라플라스변환 사례를 통한 數學教育哲學 모색 시론

경기대학교 수학과 오채환
20020580@kyonggi.ac.kr

‘수학교육철학’ 이라는 이름은, 기존의 원론적인 수학철학 이론전반의 검토를 포함하되, 주로 교육적 입각점에서 비판적으로 검토하는 논의전개 양태를 두루 지칭한다. 따라서 이 같은 수학교육철학은, 새로운 고유의 수학철학 정립을 궁구하기보다는, 교육에 최적인 수학철학 이론의 모색 내지는 요청을 우선 목표로 한다는 점에서 기존의 원론적인 수학철학 논의와 성격을 달리한다. 본 소고는 그 중에서도 단초적 시론으로서, 대학교 이공계열 필수과목인 초급미분방정식 교육과정에 나타난 한 사례의 소개 및 그것을 통한 내용이해의 효율성과 수학철학 유형의 정성적관계(qualitative relation)를 사변적으로 일별해 보는 것으로 제한한다.

주제어 : 수학철학, 수학교육, 수학교육철학, 플라톤주의, 형식주의, 인본주의, 라플라스변환.

1 들어가는 말

철학은 모든 개별학문에 대한 궁극적 비판과 종합적 검토를 자임하지만 개별학문은 자신에 관련된 철학의 활동을 일방적 훈수쯤으로 여기는 경향이 있다. 그 개별학문이 수학인 경우에도 마찬가지로서, 전문 수학자나 혹은 수학과 관련된 활동을 하는 사람들이라도 대부분은 굳이 수학철학을 심각하게 고려할 필요를 느끼지 않을 수 있으며, 실제로 수학철학을 아예 모르고도 수학과의 관계를 불편함 없이 이어갈 수 있다고 여긴다. 하지만 관점을 수학을 교육하는 입장으로 돌리면 상황은 사뭇 다르다. 순전히 학문적 탐구에만 집중하는 것이 아니라 지식을 전해야 하는 개별학문 교육은 교육가능성을 전제로 하는 속성상 그에 상응하는 각별한 교육철학적 검토가 요망되며, 특히 추상적 내용을 다루는 수학교육의 경우 기존 수학철학의

검토로부터 바람직한 수학교육철학을 모색하는 노력은 외면의 여지가 좁아 당위에 가깝다 ([4], p410).

지난 100여 년간 기존의 원론적 수학철학은 수학체계 전체에 대하여 적용할 수 있는 수학적 존재 및 인식과 관련된 확고한 연역적 토대를 마련하고자 노력해 왔다. 하지만 그 누구도 전모를 꿰뚫기가 불가능진 수학체계 전체를 대상으로 삼은 수학철학의 목표는 스스로 자초한 'big bite'[1]가 되어 태생적 난항을 겪고 있는 형국이며, 이런 상황은 앞으로도 상당기간 지속될 전망이다. 그렇지만 한시도 중단 없이 시행되어야 하는 수학교육은 수학철학이 합의된 결론에 이르지 못한 상태에서도 진행되어야 한다. 이런 상황아래 교육현장에서 자연스럽게 발생하는 수학철학 및 수학교육철학 모색은 경험에 의거한 귀납적 검토라는 의미를 갖게 된다. 본 소고를 통해서 기도하는 소기의 목표 역시 구체적 현장에서 생각해볼 수 있는 수학철학 및 수학교육철학의 귀납적 검토 사례를 제시해 보는 것이다.

이 과정에서 기존의 원론적 수학철학의 흐름과 갈래에 대한 소개는 생략하겠다. 그에 관해 시비를 따지는 논변은 이 소고의 목표가 아닐뿐더러, 이미 오래 전부터 잘 정돈된 논문과 소개글[2]이 <한국수학사학회지>를 비롯한 여러 공개매체를 통해 충분히 제시되어 있기 때문이다. 따라서 기존 수학철학의 흐름과 갈래에 관해서는 불필요한 중복언급은 피하되 추가의 새로운 논급이 필요한 대목이나 논의 맥락상 인용이 필요한 경우에만 참조하기로 한다.

본론에서 먼저 살펴볼 내용은 한국에서 이제 막 도입되어 시행되고 있는 공학인증 과목 중에서도 초급 미분방정식 강의 중에 실제로 일어난 질의응답 사례 한 가지이다. 마침 여기에 참여한 교수는 수학을 전공하지 않고 독학했지만 수학철학에 관심이 많은 사람이고, 학생들은 대다수가 '수학을 잘 한다' 는 소리를 한 번도 들어본 적이 없는 공학계열 2학년생들이다. 교수는 수학을 전공하지 않은 탓에 소위 정통수학자들이 시행하는 '엄격한 증명' 에 서투르다. 한편 학생들은 서로의 실력을 뻔히 아는 덕에 모르는 내용이 나오더라도 '나만 모를 것이다' 라는 지적 소외감에는 좀처럼 빠지지 않는 강점이 있다.

학생들은 통상적인 수업일정에 따라 학기 후반부에 라플라스변환을 이용한 미분방정식 해법을 학습한다. 라플라스변환은 순수 수학적 관점에서 보더라도 상당히 수준이 높은 적분

1) 아인슈타인은 상대성이론을 발견하고 난 이후 얼마간 정치 · 사회적인 소용돌이에 시달리다 1929년부터 미국 프린스턴 고등연구원에 학문적 보금자리를 마련했다. 그러나 정작 안착한 이후 세상을 떠날 때까지 열정적으로 연구를 계속했음에도 불구하고 이렇다 할 학문적 업적을 남기지 못했다. 후세 어느 사가는 이를 두고 '통일장 이론' 이라는 'big bite' 에 매달렸기 때문이라고 평한 적이 있다. 이런 유래를 갖는 big bite는 해결가망이 없어 보이는 너무 벅찬 학문적 과제를 의미한다.

