어 있다. 본 연구에서는 이들 등식에 대한 상세한 증명을 제시하였고, 등식들에 대한 해석을 제시하였다.

(2) 새로운 등식들의 유도 및 증명

문헌연구로부터 얻어진 등식 $S_{DBC} \cdot \overrightarrow{IA} + S_{DAC} \cdot \overrightarrow{IB} + S_{DAB} \cdot \overrightarrow{IC} + S_{ABC} \cdot \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ 을 무게 중심의 관점에서 해석하여, 점 I 가 네 질량점 (A, a) , (B, b) , (C, c) , (D, d) 의 무게중심이라는 것을 밝혔다. 본 연구에서는 네 질량점 (A, a) , (B, b) , (C, c) , (D, d) , 이들의 무게중심 I 에 대해 지렛대의 원리, 관성능률에 대한 Lagrange 정리를 이용하여, 사면체의 새로운 등식, 부등식에 관련된 8개의 명제를 유도하였고, 이들을 증명하였다.

3. 사면체의 꼭짓점에 놓인 질량점과 내접구의 중심

평면에서의 삼각형에 대한 공간의 유추로 사면체를 생각할 수 있으며, 삼각형에 내접원이 있는 것처럼, 사면체에는 내접구가 존재한다.²⁾ 삼각형의 내접원에 관련하여서는 많은 연구들이 있었지만, 사면체의 내접구에 대해서는 알려진 사실들이 많지 않다.

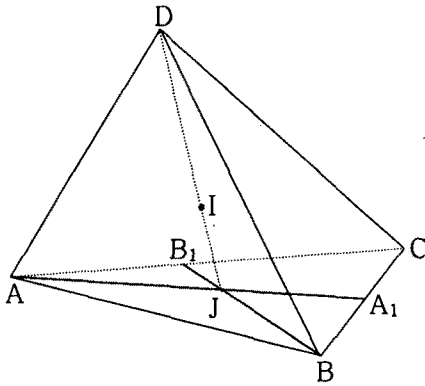
한인기(2008)는 $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ 인 삼각형 ABC 에서 각 꼭짓점에 무게 a , b , c 를 놓아 질량점 (A, a) , (B, b) , (C, c) 를 생각하면, 이들 질량점의 중심이 삼각형의 내심과 일치한다는 사실을 보이고, 이를 이용하여 내심에 관련된 몇몇 등식을 증명하였다. 본 연구는 무게중심을 이용한 삼각형의 내심에 대한 성질 탐구를 사면체로 확장시켜, 사면체 $DABC$ 의 꼭짓점 D, A, B, C 에 적당한 무게 d, a, b, c 를 놓아 질량점 (D, d) , (A, a) , (B, b) , (C, c) 를 생각하고, 이들 질량점의 무게중심이 사면체의 내접구의 중심과 일치하도록 할 것이다. 이를 바탕으로, 사면체의 내접구의 중심에 관련된 몇몇 등식들을 탐구할 것이다.

정리 1. 사면체 $DABC$ 의 내접구의 중심을 I , 직선 DI 와 평면 ABC 의 교점을 J 라 하자. 그러면 다음 등식이 성립한다.

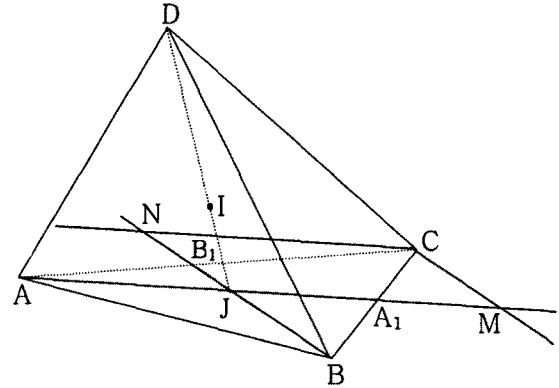
$$\overrightarrow{IJ} = \frac{S_{JBC} \cdot \overrightarrow{IA} + S_{JAC} \cdot \overrightarrow{IB} + S_{JAB} \cdot \overrightarrow{IC}}{S_{JBC} + S_{JAC} + S_{JAB}}$$

증명. 삼각형 ABC 의 꼭지점 A, B 로부터 점 J 를 지나는 선분 AA_1, BB_1 을 작도하자(그림 1). 우선 \overrightarrow{CJ} 를 $\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JB}$ 를 이용하여 나타내자. 이를 위해 점 C 를 지나 $\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JB}$ 와 평행한 직선을 그어 평행사변형 $CMJN$ 을 작도하자(그림 2). 그러면 $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN}$ 이다.

2) 사면체에서 내접구의 존재에 대한 증명은 한인기·플라긴(2006, p.96)에 제시되어 있음.



