선형대수학의 학습에서 벡터이론은 행렬이론보다 선행되어야 하는가

대구한의대학교 인터넷정보학과 박홍경
hkpak@dhu.ac.kr

대구한의대학교 기초과학연구소 김태완
nwtwkim@hanmail.net

오늘날 선형대수학은 이론의 기초적 성격과 응용의 풍부성으로 인해 대학수학에 있어서 필수적인 분야로서 자리하고 있다. 벡터이론과 행렬이론은 선형대수학의 주된 분야이다. 본 논문에서는 선형대수학의 학습에서 벡터이론과 행렬이론 중 어느 것을 먼저 도입하는 것이 바람직할 것인가에 대한 질문을 제시할 때 본 연구의 주된 결과, 역사적 순서와는 달리 벡터이론이 행렬이론보다 선행되어야 함을 주장한다.

주제어 : 선형대수학, 벡터이론, 행렬이론, 지도순서

1 들어가는 말

선형대수학은 미적분학과 더불어 대학에서 교양과정의 수학과목이다. 선형대수학은 기원전 고대수학에서부터 1차방정식의 문제해결에서 시작하여 행렬이론과 벡터이론을 중심으로 체계화되고 추상화된 대수학의 한 분야이다. 이것은 오늘날 현대수학의 전반에 걸쳐 활용되고 있는 기초적인 분야로서 이것의 이해 없이는 현대수학을 이해하기 곤란하다고까지 할 수 있다. 이론의 기초적인 성격뿐만 아니라 응용의 풍부성으로 인해 이공계를 위시하여 경제학, 사회학, 심리학과 같은 사회과학 등에 광범위하게 쓰이고 있다([6], [8], [10], [11], [13]).

선형대수학의 이론은 크게 행렬이론과 벡터이론으로 대별할 수 있다. 행렬이론은 그 기원을 고대수학의 1차방정식의 문제해결에서 찾을 수 있다([2], [3]). 이로부터 행렬식, 행렬, 그리고 선형변환 등을 주요 개념으로 하여 형성된 분야이다. 현재는 더욱 발전하여 선형대수학의 한 분야로서가 아니라 대수학, 이산수학, 통계학 등 수학 전반, 나아가 과학전반의 표현론으로서 널리 활용되고 있다.

벡터이론은 그 기원을 물리적 측면과 수학적 측면에서 찾을 수 있다([4]). 전자는 근대수학에 들어서서 17세기 뉴턴(I, Newton, 1642-1727)에 의해 힘이나 속도와 같은 물리적 대상의 존재방식에 대한 양적인 표현에서 찾는다. 후자는 기하학적인 입장과 대수학적 입장으로 다시 나뉜다. 기하학적 입장은 라이프니츠(G. W. Leibniz, 1646-1716)의 위치의 기하학 탐구에서 찾는다. 대수학적 입장은 19세기 초 복소수의 개념 형성에서 찾는 것이다. [2]에서는 이러한 기원을 평면과 공간의 기하학으로 규정한 바 있다. 이 분야는 기하벡터를 중심으로 하는 벡터기하학을 다루는 주제이다. 이로부터 벡터연산, 기저, 차원, 벡터공간, 선형사상 등을 주요개념으로 하고 있으며 현재는 벡터해석학, 응용수학 등 수리과학에 광범위하게 활용되고 있다.

최근 선형대수학에서의 벡터이론과 행렬이론에 대해 각각에 관한 개념학습에 대한 연구가 행해졌다([2], [3], [4], [5]). 이러한 선행연구를 바탕으로 본 논문에서는 선형대수학의 학습에서 벡터이론과 행렬이론 중 어느 것을 먼저 도입하는 것이 바람직할 것인가에 대한 질문을 고려한다.

사실 이러한 지도순서의 질문은 모든 내용을 동시에 교육할 수 없다는 근본적인 한계로 인해 필연적으로 제기되는 수학교육의 근본적인 문제의 하나이다. 이에 관해서는 크게 2가지 측면에서 고려할 수 있다. 그것은 지식의 우선순위와 조직화의 문제이다.

우선순위는 구체적인 개념들의 순서문제이다. 출발점이 되는 개념은 어떤 것으로 할 것인가? 가령 벡터이론과 행렬이론 중에서 어느 것을 먼저 할 것인가? 형식적 개념과 직관적 개념 중에서 무엇을 먼저 도입할 것인가? 또한 개념들 사이에 우선순서를 정하는 근거나 기준은 무엇인가?