2) 박창균, 20세기 수학의 패러다임 -20세기 전 · 후반 수리철학을 중심으로−, 한국수학사학회지, 9(2), p22-29, 1996.
박우석, 제4장 현대 수리철학의 백가쟁명, 잃어버린 과학을 찾아서, 담론사, 1997.

변환의 대표적 개념일 뿐만 아니라 그 역사적 의미 또한 적지 않다. 그럼에도 불구하고 라플라스변환은 특히 수학 이외의 이공계열 전공 학생들이 기계적 계산만을 익히도록 강요받는 내용으로서의 대표성도 갖는다. 학생들이 예의 기계적 계산만을 익히는 수업 도중에 다음과 같은 질의응답 사례가 발생했다.

2 사례

수학 수준이 남다르진 않지만 서슴없이 질문을 하곤 하던 학생이 손을 들고 물었다.

"라플라스변환과 역변환 '기법' 을 통해서 연습문제는 풀 수 있을 것 같습니다만, 왜 변환의 핵(kernel)이 e^{-st} 이어야 하는지는 여전히 신기하고 궁금합니다."
"그건 이미 알려주었는데. 다루기 어려운 다양한 형태로 주어진 미분방정식을 다루기 쉬운 대수방정식 꼴로 일률적으로 변환시켜주는 효능 때문이라고."
"그 점은 일러주셔서 기억하고 있습니다. 궁금한 것은 왜 변환의 핵이 e^{-st} 이어야 대수방정식으로 변환되는 효능이 발생하는가 하는 점입니다. 혹시 보다 단순한 핵은 없을까요? 그런 것들을 알고 나면 더욱 명랑하게 공부할 수 있을 것 같습니다."

질문한 학생의 눈빛이 워낙 간절했기 때문에 교수는 진짜로 좀 덜 난해한 핵을 만들든지 아니면 학습동기 유발 차원에서 기존의 핵을 사용하는 불가피성이라도 친절하게 설명해주고 싶은 충동을 느꼈다. 하지만 교수는 즉답을 해줄 만큼 준비가 되어있지 않아서 설명에 시간이 많이 걸린다고 둘러대며 다음 주 강의를 기약했다. 엄밀한 형식적 정의와 증명으로부터 자유로운 상태에서 고등학교 이과 수준의 지식만을 바탕으로 해서 마침내 교수가 보충설명을 위해 마련한 내용은 다음과 같다.[3)]

2.1 담당교수가 처음 마련한 설명

《왜 라플라스 변환의 핵은 이어야 하는가?》

$$\sum_{0}^{\infty} a_n X^n = A(X) \text{ (수렴하는 무한급수, 예는 무수히 많음.)}$$

3) 담당교수는 설명의 예를 기존의 여러 교재들에서 찾았으나 실패했고, 우연히 검색한 MITopencourseware의 Video Lecture <Differential Equations> 편(http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-03Spring-2006/CourseHome/index.htm) 가운데 22강에서 가볍게 언급된 설명으로부터 실마리를 얻을 수 있었다. 이에 대한 추후확인은 <Methods of Theoretical Physics> PartI p.467 470을 참조했다. (Philip M. Morse & Herman Feshbach, McGraw-Hill Book Company, 195

(각 항의 계수 a_n 을 n 에 관한 함수 $a(n)$ 으로 간주하여 표기를 약간 달리 함)

$\Rightarrow \sum_{0}^{\infty} a(n)x^n = A(x)$

예컨대,

$a(n)$ 이 상수 1 일 때, $A(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (단 $|x| < 1$)

$a(n)$ 이 $\dfrac{1}{n!}$ 일 때, $A(x) = e^x$

....

etc.

이젠 이상과 같은 이산적인 조건(discrete condition)을 연속적인 조건(continuous condition)으로 발상을 살짝 바꿔 생각해보자.

$$n = 1, 2, 3, 4, \cdots \Rightarrow t : 0 \le t \le \infty$$

$$\sum_{0}^{\infty} a(n)x^n = A(x) \Rightarrow \int_0^{\infty} f(t)x^t\, dt = A(x)$$

이로부터 다음과 같은 라플라스변환 식을 얻는 것은 쉽게 가능해진다.

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

왜냐하면 $x = e^{\ln x}$ 로 놓을 수 있으므로 $x^t = (e^{\ln x})^t = e^{t\ln x}$ 이고, 단 $0 < x < 1$ 이기 때문이다. 다시 말해 $\ln x < 0$ 이므로, 적당한 양수 s 를 $s = -\ln x$ 라 하면 $\ln x = -s$ 인 것이다! 즉 라플라스변환 식에서 $f(t)$ 와 e^{-st} 은 각각 수렴하는 무한급수 식의 n 차 항 계수 a_n 과 n 차 항인 x^n 을 연속함수 발상으로 나타낸 것이다.

특히 e^{-st} 의 경우 $x^n \Rightarrow x^t \Rightarrow e^{t\ln x} \Rightarrow e^{-st}$ 의 과정을 거쳤으므로, x 의 함수 $A(x)$ 는 $A(x) \Rightarrow A(\ln x) \Rightarrow F(s)$ 의 과정을 거쳐서 s 의 함수 $F(s)$ 로 되는 것이다!