<그림 1>



<그림 2>

이때 삼각형 CA_1M 과 BA_1J , B_1CN 과 B_1AJ 가 닮음이므로, $\frac{CM}{BJ} = \frac{CA_1}{BA_1}$, $\frac{CN}{JA} = \frac{CB_1}{AB_1}$ 이 된다. 그런데 CA_1 과 BA_1 의 비는 삼각형 CAA_1 과 BAA_1 의 넓이의 비와 같다. 이때 삼각형 CJA_1 와 BJA_1 의 넓이가 같으므로, $\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{S_{JAC}}{S_{JAB}}$ 와 같다. 같은 이유로, $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{S_{JBC}}{S_{JAB}}$ 가 된다.

결국 등식 $\frac{CM}{BJ} = \frac{CA_1}{BA_1}$ 와 $\frac{CA_1}{BA_1} = \frac{S_{JAC}}{S_{JAB}}$ 로부터 $\overrightarrow{CM} = \frac{S_{JAC}}{S_{JAB}} \overrightarrow{JB}$ 가 얻어지며, 유사한 방법으로 $\overrightarrow{CN} = \frac{S_{JBC}}{S_{JAB}} \overrightarrow{JA}$ 임을 알 수 있다. $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN}$ 이므로 $\overrightarrow{CJ} = \frac{S_{JAC}}{S_{JAB}} \overrightarrow{JB} + \frac{S_{JBC}}{S_{JAB}} \overrightarrow{JA}$ 이고, $S_{JAB} \cdot \overrightarrow{CJ} = S_{JAC} \cdot \overrightarrow{JB} + S_{JBC} \cdot \overrightarrow{JA}$ 이다.

이제 $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA}$ 임을 생각하면, $S_{JAB} \cdot (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ}) = S_{JAC} \cdot (\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IB}) + S_{JBC} \cdot (\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IA})$ 이 된다. 등식의 우변에서 $\overrightarrow{JI} = -\overrightarrow{IJ}$ 임을 감안하여 이항하고, 좌변의 $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{IC}$ 임을 생각하여 이항하면, 구하는 등식이 유도된다. □

정리 1의 등식에서 삼각형 JAB , JBC , JAC 의 넓이 S_{JAB} , S_{JBC} , S_{JAC} 를 사면체의 옆면 DAB , DAC , DBC 의 넓이 S_{DAB} , S_{DAC} , S_{DBC} 를 이용하여 나타낼 수 있다.

<그림 1>에서 사면체 $DABJ$, $DBCJ$, $DACJ$ 의 부피를 생각하자. 이들의 밑면을 각각 면 JAB , JBC , JAC 라 하면 이들 사면체의 높이는 모두 h 로 같으므로, 사면체의 부피는 각각 $\frac{S_{JAB} \cdot h}{3}$, $\frac{S_{JBC} \cdot h}{3}$, $\frac{S_{JAC} \cdot h}{3}$ 이다. 한편 이들 사면체의 밑면으로 면 DAB , DBC , DAC 를 잡고, 점 J 로부터 이들 면에 그은 높이를 생각하면 이들 높이는 모두 같게 된다³⁾는 것을 생각하면

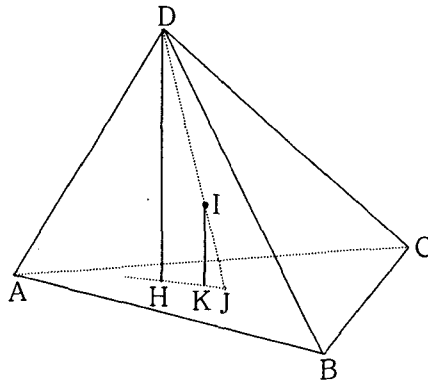
(그 높이를 k 라 하자), 그러면 사면체의 부피는 각각 $\frac{S_{DAB} \cdot k}{3}$, $\frac{S_{DBC} \cdot k}{3}$, $\frac{S_{DAC} \cdot k}{3}$ 가 된다.

결국 등식 $\frac{S_{JAB} \cdot h}{3} = \frac{S_{DAB} \cdot k}{3}$, $\frac{S_{JBC} \cdot h}{3} = \frac{S_{DBC} \cdot k}{3}$, $\frac{S_{JAC} \cdot h}{3} = \frac{S_{DAC} \cdot k}{3}$ 를 얻을 수 있으며, $S_{JAB} = S_{DAB} \cdot \frac{k}{h}$, $S_{JBC} = S_{DBC} \cdot \frac{k}{h}$, $S_{JAC} = S_{DAC} \cdot \frac{k}{h}$ 가 된다. 이제 얻어진 등식들을 정리 1의 등식에 대입하여 정리하면, $\vec{IJ} = \frac{S_{DBC} \cdot \vec{IA} + S_{DAC} \cdot \vec{IB} + S_{DAB} \cdot \vec{IC}}{S_{DBC} + S_{DAC} + S_{DAB}}$ 를 얻을 수 있다.