조직화는 역사적 순서와 이론적 체계를 어떻게 결합하고 조직하는가의 문제이다. 가령 어떤 부분에서는 역사적 순서를 따르는 것이 자연스럽고 타당한가? 다른 부분에서는 이론적 체계를 따라야 하는가? 역사적 순서를 따르지 않는 경우에 그에 대한 분명한 근거와 기준은 무엇인가?

이러한 2가지 측면에 대해 명확히 인식하고 방향을 설정하는 일은 교재개발이나 지도안의 작성에 매우 중요하다. 뿐만 아니라 그것은 교육 현장의 실제 적용에 있어서도 하나의 객관적인 기준이 된다.

벡터이론과 행렬이론의 학습에 있어서 우선순위에 관한 질문에 답하기 위해 다음과 같이 고찰한다. 먼저 벡터이론과 행렬이론을 중심으로 선형대수학의 역사적 순서에 대해 간단히 개관한다. 이러한 개관에 의해 역사적으로는 행렬이론이 벡터이론보다 선행함을 관찰한다.

다음으로 선형대수학의 여러 문헌을 기원과 기원에 이은 후속이론이라는 2가지 기준에 의거하여 분석한다. 이로부터 다양한 유형의 지도순서를 확인한다. 결론으로서 벡터이론의 학습이 행렬이론보다 선행해야 하는 이유에 대해 수학교육의 관점에서 살펴본다.

2 선형대수학의 역사적 순서

앞서 언급한 바와 같이 여기서는 선형대수학의 역사적 순서를 고찰한다. 이를 위해 특히 다음의 6가지 주요 개념인

1차방정식, 행렬, 행렬식, 기하학, 벡터공간, 선형사상

을 대상으로 하여 역사적 개관을 한다. 1차방정식과 평면과 공간의 기하학(간단히 기하학)은 각각 [3]에 언급한 행렬이론과 벡터이론의 기원에 해당하는 것이며, 행렬과 행렬식은 행렬이론의 주요 분야로서, 벡터공간과 선형사상은 벡터이론의 주요 분야로서 선택된 개념들이다.

이들은 어느 것을 출발점으로 해도 선형대수학을 전개할 수 있음에 주목한다. 이러한 점은 [1], [14] 등의 여러 학자들이 주장하는 수학적 기원의 다원성을 여실히 보여준다는 점에서도 흥미롭다. 물론 이것 말고도 다른 개념을 출발점으로 삼을 수 있다. 가령, 행축약이나 기저 등을 출발점으로 하여 선형대수학을 전개할 수도 있다.

한가지 주의해야 할 점은 기원에서뿐만 아니라([2]) 역사적 순서를 고찰함에 있어서도 다원주의는 적용된다는 것이다. 역사적 사실에 대한 인과관계와 선후관계를 명백하게 밝히는 데에는 한계가 있을 수 있기 때문이다. 이러한 한계점을 감안하면서 위의 6가지 개념을 중심으로 아래와 같이 크게 7가지 구분을 통해 선형대수학의 역사적 순서에 대해 살펴본다. 언급되는 사실에 관해서는 주로 [6], [7]을 참조한다.

(i) 1차방정식으로부터 행렬식의 등장 : 고대수학 ~ 18세기 중반

행렬식의 개념은 고대수학의 1차방정식의 문제해결로부터 시작하여 근대수학에 이르러 등장한다. 17세기 후반 세키(K. Seki, 1642-1708), 라이프니츠를 거쳐 18세기 중반 맥로린(C. Maclaurin, 1698-1746), 크래머(G. Cramer, 1704 - 1752)에 와서 1차방정식의 행렬식에 의한 일반적 해법이 주어진다. 이것은 고대수학으로부터 약 2000년이 지나서였다.

(ii) 1차방정식과 평면과 공간의 기하학의 본격적인 연계 : 17세기 중반

방정식과 도형의 연계는 17세기 중반 데카르트(R. Descartes, 1596-1650)의 해석(좌표)기하학의 등장과 더불어 본격적으로 시작되었다. 도형은 방정식의 그래프로서, 방정식은 도형의

대수적 표현으로서 인식하게 된 것이다.

(iii) 행렬식의 형성 : 18세기 후반 ~ 19세기 초반

18세기 후반 라플라스(D. S. Laplace, 1749-1827), 라그랑쥬(J. L. Lagrange, 1736-1813)에 의해 행렬식은 방정식과는 별개로 적극적으로 다루어지기 시작했다. 논리적(사실 귀납적) 정의뿐만 아니라 그에 대한 직관적 의미도 부여되었다. 19세기에 들어서면서 가우스(C. F. Gauss, 1777-1855)는 정사각형(행렬)을 결정한다는 의미에서 행렬식을 determinant라 명명하였으며 이는 코시(A. L. Cauchy, 1789-1857)에 이르러 현대적 의미에서 정립되었다. 19세기 후반 바이에르슈트라스(K. Weierstrass, 1815-1897)는 행렬식의 연역적 정의를 주었다.