결국 라플라스 변환의 핵(kernel)인 e^{-st} 은 수렴하는 무한급수의 n 차 항인 x^n 또는 양의 무한대까지 적분이 수렴하는 연속함수인 x^t **자체**를, 밑이 e 인 지수함수로 나타낸 것에 불과함을 알 수 있다.

그리고 라플라스변환의 식에서 $f(t)$ 는 수렴하는 무한급수의 n 차 항인 x^n 또는 양의 무한대까지 적분이 수렴하는 연속함수 x^t 에 대응하는 **계수**라는 사실도 쉽게 확인할 수 있다.

이러한 사실의 확인은 라플라스변환의 결과와 그 의미에 대한 폭넓은 이해를 제공한다.

이를테면 $f(t) = 1$ 인 경우 우리는 $F(s) = \dfrac{1}{s}$ (단 $s > 0$)을 그냥 공식처럼 받아들이고 있다. 그런데 이러한 모든 경우란 앞서 확인한 사실에 비추어 봐도 잘 일치함을 쉽게 알 수 있다.

$f(t) = 1$ 인 경우

$$A_1(x) = \sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x} \text{ (단 } |x| < 1)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty x^t dt = \frac{1}{\ln x} \left|x^t\right|_0^\infty = \frac{1}{\ln x}|x^\infty - x^0| = \frac{1}{\ln x}|0-1|$$

$$= -\frac{1}{\ln x} = A_2(x) \quad \text{(단 } 0 < x < 1)$$

$$\Rightarrow A_2(x) = \frac{1}{-\ln x} = \frac{1}{s} \text{ (적당한 양수 } s \text{를 } s = -\ln x \text{ 라 했으므로!)}$$

남은 문제는 $A_1(x) \neq A_2(x)$ 즉, $\dfrac{1}{1-x} \neq \dfrac{1}{-\ln x} = \dfrac{1}{s}$ 라는 차이의 설명이다.

그런데 이 차이는, $A_1(x)$ 이 수렴하는 무한급수 값인데 비해 $A_2(x)$ 는 동일조건이지만 수렴하는 정적분 값이라는, 성격상의 차이에 불과하다. 다시 말해 $A_2(x)$ 가 엄밀한 극한값인데 비해 $A_1(x)$ 은 그에 대한 근사값인 것이다. 실제로 $x = \dfrac{1}{2}$ 인 경우를 살펴보면 $A_2(\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{\ln 2} \simeq 1.693$ 이고, $A_1(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$ 로 나타난다. 왜냐하면 $A_2(\dfrac{1}{2})$ 는 **연속인 엄밀한 정적분**인데 비해, $A_1(x)$ 은 $A_1(\dfrac{1}{2}) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots$ 로서 **이산적인 구분구적 근사값**이기 때문이다.

이런 내용의 추가이해는 라플라스변환의 학습에서 불필요한 신비로움을 제거해 줄 수 있다!

2.2 검토교수의 답신

좋게 말하면 신중하다지만 실은 소심한 성격의 담당교수는 자신의 설명이 타당한지 검토하기 위해 해박하면서도 친절한 정통수학자에게 자문을 구했다. 그로부터 받은 기대 이상의 친절한 답신은 다음과 같다. 검토교수의 암묵적 양해 아래 전문을 게재하는 이유는 두 가지이다. 하나는 본 논문의 논지와 부합하는 사례의 정확한 추이를 드러내기 위함이고, 다른 하나는 그 자체로 완성도 높은 소논문을 이루게 되는 과정을 예시하기 위함이다.

답신 전문

우선, 보내 주신 <왜 Laplace Transform 의 kernel 이 e^{-st} 이어야 하는가?> 에 관한 교수님의 의견에 공감합니다. <공부> 라고 하는 것이, 공부를 하는 사람이 왜 해야 하는지를 이해한다면, 훨씬 확실하고 훨씬 더 효과적이며 효율적이 될 것입니다.

그러한 관점에서, 라플라스 변환에 관한 <불필요한 신비로움>(학생들에게는 <공부의 당위성의 부족감>) 을 제거할 수 있다면 더 좋을 것이라는 교수님의 의견에 공감합니다.

교수님의 글에 대한 저의 판단

(1) 생성함수(generating function) 의 정의로부터 시작하여 자연스럽게 Laplace transform 을 유도하는 과정에 점수를 드립니다.

정의. 수열 $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 의 생성함수 $A(x)$ 는 $A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ 으로 정의한다.

(2) 생성함수의 개념을 <연속> 개념을 합성하여 Laplace Transform 을 유도함에도 점수를 드립니다.

<연속> 개념의 합성. 이산 변수 을 연속 변수 로 변환하여

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)X^n \quad \Rightarrow \quad A(x) = \int_0^{\infty} f(t)x^t dt$$

로 변환을 전환한다.

(3) $\ln x = -s$ 로 연속변수 x 를 또 다른 연속변수 s 로 치환함에는 위에서와 같은 자연스러움이 다소 부족합니다. 변수의 변환에 대한 설명은 보충이 필요하다고 생각됩니다.

(4) $A_1(x) \neq A_2(x)$ 에 대하여 <근사값> 으로 설명한 것은 받아들일 수 없습니다. 자연스러움이 없기 때문입니다. 또한 Laplace Transform 이 근사값을 구하려는 의도를 전혀 가지고 있지 않기 때문입니다.

(5) <라플라스 변환의 학습에서 불필요한 신비로움의 제거> 를 위한 노력은 <논문감> 입니다. 교수님께서 조금 더 내용을 추가하시어 <자연스러움> 을 획득하신다면 <교육을 위한 논문> 으로 손색이 없을 것입니다. 이를테면 다음과 같은 틀을 갖춰 주시면 어떨까 싶어 제안해 보니 그냥 참고해 보시기 바랍니다.