정리 2. 사면체 $DABC$ 의 내접구의 중심을 I 라 하면, 다음 등식이 성립한다.

$$S_{DBC} \cdot \vec{IA} + S_{DAC} \cdot \vec{IB} + S_{DAB} \cdot \vec{IC} + S_{ABC} \cdot \vec{ID} = \vec{0}$$

증명4). 내접구의 중심 I 를 지나는 직선 DJ 를 생각하자. 이제 점 D, I 로부터 면 ABC 에 수선 DH, IK 를 그으면(그림 3), 삼각형 JIK 와 JDH 는 닮음이며, $\frac{DJ}{IJ} = \frac{DH}{IK}$ 가 된다. 이때 DH 는 꼭지점 D 로부터 그은 사면체의 높이 h_D 가 되며, IK 는 내접구의 반지름 r 이다. 결국 $\frac{DJ}{IJ} = \frac{h_D}{r}$ 이다. 이로부터 $\frac{DI+IJ}{IJ} = \frac{DI}{IJ} + 1 = \frac{h_D}{r}$, 즉 $\frac{DI}{IJ} + 1 = \frac{h_D}{r}$ 임을 알 수 있다.



<그림 3>

3) 한인기·폴라긴(2006)의 p.96에 증명이 제시되어 있음.

4) 이 증명의 틀은 Kushnir I.(1996)의 연구를 바탕으로 하였음.

이제 사면체 $DABC$ 의 부피 V 를 생각하자. $V = \frac{S_{ABC} \cdot h_D}{3}$ 이므로, $h_D = \frac{3V}{S_{ABC}}$ 이다. 한편 V 는 네 개의 사면체 $IDAB, IDBC, IDAC, IABC$ 의 부피의 합과 같다는 것을 생각하면, $V = \frac{r}{3}(S_{DAB} + S_{DBC} + S_{DAC} + S_{ABC})$ 이고, $r = \frac{3V}{S_{DAB} + S_{DBC} + S_{DAC} + S_{ABC}}$ 가 된다.

얻어진 등식을 $\frac{DI}{IJ} + 1 = \frac{h_D}{r}$ 에 대입하면, $\frac{DI}{IJ} + 1 = \frac{S_{DAB} + S_{DBC} + S_{DAC} + S_{ABC}}{S_{ABC}}$ 이다. 이로부터 등식 $\frac{DI}{IJ} = \frac{S_{DAB} + S_{DBC} + S_{DAC}}{S_{ABC}}$ 를 얻을 수 있으며, $\vec{IJ} = \frac{S_{ABC}}{S_{DAB} + S_{DBC} + S_{DAC}} \vec{DI}$ 가 된다.

이제 이 등식을 정리 1의 등식 $\vec{IJ} = \frac{S_{DBC} \cdot \vec{IA} + S_{DAC} \cdot \vec{IB} + S_{DAB} \cdot \vec{IC}}{S_{DBC} + S_{DAC} + S_{DAB}}$ 와 연립하면, $S_{ABC} \cdot \vec{DI} = S_{DBC} \cdot \vec{IA} + S_{DAC} \cdot \vec{IB} + S_{DAB} \cdot \vec{IC}$ 이다. 이제 $\vec{DI} = -\vec{ID}$ 임을 생각하면, 등식 $S_{DBC} \cdot \vec{IA} + S_{DAC} \cdot \vec{IB} + S_{DAB} \cdot \vec{IC} + S_{ABC} \cdot \vec{ID} = \vec{0}$ 이 증명된다. \square

삼각형 ABC 에서 꼭짓점 A, B, C 의 대변의 길이를 각각 a, b, c 라 놓는 것과 유사하게, 사면체 $DABC$ 의 면의 넓이를 $S_{DBC} = a, S_{DAC} = b, S_{DAB} = c, S_{ABC} = d$ 라 놓자. 그러면 정리 2의 등식은 $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} + d\vec{ID} = \vec{0}$ 와 같이 쓸 수 있다.

이때 등식 $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} + d\vec{ID} = \vec{0}$ 은 점 I 가 네 질량점 $(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)$ 의 무게중심이라는 것을 의미한다⁵⁾. 즉 공간에 한 평면에 속하지 않는 네 점 A, B, C, D 에 무게 a, b, c, d 를 놓으면, 질량점 $(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)$ 의 무게중심은 사면체 $DABC$ 의 내접구의 중심과 일치한다는 것이다.