(iv) 행렬식에서 행렬 : 18세기 후반 ~ 19세기 중반

크래머까지는 행렬 개념이 없는 행렬식의 사용이라 할 수 있다. 행렬식이 1차방정식의 해결기법으로서의 도구적 개념이었으므로 행렬의 개념까지는 이르지 못한 것이다. 이후 18세기 후반 라그랑쥬가 막연하지만 행렬의 개념을 염두에 두면서 행렬식을 다루기 시작했다.

19세기에 들어서면서 가우스는 소거법(행축약)에 의해 계수행렬을 보다 적극적으로 사용하였으며 코시는 이를 tableau라고 명명하였다. 이것은 라이프니츠의 행렬식 사용 이후 120년 이상 지나서였다. 행렬의 현대적 표기법의 사용은 코시로부터 30년이 지난 19세기 중반 실베스터(J. Sylvester, 1814-1897)에 의해서였다. 그는 행렬식의 모태라는 의미에서 행렬을 matrix라 명명하였다.

(v) 행렬과 선형사상 : 19세기 중반 이후

선형변환의 개념은 처음에는 행렬과 무관하게 벡터함수로서 고려되었으며 18세기로 거슬러 올라간다. 이후 19세기에 들어서서 선형사상에 대한 논의가 점차 활발해졌으며 19세기 중반 캐일리(A. Cayley, 1821-1895)에 의해 비로소 행렬과 연관을 맺게 되었다.

캐일리는 선형사상의 표현으로서 행렬의 의미를 파악하였다. 이로부터 그는 행렬대수학을 크게 발전시켰다. 그는 라이프니츠 이후로 150년간 발전되어온 행렬식이론보다 그간 독립적으로 다루어져 왔던 선형사상의 표현으로서 행렬이론이 향후 더욱 중요하게 될 것이라고 하였다. 그로 인해 행렬식과 행렬의 중요성이 역전되었다고 할 수 있다. 즉 행렬식의 모태라는 의미에서 보완적으로 등장한 행렬의 개념이 오히려 역으로 행렬식을 특수한 성질로서 갖는 보다 일반적인 개념으로 인식하게 된 것이다.

이후 벡터함수의 연구는 19세기 후반 깁스(J. W. Gibbs, 1839-1903), 헤비사이드(O. Heaviside, 1850-1925)에 의해 크게 발전하였다. 그들은 선형대수학과는 달리 미적분학을 접목하여

벡터해석학을 전개하였다. 이것은 19세기 말엽에 나타난 추상적인 벡터공간론에 힘입어 20세기 초반 함수해석학으로 발전하였다.

(vi) 평면과 공간의 기하학에서 벡터(벡터의 기하학적 기원) : 17세기 후반 ~ 19세기 초반

벡터의 기원은 크게 3가지를 들 수 있다. 첫째는 17세기 후반 물리적 기원이다. 둘째는 17세기 후반 라이프니츠의 기하학적 기원이다. 셋째는 19세기 초반 대수적 기원으로서 복소수의 출현이다.

평면과 공간의 기하학에서 벡터를 이용한 표현은 18세기 오일러(L. Euler, 1707-1783), 몽쥬(G. Monge, 1746-1818)에 이르러 형성되었다. 성분을 이용한 벡터 표현은 19세기 초반 복소수의 개념형성을 거쳐 중반 해밀턴(W. R. Hamilton, 1805-1865)에 의해서이며 이로써 벡터의 논리적 개념이 형성된 것이다. 물리적 개념으로 출발한 벡터의 개념을 vector라 명명하고 수학적 개념으로서 벡터와 스칼라로 명확히 구분한 사람은 19세기 후반 맥스웰(J. C. Maxwell, 1831-1879)이다.

(vii) 벡터공간 개념 : 19세기 초반 ~ 20세기 초반

한편 좌표기하학의 반등으로 일어난 종합기하학은 19세기 들어서서 볼차노(B. Bolzano, 1781-1848)를 기점으로 시작되었다. 그는 좌표없이 벡터의 개념을 다루었다. 종합기하학은 퐁슬레(J. V. Poncelet, 1788-1867), 폰 슈타우트(K. G. C. von Staudt, 1798-1867)에서 큰 진전을 이루었다. 이후 19세기 중반 뫼비우스(A. F. Möbius, 1790-1868)와 해밀턴의 연구가 이어졌다. 그라스만(H. G. Grassmann, 1800-1877)에 이르러 벡터대수학은 크게 발전하였다.