(가) 취지

대학수학의 미분방정식 교과목에서 Laplace Transform 의 학습에서 학생들은 kernel 을 왜 하필이면 지수함수 e^{-st} 를 사용하게 되었을까 하는 의구심을 갖는다. 이러한 의구심을 역사적 관점과 현대수학적 관점에서 분석, 고찰해 봄으로써 학생들에게 kernel 로 e^{-st} 를 사용함에 대한 타당성과 당위성을 설명할 수 있다면 학습효과를 제고할 수 있을 것으로 판단된다.

(나) Kernel 의 선택의 당위성

라플라스 변환의 정의. $F(s) = L\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$. 여기서 e^{-st} 를 kernel 이라고 부른다.

라플라스 변환의 커널의 선택의 당위성을 여러 가지 관점에서 살펴본다.

(나)-1. 역사적 관점에서의 kernel 선택의 당위성

[1] 의 History 부분을 읽어보면, Lagrange는 Euler를 추종하던 수학자였고, 그의 수학적 업적에 많은 관심을 보였으며 Euler 의 업적에서 기인된 연구를 하게 되었음도 짐작할 수 있다. 또한 이미 당시에 라플라스는 Fourier transform 을 알고 있었다.

1744년, 오일러는

$$z = \int X(x) e^{ax} dx, \quad z = \int X(x) x^A dx$$

등의 형태의 적분에 관심을 가지고 있었다. 그에 따라 라플라스는

$$\int X(x) e^{-ax} a^x dx$$

형태의 적분에 대한 관심을 가졌다.

또한 Fourier 의 diffusion equation 을 풀기 위한 Fourier series의 사용에 관한 이론, 즉 Fourier transform 을 알고 있었다.

이러한 연구 환경에서 Laplace 의 e^{-st} 의 kernel 로의 선택은 제법 자연스러운 선택이다.

(나)-2. 문제풀이 지향의 관점에서의 커널의 선택의 타당성

Laplace transform 은 기본적으로 미분방정식의 풀이를 지향한다. 그러한 점에서 미분방정식의 풀이에 사용되는 exact form 또는 Wronskian 에 사용되는 지수함수의 활용을 선택함은

자연스럽다.

(나)-3. 해석학의 관점에서 본 타당성

지수함수의 미분 또는 적분이 다시 지수함수로 주어짐은 지수함수를 커널로 선택하기 위한 매우 강력한 선택이유이다. 왜냐하면 미분방정식의 풀이는 결국 미분, 적분의 계산에 연루되는데, 이들의 계산 과정에서 변환을 위한 방법이 제약을 갖게 된다면 궁극적으로 풀이의 실패를 뜻하기 때문이다. 그러므로, 지수함수의 커널의 선택은 변환의 지속적인 사용 가능성을 유지하기 위한 자연스럽고 탁월한 선택이었다.

여기에 적분 가능성의 문제가 접목된다. 적분이 기본적으로 면적을 의미한다면 그 면적의 값이 존재하기 위해서는 빠르게 감소하는 함수를 커널로 선택함은 매우 타당하다. 그러한 함수의 대표 함수가 바로 음수 지수를 갖는 지수함수이다.

(나)-4 대수적 관점 또는 수학적 모델링의 관점에서 본 타당성

수학적 모델링이라 함은 어떠한 문제 또는 상황을 (함수 또는 변환에 의하여) 대수적 체계 또는 구조 (algebraic system or structure)를 갖는 구조(집합, 제일 좋게는 field) 안으로 집어넣어 계산이 가능케 하는 과정이라고 할 수 있다. 이러한 수학적 모델링의 관점에서 보면, 지수함수를 커널로 선택함은 적분을 함에 있어 강한 방법이 되는 부분적분(integration by parts)을 적용하면서 대수적 체계를 사용할 수 있음이 강한 선택 요인이 된다.

(다) Kernel e^{-st} 의 선택에 따른 좋은 수학적 성질

대수적 체계 안으로 들어서게 됨이 강한 선택 요인이다. 그로 인하여 미분방정식이 단순 사칙연산에 의한 풀이가 가능해지기 때문이다.
당시에 많은 응용문제에 사용되던 Bessel 함수를 비롯한 함수들의 변환이 자연스럽게 가능하다.

Fundamental relationships [1]을 보면[4)]

> the theory of Laplace-, Fourier-, Mellin- and Z-transforms are at bottom the same subject.
> 라플라스 변환(의 이론)은 근본적으로 푸리에 변환 (이론 및 기타 이론)과 같다.

4) [1] Laplace Transform, Wikipedia.

라고 쓰여 있다. 그러니까 Laplace Transform 에서 e^{-st} 를 kernel 로 사용함은 그다지 신비로운 사실은 아니다.

사실, 라플라스 변환 외에도 많은 종류의 변환들이 있었으며 그 중에서 가장 성공적으로 유용성을 확보한 변환이 Fourier transform 과 함께 단연 Laplace transform 이었다.

(라) 결론

이상에서 살펴보았듯이 Laplace Transform 에서의 kernel e^{-st} 의 선택은 자연스러운 선택이었으며, 다른 종류의 transform 에 비하여 쉽고 이용이 용이한 훌륭한 수학적 성질을 갖는 kernel 의 선택이었기에 많은 문제에 활용 및 응용되었음을 알 수 있다.