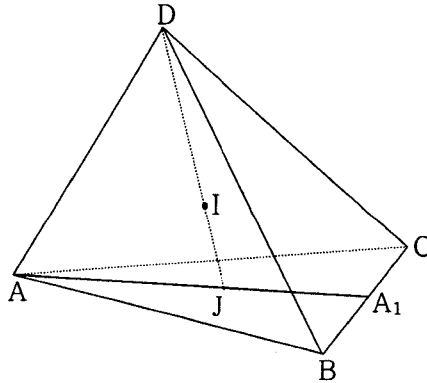
4. 사면체의 내접구의 중심에 관련된 등식 탐구

사면체 $DABC$ 의 내접구의 중심 I 는 면 DBC, DAC, DAB, ABC 의 넓이를 무게로 가지는 질량점 $(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)$ 의 무게중심이다. 그러면 무게중심 I 는 세 질량점 $(A, a), (B, b), (C, c)$ 의 무게중심과 (D, d) 을 연결하는 선분에 속하므로, 직선 DI 는 질량점 $(A, a), (B, b), (C, c)$ 의 무게중심을 지나게 된다. 결국 직선 DI 와 면 ABC 의 교점 J 는 질량점 $(A, a), (B, b), (C, c)$ 의 무게중심이 된다. 이로부터 다음 성질을 얻을 수 있다.

5) Prasolov V. & Sharygin I.(1989, p.244)에 의하면, 공간에 주어진 n 개의 질량점 (X_i, m_i) 에 대해 등식 $m_1 \vec{OX}_1 + m_2 \vec{OX}_2 + \dots + m_n \vec{OX}_n = \vec{0}$ 을 만족시키는 점 O 를 이들 질량점의 무게중심이라 부른다.

명제 1. 사면체 $DABC$ 의 꼭짓점 D 와 내접구의 중심 I 를 연결한 직선 DI 가 면 ABC 와 만나는 점을 J 라 하자. 직선 AJ 가 모서리 BC 와 만나는 점을 A_1 이라 하면, 등식 $\frac{AJ}{JA_1} = \frac{b+c}{a}$ 이 성립한다.

증명. 내접구의 중심 I 는 세 질량점 (A, a) , (B, b) , (C, c) 의 무게중심과 (D, d) 을 연결하는 선분에 DJ 에 속하므로(그림 4), J 는 질량점 (A, a) , (B, b) , (C, c) 의 무게중심이다. 그리고 A_1 도 (B, b) , (C, c) 의 무게중심이 된다. 그러면 지렛대의 원리에 의해, 등식 $\frac{AJ}{JA_1} = \frac{b+c}{a}$ 가 얻어짐을 알 수 있다. \square



<그림 4>

유사한 방법으로, 꼭짓점 B , C 로부터 점 J 를 지나는 선분 BB_1 , CC_1 을 작도하면, 명제 1과 유사한 등식 $\frac{BJ}{JB_1} = \frac{a+c}{b}$, $\frac{CJ}{JC_1} = \frac{a+b}{c}$ 을 얻을 수 있다.

이제 이들 등식을 더하면, $\frac{AJ}{JA_1} + \frac{BJ}{JB_1} + \frac{CJ}{JC_1} = \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c}$ 가 유도되며, 이들 등식을 곱하면, $\frac{AJ}{JA_1} \cdot \frac{BJ}{JB_1} \cdot \frac{CJ}{JC_1} = \frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{abc}$ 가 얻어진다.

명제 2. 사면체 $DABC$ 에서 꼭짓점 D 와 내접구의 중심 I 를 연결한 직선 DI 가 면 ABC 와 만나는 점을 J 라 하자. 그러면 $\frac{DI}{IJ} = \frac{a+b+c}{d}$ 가 성립한다.

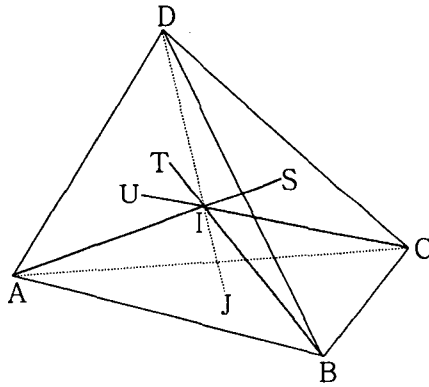
증명. 점 J 는 세 질량점 (A, a) , (B, b) , (C, c) 의 무게중심이므로, 질량점 $(J, a+b+c)$ 를 생각

할 수 있다. 내접구의 중심 I 는 질량점 $(J, a+b+c)$ 와 (D, d) 의 무게중심이므로, 지렛대의 원리에 의해, $\frac{DI}{IJ} = \frac{a+b+c}{d}$ 가 성립한다. \square

꼭짓점 A, B, C 로부터 점 I 를 지나며 면 BCD, ACD, ABD 와 점 S, T, U 에서 만하는 선분 AS, BT, CU 를 작도하면(그림 5), 세 등식 $\frac{AI}{IS} = \frac{b+c+d}{a}, \frac{BI}{IT} = \frac{a+c+d}{b}, \frac{CI}{IU} = \frac{a+b+d}{c}$ 가 얻어진다. 이들 등식을 더하거나 곱하면, 다음 등식들이 얻어진다.

$$\frac{AI}{IS} + \frac{BI}{IT} + \frac{CI}{IU} + \frac{DI}{IJ} = \frac{b+c+d}{a} + \frac{a+c+d}{b} + \frac{a+b+d}{c} + \frac{a+b+c}{d},$$

$$\frac{AI}{IS} \cdot \frac{BI}{IT} \cdot \frac{CI}{IU} \cdot \frac{DI}{IJ} = \frac{(b+c+d)(a+c+d)(a+b+d)(a+b+c)}{abcd}$$



<그림 5>

한편 등식 $\frac{DI}{IJ} = \frac{a+b+c}{d}$ 로부터 $\frac{DI}{DJ} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$ 가 되며, 같은 이유로 다음 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{AI}{AS} = \frac{b+c+d}{a+b+c+d}, \frac{BI}{BT} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}, \frac{CI}{CU} = \frac{a+b+d}{a+b+c+d}.$$

이들 등식을 이용하면, 다음의 1991년 IMO 문제(Djkić et al., 2006, p.254)에 대한 사면체 유추를 명제 3과 같이 얻을 수 있다: 삼각형 ABC 와 내심 I 가 주어졌다. 삼각형 ABC 의 각 A, B, C 의 이등분선이 대변과 점 A', B', C' 에서 교차할 때, 부등식 $\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3$ 이 성

립한다.

명제 3. 사면체 $DABC$ 에서 꼭짓점 D, A, B, C 로부터 내접구의 중심 I 를 지나 면 ABC, BCD, ACD, ABD 와 점 J, S, T, U 에서 만하는 선분 DJ, AS, BT, CU 를 긋자. 그러면 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{1}{8} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI \cdot DI}{AS \cdot BT \cdot CU \cdot DJ} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

증명. 우선 $\frac{AI \cdot BI \cdot CI \cdot DI}{AS \cdot BT \cdot CU \cdot DJ} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4$ 을 증명하자. 등식 $\frac{AI}{AS} = \frac{b+c+d}{a+b+c+d}$, $\frac{BI}{BT} = \frac{a+c+d}{a+b+c+d}$, $\frac{CI}{CU} = \frac{a+b+d}{a+b+c+d}$, $\frac{DI}{DJ} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$ 이 성립한다. 산술평균-기하평균 부등식에 의해, 곱 $\frac{AI}{AS} \cdot \frac{BI}{BT} \cdot \frac{CI}{CU} \cdot \frac{DI}{DJ}$ 는 $\frac{AI}{AS}$, $\frac{BI}{BT}$, $\frac{CI}{CU}$, $\frac{DI}{DJ}$ 가 각각 $\frac{b+c+d}{a+b+c+d}$, $\frac{a+c+d}{a+b+c+d}$, $\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$, $\frac{a+b+c}{a+b+c+d}$ 의 산술평균과 같은 경우이다. 그러므로 이들의 산술평균을 구하면, $\frac{1}{4} \left(\frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d} \right) = \frac{3}{4}$ 이다. 그러므로 $\frac{AI}{AS} \cdot \frac{BI}{BT} \cdot \frac{CI}{CU} \cdot \frac{DI}{DJ}$ 의 최대값은 $\left(\frac{3}{4}\right)^4$ 이며, 구하는 부등식이 증명된다.

이제 $\frac{1}{8} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI \cdot DI}{AS \cdot BT \cdot CU \cdot DJ}$ 을 증명하자. $\frac{AI}{AS} = \frac{b+c+d}{a+b+c+d} = \frac{2(b+c+d)}{2(a+b+c+d)} = \frac{(a+b+c+d) + (b+c+d-a)}{2(a+b+c+d)} = \frac{1}{2} + \frac{b+c+d-a}{2(a+b+c+d)}$ 가 된다. $b+c+d-a > 0$ 이므로, 양수 x 에 대해 $b+c+d-a = 2x$ 라 놓자. 그러면 $\frac{AI}{AS} = \frac{1}{2} + \frac{x}{a+b+c+d}$ 가 된다. 같은 방법으로 $a+c+d-b = 2y$, $a+b+d-c = 2z$, $a+b+c-d = 2w$ 라 놓으면, $\frac{BI}{BT} = \frac{1}{2} + \frac{y}{a+b+c+d}$, $\frac{CI}{CU} = \frac{1}{2} + \frac{z}{a+b+c+d}$, $\frac{DI}{DJ} = \frac{1}{2} + \frac{w}{a+b+c+d}$ 가 된다. 이제 이들 식에 대해 곱 $\frac{AI}{AS} \cdot \frac{BI}{BT} \cdot \frac{CI}{CU} \cdot \frac{DI}{DJ}$ 를 계산하자.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a+b+c+d}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{y}{a+b+c+d}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{a+b+c+d}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{w}{a+b+c+d}\right) \\ & > \frac{1}{16} + \frac{x}{2(a+b+c+d)} + \frac{y}{2(a+b+c+d)} + \frac{z}{2(a+b+c+d)} + \frac{w}{2(a+b+c+d)} \\ & = \frac{1}{16} + \frac{x+y+z+w}{2(a+b+c+d)} = \frac{1}{16} + \frac{a+b+c+d}{2(a+b+c+d)} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