Laplace 에 의하여 변환이 정의될 당시의 그의 생각을 찾아내려는 의도가 아니라, 당시의 어떠한 상황에서 변환을 정의하게 되었는지를 현재의 다양한 지적 관점으로 살펴보아 그 의미를 타진한다. 그렇게 얻은 고찰 결과가 자연스럽고 타당한 결과라면 학생들의 교육에 의미를 더할 수 있기에 바람직한 교육 효과를 가져 올 것으로 기대할 수 있다.

2.3 사례의 추가학습 후 대화

담당교수는 자신의 원래 설명내용에 검토교수의 자문을 통해 확인하고 보완한 내용을 학생들이 알아듣기 쉽게 더욱 간추려서 정리했다. 그리고 약속했던 다음 주 강의시간을 할애해서 일주간 최선을 다해 정리한 내용을 설명한 다음, 결과에 대한 Quick Survey를 실시해 보았다. 질문한 학생을 포함한 소수의 몇몇은 단원이해에 도움이 되었다는 의사표시를 했다. 그 보다 조금 많은 수의 학생들은 내용이해 수준은 아니지만 내용에 대한 친밀감과 이해가능성을 비치면서 나중에 시간을 내서 다시 살펴보겠노라는 결의를 보였다. 하지만 반수 이상의 학생은 여전히 이해도의 변화가 없었다. 그래도 교수의 성실한 질의응답 실천으로 인해 학습 태도에서는 현저한 변화를 보였다. 여기에 솔직히 담당교수 자신도 내용이해를 증진시키는 뜻밖의 성과까지 더해 기쁜 마음이 들어서 질문자를 칭찬하며 물었다.

“요즘 학생들은 정말 용기가 있구나. 좋은 질문을 한 친구에게 박수를 쳐주자. 내가 학생시절에는 질문을 하려면 간이 콩알 만해지곤 했는데, 어디서 그런 용기가 났지?”

“감사합니다, 교수님. 근데 모르는 것을 질문하는데 왜 간이 콩알만 해지고 용기가 필요하죠?”

“내가 학생시절에는 생각이 너와 달랐다. 수학내용이란 책에 있는 그대로 완벽한 것이고, 수학자인 교수님의 설명은 더하거나 뺄 것이 없는 지식이라는 생각에, 모르는 것이 있어도 완벽하지 못한 나를 탓하면서 감히 질문을 하지 못했거든.”

“수학공부는 어차피 불완전한 인간이 하는 활동 중 하나이므로 상대적으로 더 아시는 교수님으로부터 덜 아는 학생이 도움을 얻기 위해 질문을 하는 것은 당연한 일인걸요.”

“맞다. 수학교수의 설명에도 상대에 따라 더하거나 뺄 것이 얼마든지 있을 수 있다는 것을 가르치는 입장이 되어 알게 되었다. 하지만 수학 자체는 여전히 완전하지 않을까?”

“제가 질문을 자주 하는 편인데요, 그렇지만 수학의 완전성을 의심해서 질문하는 것이 아닙니다. 그럴 위치에 있지도 않고요. 내용을 신뢰는 하지만 이해를 못해서 눈높이를 맞춘 설명을 구하는 것입니다.”

“그렇다면 수학 자체는 완전한 체계로서 불완전한 인간과는 별개로 존재한다는 생각에는 동의하나?”

“수학이 엄격한 학문인 것은 맞지만, 그 엄격성이 완전한지 불완전한지는 솔직히 모르겠습니다.”

“만일 완전하다면? 수학도 불완전한 인간의 학문이라는 네 가설과 어긋나지 않나?”

“수학도 어디까지나 사람이 이룬 것이기 때문에 불완전하지 않을까 생각합니다만, 설령 완전한 학문이라 해도 그것이 불완전한 인간의 학문이라는 가설과 논리적으로 어긋나는 것은 아니라고 봅니다. 불완전한 인간도 어떤 활동의 목표로서 완전성을 추구할 수는 있으며, 이때 인간의 불완전성은 목표추구의 실패가능성에 열려져있음을 의미할 뿐이지 필연적 실패를 의미하는 것은 아니기 때문입니다. 수학은 불완전한 인간이 추구해온 활동 중에서 완전성을 확보한 요소들만 골라서 결집시켜 온 체계가 아닐까 생각합니다.”

“너도 나처럼 수학 자체보다 ‘수학에 관한’ 생각이 깊구나.”

“아닙니다. 저는 교수님과 달리 수학 자체가 ‘아직은’ 얕습니다.”

3 사례에 대한 논급과 수학교육철학 모색

수학교육철학은 전통적 수학철학 논의를 검토하되 교육의 관점에서 문제를 보기 때문에 일의적(一意的, univocal) 진리이론을 추구하지 않는다는 점에서 수학철학과 달리 자유롭다. 다시 말해 수학과 관련된 철학적 쟁점을 놓고 시비를 겨루는 입장이 아니라 어느 이론이 수학교육의 과정 중에 더 유효한지를 놓고 취사선택 혹은 보완수정의 설득력을 경합하는 입장인 것이다. 인본주의 수학철학자로 알려진 허시(Reuben Hersh)의 표현대로, 대부분 순수 연구수학자의 경우 평일에는 플라톤주의자이고 주말에는 형식주의자인 것 같다([4], p68). 그들은 수학을 연구하는 평일에는 플라톤주의자로서 모종의 객관적 실재를 다루고 있다고 확신하며 그 성질의 결정에 매달린다. 하지만 주말에 편안한 자리에서 그 실재에 대한 철학적 설명을

해야 할 입장이 되면 '별 의미없는 기호들을 조합해보는 게임' 을 하고 있을 뿐이라며 슬그머니 형식주의자가 되어버린다. 듀돈네(Jean Dieudonne)의 지적에 의하면 이런 태도는 부르바키가 즐겨 취했던 태도다. 듀돈네가 부르바키를 이끈 지도자였던 점을 감안하면 고백의 내용은 의심의 여지가 없어 보인다. 비슷한 고백은 코헨(Paul Joseph Cohen)에 의해서도 이어진다.[5] 연구 수학자 의 통상적인 위치는 플라톤주의와 형식주의의 사이 어느 곳이지만, 가능하면 최대한 두 세계의 장점만 취하려고 한다는 것이다. 물론 예외가 있긴 하다. 그런 예로는 맥레인(Saunders Mac Lane)을 들 수 있는데, 그는 플라톤주의를 분명히 부정했지만 형식주의에도 기대지 않은 예외적인 연구 수학자로서 다음과 같이 단언한 바 있다. "어딘가에 집합론의 이상세계가 존재한다는 플라톤주의 개념은 화려한 환상에 불과하다."[6] 그러나 이런 예외는 매우 드물다. 심지어 과학철학자인 카르납도 이론물리 연구자에 대해 비슷한 은유적 표현을 했듯이, 플라톤주의와 형식주의 사이의 단진동은 수학자뿐만 아니라 과학자도 추상화를 꾀해야 하는 입장이라면 흔히 보이는 모습이다([8], p28).

사실, 자신의 이름으로 이론을 내세우는 데 성공한 몇몇 투철한 사명감의 수학철학자를 제외하면 하나의 수학철학 이론에 의거해야 한다는 강박에 시달리는 '수학인' 은 별로 없어 보인다. 열거한 순수 연구 수학자의 선택적인 수학철학 태도는 상대적으로 자유로운 입장에 있는 수학교육자의 선택적 입각점을 더욱 자유롭게 만든다. 수학교육자는 수학의 교육가능성을 저해하는 철학을 우선적으로 편안하게 거부할 수 있기 때문이다.

교육의 관점에서는 가장 우선적으로 거부될 수 있는 후보 이론이 플라톤주의와 형식주의이다. 이 점은 순수 수학연구와 사회적 성격의 수학교육이 취사하는 수학철학적 입장이 서로 대척(對蹠)의 관계에 있음을 시사하기도 한다. 이런 주장은 인본주의 수학철학을 대표하는 허시도 분명히 밝히고 있다. '만약 수학적 대상이 인간의 것이 아닌 상상적 세계의 실체이거나(플라톤주의) 그 의미가 아무런 연관성이 없는 기호들의 무모순 조합(형식주의)이라면 어떻게 수학을 가르치고 배울 수 있는가 하는 문제는 매우 불명확해진다.' ([4], p410).

수학교육의 입장에서 볼 때 플라톤주의가 장점이 없는 이론이라서 거부되는 것이 아니다. 이 점에 대해서는 한국수학사학회 회장으로서 수학철학을 꾸준히 소개해 온 박창균 교수의 논문에도 요약된 기술이 나타나있다. '플라톤주의 원리들은 예로부터 있어온 수학의 성과들을 유지케 하고 자연스럽게 받아들이도록 하는 장점이 있다. 즉 수학적 대상들이 사람으로부터

5) "comments on foundations of set theory" in <Axiomatic Set Theory> pp. 9 15 (Dana Scott ed., Providence: American Mathematical Society, 1971)

6) <수학, 형식과 기능> p.574. (Saunders Mac Lane지음, 이상구 · 오채환 외 옮김, 청음사, 2001). 저자 맥레인의 독보적인 입장은 그를 순수 수학자인 동시에 수학철학자의 한 사람으로도 보게 하며, 그의 수학철학 입장은 분류상 구조주의에 놓인다.

근본적으로 독립해 실재하고, 수학적 진술이 의미가 있다면, (중략), 수학적 작업을 수행하는 사람에게 안정감을 주며, (중략), 실용적 유익이 있음을 부인할 수 없다.' ([2], p71). 기술된 '실용적 유익'은 교육적 관점에서도 그대로 적용된다. 가르치고 배우는 입장에서 학습대상의 진리성이 안정적으로 담보되는 점은 큰 장점이 아닐 수 없다. 문제는 교육의 속성이 늘 모름 앞에 노출되는 과정이라는 점이다. 교육과정은 쉽게 이해할 수 없는 내용에 맞닥뜨리는 경험적 상황이 언제라도 전개될진대, 그 대상이 초경험적 존재인 경우 아무리 절대적 진리성이 담보되더라도 고급과정의 엄격한 인식은 차치하고 최소한의 이해를 위한 경험적 노력부터 유리시키는 난점을 안고 있는 것이다.

여기서 앞에 소개한 사례를 되새겨보자. 만일 질문한 학생이 플라톤주의적 입장을 취했더라면 어땠을까? 담당교수의 과거시절처럼 질문을 아예 하지 않았을 가능성이 높다. 플라톤주의적 입장에서 본다면 라플라스 변환의 핵이 임은 자신의 이해와 무관하게 의심의 여지가 없는 선험적 사실이지만, 그에 대한 '모름에서 앎으로 변화시킬 경험적 수단'이 쓸모없음도 또한 확실히 알고 있기 때문이다. 학생이 용기를 내어 질문을 했다고 해도 담당교수가 연구수학자로서 철저한 플라톤주의자였다면 적극적인 설명을 기대하기 어렵다. 그는 변환의 핵이인 이유에 대해 설득력 차원의 설명이나 통찰력을 주지만 어정쩡한 형식적 증명은 용납하지 않으며, 스스로 흡족할 정도로 완벽하게 최소화한 형식적 증명은 학생들의 모름을 추가할 뿐임을 알고 있기 때문이다. 기껏해야 매우 안타까운 표정으로 "그냥 그렇게 알아 둬." 정도의 당부를 하고 말 것이다.