이로부터 구하는 부등식 $\frac{1}{8} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI \cdot DI}{AS \cdot BT \cdot CU \cdot DJ}$ 이 증명된다. \square

이제 관성능률에 대한 Lagrange 정리를 이용하여 내접구의 중심 I 에 관련된 몇몇 선분들의 계량적 성질을 살펴보자. 한인기 외(2008, pp.54-55)에 의하면, n 개의 질량점 (X_i, m_i) , 이들 질량점의 무게중심을 G , 임의의 점을 X , 점 G, X 에 대한 질량점들의 관성능률을 I_G, I_X 라 하면, 등식 $I_X = I_G + mXG^2$ 가 성립하며($m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 이며, 이것을 Lagrange 정리라 한다), 질량점 X_i 와 X_j 사이의 거리를 a_{ij} 라 하면, $I_G = \frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j a_{ij}^2$ 이 된다. 이제 이들 성질을 이용하여 사면체의 내접구의 중심에 관련된 몇몇 등식들을 탐구하자.

명제 4. 사면체 $DABC$ 의 꼭짓점 D 와 내접구의 중심 I 를 연결한 직선 DI 가 면 ABC 와 만나는 점을 J 라 하자. 직선 AJ 가 모서리 BC 와 점 A_1 에서 만난다고 하면, 다음 등식이 성립한다.

$$AA_1^2 = \frac{(b^2 + bc) \cdot AB^2 + (c^2 + bc) \cdot AC^2 - bc \cdot BC^2}{(b + c)^2}$$

증명. Lagrange 정리에서 임의의 X 로 점 A 를 잡고, 질량점 $(X_1, m_1), (X_2, m_2)$ 로 $(B, b), (C, c)$ 를 잡자. $(B, b), (C, c)$ 의 점 A 에 대한 관성능률 I_A 는 $I_A = bAB^2 + cAC^2$ 이며, $(B, b), (C, c)$ 의 무게중심 A_1 에 대한 관성능률 I_{A_1} 을 $\frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j a_{ij}^2$ 을 이용하면 $I_{A_1} = \frac{bc}{b+c} \cdot BC^2$ 가 된다. 이제 얻어진 식을 등식 $I_A = I_{A_1} + mA_1A^2$ 에 대입하면, $bAB^2 + cAC^2 = \frac{bc}{b+c} \cdot BC^2 + (b+c)AA_1^2$ 이 된다. 결국 $AA_1^2 = \frac{(b^2 + bc) \cdot AB^2 + (c^2 + bc) \cdot AC^2 - bc \cdot BC^2}{(b + c)^2}$ 가 성립한다. \square

이제 사면체 $DABC$ 의 모서리의 길이를 $DA = e_1, DB = e_2, DC = e_3, AB = e_4, BC = e_5, AC = e_6$ 이라 하면, 명제 4의 등식에서 AA_1^2 을 $\frac{(b^2 + bc)e_4^2 + (c^2 + bc)e_6^2 - bce_5^2}{(b + c)^2}$ 으로 나타낼 수 있다. 이제 같은 방법으로 BB_1^2, CC_1^2 을 구하면, $BB_1^2 = \frac{(a^2 + ac)e_4^2 + (c^2 + ac)e_5^2 - ace_6^2}{(a + c)^2}$, $CC_1^2 = \frac{(b^2 + ab)e_5^2 + (a^2 + ab)e_6^2 - ace_4^2}{(a + b)^2}$ 이 된다. 한편 명제 1과 명제 4의 결과를 이용하면, 다음을 얻을 수 있다.

명제 5. 사면체 $DABC$ 의 꼭짓점 D 와 내접구의 중심 I 를 연결한 직선 DI 가 면 ABC 와 만나는 점을 J 라 하자. 그러면 다음 등식이 성립한다.

$$AJ^2 = \frac{(b^2 + bc)e_4^2 + (c^2 + bc)e_6^2 - bce_5^2}{(a + b + c)^2}$$

증명. 명제 1에 의해, $\frac{AJ}{JA_1} = \frac{b+c}{a}$ 이므로, $\frac{AJ}{AA_1} = \frac{b+c}{a+b+c}$ 가 얻어질 수 있다. 이 식을 제곱하면, $\left(\frac{AJ}{AA_1}\right)^2 = \frac{(b+c)^2}{(a+b+c)^2}$ 이며, 명제 4에서 $AA_1^2 = \frac{(b^2 + bc)e_4^2 + (c^2 + bc)e_6^2 - bce_5^2}{(b+c)^2}$ 이므로, 이들 두 식을 변끼리 곱하면, $AJ^2 = \frac{(b^2 + bc)e_4^2 + (c^2 + bc)e_6^2 - bce_5^2}{(a+b+c)^2}$ 이 성립한다. \square

이제 사면체 $DABC$ 에서 DJ 의 길이를 관성능률을 이용하여 구하자.