경우가 형식주의로 바뀐다고 해도 사례의 강의실상황 결과는 플라톤주의 경우와 크게 다를 것이 없어 보인다. 사실 수학철학으로서 형식주의는 "수학이란 의미없는 부호들을 결합시키는 게임"이라 표방함으로써 플라톤주의가 안고 있는 존재론적 쟁점을 외면하고 체계의 형식적 무모순성(하지만 내심은 완전성)만 유지하면 된다는 홀가분한 입지를 스스로 만들며 야심차게 출범한 이론이다. 하지만 괴델의 불완전성정리가 밝혀지지 않았더라도 형식주의는 '너무 홀가분해서' 교육적으로 부적합하다. 플라톤주의의 '맛있어 보이지만 그림의 떡'보다 형식주의의 '확실히 맛없는 떡'이 배우는 학생들에게 더 비호감일 수 있다. 사례의 담당교수가 형식주의자였다면 애써 질문한 학생에게 지나치게 홀가분한 형식적 증명을 제시했을 것이다. 그리고 황당해하는 학생에게 아무런 안타까움조차 없이 덧붙일 것이다. "이게 수학이야!" 지금 형식주의는 연구 수학자가 주말에 벌어지는 소모적인 존재론적 논쟁의 궁지에서 빠져나올 때 요긴하게 활용되는 대피소 정도로 명맥을 잇고 있는 것 같다.

사례에 등장하는 질문학생, 담당교수, 검토교수 세 사람이 부지불식간에 취한 태도는 플라톤주의와 대척(對蹠)에 있는 인본주의에 가깝다. 물론 플라톤주의와 인본주의 중간에 위치

하는 수학철학 이론들이 여러 갈래 있다. 메디(Penelope Maddy)의 자연주의, 샤피로(Stewart Shapiro)의 실재론적 구조주의, 맥레인(Saunders Mac Lane)의 비실재론적 구조주의, 치하라(Charles S. Chihara)의 구성주의, 필드(Hartry Field)의 허구주의까지 다양한 스펙트럼을 이루게 된다. 하지만 이들 이론들은 어디까지나 수학기초론적 맥락에서 플라톤주의의 존재론 함량을 줄여가는 순서 스펙트럼이다. 수학교육의 관점에서 보면 이들은 정도의 차이가 있을 뿐 같은 방향의 요철구간을 이루고, 포퍼(Karl Popper)의 과학철학을 수학철학에 적용한 라카토스(Imre Lakatos)가 비로소 경험주의적 맥락의 수학철학으로 이어지는 변곡점을 이룬다. 이후 키쳐(Philip Kitcher)를 거쳐 허시(Reuben Hersh)의 인본주의에 이르며 수학교육은 가장 친화적인 수학철학을 만나게 된다.

확인을 위해 허시의 인본주의 수학철학 논지를 요약하면 다음과 같다([1], p27).

(1) 수학은 '인간적'이다. 수학은 인간문화의 한 부분이고 문화와 조화한다. (Frege식의 추상적이고 시간에 매이지 않는 객관적 존재가 아니다.)
(2) 수학적 지식은 오류 가능하다. (과학처럼 오류를 수정하고 재수정 함으로써 진보한다.)
(3) 시간과 장소와 다른 어떤 것에 따라 증명이나 엄밀성에 상이한 해석이 존재한다. 증명에 컴퓨터를 사용하는 것은 엄밀성에 대한 전통적이 아닌 해석이다.
(4) 경험적 증거와 수치적 실험, 확률적 증명도 수학에서 믿어야 할 것을 결정 하는데 도움을 준다. 아리스토텔레스의 논리만이 항상 필수적으로 결정을 위한 최선의 방법이 아니다.
(5) 수학적 대상들은 사회적, 문화적, 역사적 존재의 한 특수한 종류이다.

확인할 수 있다시피 사례에 등장하는 질문학생, 담당교수, 검토교수 세 사람의 입각점은 모두 방금 간추린 인본주의 수학철학의 다섯 가지 지침에 두루 부합하고 있는 것 같다. 질문한 학생이 지닌 생각, 즉 '수학공부 역시 불완전한 인간의 활동'이라는 기본입장은 1)번 지침과 부합하는 것으로서 사례의 실천을 촉발했다. 질문자에 기꺼이 부응한 담당교수는 불완전한 설명도 교육적으로 긍정적인 효용이 있다는 생각을 가진 것으로 판단되며, 이는 2), 3)번 지침과 잘 부합한다. 특히 평소에는 연구 수학자일 법한 검토교수의 태도 역시 교육의 관점에서는 각별한 태도를 보여 2), 3)번 지침과 잘 부합함으로써, 그 실천이 다시 보다 엄격한 기준의 요건을 갖춘 소논문 한 편을 산출하는 성과를 자연스럽게 낳았다. 또한 수학적 이해가 강화되는 과정이 개인 안에서만이 아니라 관심을 공유하는 교육사회 안에서 구성원 모두에게 자연스럽게 이루어졌다. 이로써 제시된 사례 전체는 총론적 지침인 5)번과도 부합함으로써, 전체적으로 인본주의와 정합적인 수학교육 실천의 한 전형을 보여주고 있다고 본다. 나아가,

역으로 이는 바람직한 수학교육철학의 모색에서 우선적으로 고려되어야 할 수학철학 형태가 인본주의임을 주장할 수 있는 귀납적 예의 한 전형으로 삼을 수도 있을 것이다.