명제 6. 사면체 $DABC$ 의 꼭짓점 D 와 내접구의 중심 I 를 연결한 직선 DI 가 면 ABC 와 만나는 점을 J 라 하자. 그러면 다음 등식이 성립한다.

$$DJ^2 = \frac{(a+b+c)(ae_1^2 + be_2^2 + ce_3^2) - abe_4^2 - ace_6^2 - bce_5^2}{(a+b+c)^2}$$

증명. Lagrange 정리에서 임의의 X 로 점 D 를 잡고, 질량점 (X_1, m_1) , (X_2, m_2) , (X_3, m_3) 로 (A, a) , (B, b) , (C, c) 를 잡자. 이때 $I_D = aDA^2 + bDB^2 + cDC^2 = ae_1^2 + be_2^2 + ce_3^2$ 이다. (A, a) , (B, b) , (C, c) 의 무게중심이 점 J 이므로, 무게중심 J 에 대한 관성능률을 $\frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j a_{ij}^2$

을 이용하여 구하자. 그러면 $I_J = \frac{abe_4^2 + ace_6^2 + bce_5^2}{a+b+c}$ 가 된다. 이제 얻어진 식들을 등식 $I_D = I_J + mDJ^2$ 에 대입하면, $ae_1^2 + be_2^2 + ce_3^2 = \frac{abe_4^2 + ace_6^2 + bce_5^2}{a+b+c} + (a+b+c)DJ^2$ 이 된다. 이로부터 $DJ^2 = \frac{(a+b+c)(ae_1^2 + be_2^2 + ce_3^2) - abe_4^2 - ace_6^2 - bce_5^2}{(a+b+c)^2}$ 가 얻어진다. \square

명제 7. 사면체 $DABC$ 의 꼭짓점 D 와 내접구의 중심 I 를 연결한 선분 DI 에 대해, 다음 등식이 성립한다.

$$DI^2 = \frac{(a+b+c)(ae_1^2 + be_2^2 + ce_3^2) - abe_4^2 - ace_6^2 - bce_5^2}{(a+b+c+d)^2}$$

증명. 명제 2에 의해, 등식 $\frac{DI}{IJ} = \frac{a+b+c}{d}$ 이 성립한다. 이로부터 $\frac{DI}{DJ} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$ 가 성립한다. 이제 등식의 양변을 제곱하면, $\left(\frac{DI}{DJ}\right)^2 = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c+d)^2}$ 이 된다. 이제 명제 6에서 얻어진 등식 $DJ^2 = \frac{(a+b+c)(ae_1^2 + be_2^2 + ce_3^2) - abe_4^2 - ace_6^2 - bce_5^2}{(a+b+c)^2}$ 을 변끼리 곱하자. 그러면, $DI^2 = \frac{(a+b+c)(ae_1^2 + be_2^2 + ce_3^2) - abe_4^2 - ace_6^2 - bce_5^2}{(a+b+c+d)^2}$ 이 얻어진다. \square

명제 8. 사면체 $DABC$ 의 내접구의 중심을 I 라 하면, 다음 등식이 성립한다.

$$aAI^2 + bBI^2 + cCI^2 + dDI^2 = \frac{dae_1^2 + dbe_2^2 + dce_3^2 + abe_4^2 + bce_5^2 + ace_6^2}{a+b+c+d}$$

증명. 내접구의 중심 I 는 네 질량점 (A, a) , (B, b) , (C, c) , (D, d) 의 무게중심이므로, 무게중심에 대한 질량점들의 관성능률 I_I 를 $\frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j a_{ij}^2$ 를 이용하여 구하자. 이때 $m = a + b + c + d$ 이며, $\sum_{i < j} m_i m_j a_{ij}^2$ 의 항들을 각각 계산하면, dae_1^2 , dbe_2^2 , dce_3^2 , abe_4^2 , bce_5^2 , ace_6^2 이므로, 구하는 등식이 얻어진다. \square

명제 8에서 내접구의 중심으로부터 사면체의 각 꼭짓점에 이르는 거리의 제곱의 합을 면들의 넓이, 모서리의 길이를 이용하여 구하는 등식을 얻었다. 특히 정사면체의 경우에는 $a = b = c = d$ 이고, $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = e$ 이므로, 명제 8로부터 등식 $AI^2 + BI^2 + CI^2 + DI^2 = \frac{3e^2}{2}$ 를 얻을 수 있다. 그리고 정사면체에서는 $AI = BI = CI = DI$ 이므로, $AI^2 = \frac{3}{8}e^2$ 이며 $AI = \frac{\sqrt{6}}{4}e$ 가 됨을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구는 사면체의 내접구의 중심을 무게중심을 이용하여 탐구하는 연구로, 사면체의 각 꼭짓점에 일정한 무게를 놓으면 이들 질량점의 무게중심이 사면체의 내접구의 중심이 된다는 것을 보였고,

이를 바탕으로 사면체의 내접구의 중심에 관련된 몇몇 계량적 성질인 등식, 부등식을 유도하고, 이를 증명하였다.