4 나오면서

수학은 가르치고 배우는 교육의 차원에서 볼 때 수학철학과는 서로 영향을 미치는 관계로서, 수학교육이 수학철학을 고려함은 불가피해 보인다. 특히 수학교육은, 수학을 가르친다는 사실과 상응하는 수학철학이 양립가능하다는 의미에서 수학철학의 취사선택이 가능하다. 허시의 말을 재인용하지 않더라도, 엄격한 수학전공 연구의 수업이 아닌 한, 수학의 교육가능성을 저해하는 철학은 수용할 수 없다. 따라서 수학교육에 가장 친화적인 수학철학은 어떤 형태일까 모색해 보는 것은 바람직한 수학교육철학의 입론을 위해서 자연스런 일이다.

대부분의 대학 이공계 수학강의에서 틀에 박힌 공식에 대한 질의응답 과정은 이에 관련된 모색의 단초를 제공한다. 수학지식의 질의응답은 교육 즉, 모름에서 앎으로의 변화과정을 이끄는 중요한 단계이다. 이 때 설명응답이 증명 류의 응답이 되는 것은 수학과목의 특징인데, 통상적인 엄격한 증명에 대해서는 학생들이 효과적인 반응을 보이지 않음에 착안하여 일련의 이례적인 사례를 살펴보았다. 그로부터 얻은 잠정적 결론은 '바람직한 수학교육철학의 모색에서 우선적으로 고려되어야 할 수학철학 형태 중 하나가 인본주의' 라는 사실이다.

본 소고는 제목대로 모색을 위한 시론으로서, 이와 같은 결론도출에는 보다 정교한 검토가 필요한 것이 사실이다. 특히 수학지식의 본질 중에서도 그 변화과정을 과학지식의 그것과 비교하며 면밀하게 규명한 키쳐의 분석을 참조할 필요가 있다. 더구나 허시의 인본주의 수학철학에 큰 영향을 미친 키쳐의 주저(主著) <수학지식의 본성> 가운데 10장은 본 소고와 유사한 '사례탐구' 로서 주목가치가 적지 않다([6], p229-271). 하지만 여기서는 정성적 일람을 제한적 목표로 삼고 있어 관련된 보강언급은 생략했다. 그렇지라도 인본주의 이외의 다른 수학철학들은 모두 비교육적인 것으로 상정된 것처럼 비치는 점, 단 하나의 사례만을 통해서 성급하게 일반적 결론을 이끌어 귀납적 비약을 범한 점, 거친 요약조사(Quick Survey)의 결과 해석에 있어 자의성이 엿보이는 점 등은 두드러진 약점이다. 이런 약점들에까지도 불완전성을 인정하는 인본주의 지침을 적용할 수 있다면, 추후 보강된 논의를 기약하는 과정을 열어놓으며, 앞 장의 머리에서 소개한 허시의 경구(aphorism)를 다음과 같이 잠정 조정해 볼 수 있을 것이다.

"순수 연구수학자는 보통 주중에는 플라톤주의자이고 주말에는 형식주의자이다. 하지만 그도 일선에서 교육을 담당할 때만큼은 인본주의자여야 한다."

참고 문헌

[1] 박창균, 「20세기 수학의 패러다임 — 20세기 전 · 후반 수리철학을 중심으로□ 」, 한국수학사학회지 9(1996), No. 2, 22-29.

[2] 박창균, 「수학의 플라톤주의와 사회구성주의」, 한국수학사학회지 15(2002), No. 2, 69-76.

[3] 박우석, 『잃어버린 과학을 찾아서』, 담론사, 1997.

[4] Hersh, Reuben (허민 옮김), 『도대체 수학이란 무엇인가? 』, 경문사, 2003.

[5] Saunders Mac Lane (이상구 · 오채환 외 옮김), 『수학, 형식과 기능』, 청음사, 2001.

[6] Philip Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford University Press. 1984.

[7] Penelope Maddy, *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[8] Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics-Structure & Ontology*, Oxford University Press. 1997.

[9] Stewart Shapiro, *Thinking about Mathematics*, Oxford University Press. 2000.

[10] Dana Scott ed., "comments on foundations of set theory" in *Axiomatic Set Theory*, 9-15, Providence: American Mathematical Society, 1971.

[11] `http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-03Spring-2006/CourseHome/index.html`.

[12] Philip M. Morse & Herman Feshbach, *Methods of Theoretical Physics Part I*, McGraw-Hill Book Company, 1953.

An Essay on Philosophy of Mathematics-Education with an Episode

Department of Mathematics, Kyonggi University Oh, ChaeHwan

Though considering of philosophy of mathematics can be optional to theoretical mathematicians, that of philosophy of mathematics-education is supposed to be indispensible to mathematics-educators. So it is natural for mathematics-educators to ask what kind of philosophy might be more desirable for mathematics-education. In this context, this essay reviews two kinds of major philosophy of mathematics, Platonism and formalism. However it shows that humanism could be more plausible alternative philosophy of mathematics-education. In the course of entailing such a result it introduces an episode of lecture for Laplace-transformation as a speculative evidence from experience.

Key Words: philosophy of mathematics, mathematics-education, philosophy of mathematics-education, Platonism, formalism. humanism, Laplace-transformation

2000 Mathematics Subject Classification: 00A30, 97C50
ZDM Subject Classification: D25

접수일 : 2010년 3월 28일 수정일 : 2010년 5월 7일 게재확정일 : 2010년 5월 10일