사면체 $DABC$ 의 면의 넓이를 $S_{DBC} = a$, $S_{DAC} = b$, $S_{DAB} = c$, $S_{ABC} = d$ 라 놓고, 사면체의 각 꼭짓점에서 네 질량점 (A, a) , (B, b) , (C, c) , (D, d) 를 생각하자. 그러면 사면체의 내접구의 중심은 이들 질량점의 무게중심이 된다는 것을 벡터의 등식 $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} + d\vec{ID} = \vec{0}$ 을 이용하여 제시하였다. 이러한 사실은 '삼각형 ABC 에서 $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ 라 하고 질량점 (A, a) , (B, b) , (C, c) 를 생각하면, 이들 질량점의 중심이 삼각형의 내심'이라는 사실의 사면체 유추가 된다.

본 연구에서는 사면체 $DABC$ 의 꼭짓점 D 와 내접구의 중심 I 를 연결한 직선 DI 가 면 ABC 와 만나는 점을 J , 직선 AJ 가 모서리 BC 와 만나는 점을 A_1 이라 할 때, 등식 $\frac{AJ}{JA_1} = \frac{b+c}{a}$,

$\frac{DI}{IJ} = \frac{a+b+c}{d}$, $\frac{DI}{DJ} = \frac{a+b+c}{a+b+c+d}$ 을 유도하여 증명하였다. 그리고 이로부터 1991년 IMO 문

제였던 부등식 $\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3$ 의 사면체 유추 $\frac{1}{8} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI \cdot DI}{AS \cdot BT \cdot CU \cdot DJ} \leq$

$\left(\frac{3}{4}\right)^4$ 을 유도하고 증명하였다(이때 사면체 $DABC$ 의 꼭짓점 A, B, C 로부터 내접구의 중심 I 를 지나 면 BCD, ACD, ABD 와 만나는 점을 S, T, U 라 함).

한편 관성능률에 대한 Lagrange 정리를 내접구의 중심에 대해 사용하여, 사면체의 꼭짓점으로부터 내접구의 중심까지의 거리 등식 $DI^2 = \frac{(a+b+c)(ae_1^2 + be_2^2 + ce_3^2) - abe_4^2 - ace_6^2 - bce_5^2}{(a+b+c+d)^2}$ 을 찾아 증명하였으며, 꼭짓점으로부터 내접구의 중심까지 거리의 합 $aAI^2 + bBI^2 + cCI^2 + dDI^2 = \frac{dae_1^2 + dbe_2^2 + dce_3^2 + abe_4^2 + bce_5^2 + ace_6^2}{a+b+c+d}$ 을 증명하였다.

본 연구를 통해 얻어진 결과는 중등학교 수준의 수학영재교육, R&E, 과제탐구의 자료로 활용될 수 있을 것으로 기대되며, 사면체의 다양한 탐구의 한 방향을 제시할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- 교육인적자원부 (2006). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.
 에르든예프·한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.
 한인기 (2008). 지렛대 원리를 이용한 삼각형의 각의 이등분선, 수선, 외심의 성질 탐구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 22(1), pp.27-39.

- 한인기 외 (2008). 관성능률을 이용한 등식 및 부등식의 증명에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **22(1)**, pp.53-63.
- 한인기·플라긴 (2006). 문제해결의 이론과 실제, 서울: 승산.
- Bevz G. P. (1974). *Geometriya Tetraedra*, Ukraina: Radyanska Shkola.
- Djkić et al., (2006). *The IMO Compendium*, NY: Springer.
- Gotman E. (2006). *Stereometricheskie Zadachi i Metody ih Resheniya*, Moskva: MTsNMO.
- Kolmogorov A. N. (1959). *O Professii Matematika*, Moskva: Izdat. Moskovskogo Universiteta.
- Kushnir I. (1996). *Koordinatny i Vektorny Metody Resheniya Zadach*, Kiev: Astarta.
- Prasolov V., & Sharygin I. (1989). *Zadachi po Stereometrii*, Moskva: Nauka.

A Study on Tetrahedron's Properties related with Center of Inscribed Sphere Using the Center of Mass

Han Inki

Gyeongsang National University, 660-701, Korea

E-mail : inkiski@gsnu.ac.kr

In this paper we study tetrahedron's properties related with center of inscribed sphere using the center of mass. We show that the center of mass of four mass points (A, a) , (B, b) , (C, c) , (D, d) coincide with center of tetrahedron's inscribed sphere, suggest equalities and inequalities related with center of inscribed sphere, and prove theses using the center of mass. Our results can be used in research and education programs, various types of gifted student education.

* ZDM Classification : G44

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50

* Key Words : tetrahedron, the principle of the lever, inscribed sphere