19세기 후반 페아노(G. Peano, 1858-1932)에 의해 처음으로 추상적인 벡터공간을 규정하게 되었다. 그는 차원과 선형 연산자도 도입하였다. 이러한 연구는 20세기에 들어서서 힐베르트(D. Hilbert, 1862-1943), 바나흐(S. Banach, 1892-1945), 와일(C. H. Weyl, 1885-1955) 등에 의해 크게 발전하였다.

3 선형대수학의 문헌분석

선형대수학의 교재는 대학교재 중에서 미적분학과 함께 가장 방대하다. 따라서 모든 교재에 대해 벡터이론과 행렬이론의 우선순위에 대해 조사할 수는 없다. 다만 여기서는 2절에서 고찰한 6가지 주요 개념

1차방정식, 행렬, 행렬식, 기하학, 벡터공간, 선형사상

을 대상으로 순서를 분석한다. 문헌에서 나타나는 몇가지 다른 유형의 순서는 다음과 같다.

[6] 기하학 → 1차방정식 → 행렬 → 행렬식 → 선형변환 → 벡터공간
[8] 기하학 → 벡터공간 → 선형사상 → 행렬 → 1차방정식 → 행렬식
[9] 기하학(부록) → 행렬 → 선형사상 → 행렬식 → 벡터공간 → 1차방정식
[10] 벡터공간 → 선형사상 → 행렬 → 행렬식 → 1차방정식
[11] 1차방정식 → 행렬 → 행렬식 → 기하학 → 벡터공간 → 선형사상
[12] 벡터공간 → 행렬 → 1차방정식 → 선형사상 → 행렬식
[13] 1차방정식 → 기하학 → 선형사상 → 행렬 → 행렬식 → 벡터공간

여기서는 이러한 순서의 차이에 관한 분석을 위해 다음 2가지 기준을 적용한다. 첫째는 선형대수학의 2가지 기원인 1차방정식과 기하학 중에서 어느 것을 먼저 출발점으로 하는가 이고, 둘째는 그 출발점의 선택에 따른 후속이론으로서 벡터이론과 행렬이론 중 어느 것을 선택하는가 이다.

첫째의 경우, 역사적 발생 기원을 고려한 것이다. [2]에서는 선형대수학에서 2가지 기원을 들었는데 이중에서 1차방정식으로 출발하느냐 기하학으로 출발하느냐 이다. 전자는 1차방정식의 계산기능을 중시하는 입장이며 예로서 [11], [13]을 들 수 있다. 후자는 기하학을 통한 벡터의 개념이해를 중시하는 입장이며 [6], [8]을 들 수 있다. [9]는 이를 선수 지식의 의미에서 부록에 싣고 있는데 여전히 후자에 해당한다고 할 수 있다.

둘째의 경우, 첫째에서 언급한 2가지 기원에 따르는 후속이론이 벡터이론이 먼저인지 행렬이론이 먼저인지에 대해서는 다시 크게 4가지 경우로 나뉜다.

먼저 1차방정식으로 출발할 때 역사적 순서에 부합하여 행렬이론이 이어서 나오는 경우와 그렇지 않는 경우로 나뉜다. 전자의 예로는 [11]이 있고 후자의 예로는 [13]이 해당한다.

다음으로 기하학으로 출발힐 때에도 역사적 순서에 부합하여 벡터이론이 이어서 나오는 경우와 그렇지 않는 경우로 나뉜다. 전자의 예로는 [8]이 있고 후자의 예로는 [6], [9]가 있다. 덧붙여 [6]은 1차방정식을 행렬이론의 동기로서 다룬 반면에 [9]의 경우는 1차방정식을 행렬이론의 응용으로서 다룬다는 점에서 차이점이 보인다.

이러한 2가지 기준에 따라 앞의 5종의 문헌 [6], [8], [9], [11], [13]은 서로 다른 유형의 순서로 구성되어 있음을 관찰할 수 있다. 뿐만 아니라 나머지 2종의 문헌인 [10], [12]도 위의 문헌들과 다른 유형의 순서를 가진다.

사실 위에서 고려한 2가지 기준과는 다른 여러 가지 기준이 가능하다. 예를 들어, 현대수학의 특징인 공리주의에 따라 전개하느냐 그렇지 않느냐는 중요한 하나의 기준이 된다.

이러한 기준에 따른 구분은 오늘날 수학교육의 측면에서는 중등수준과 대학수준의 구분과도 합치한다. 대학에서의 수학교육은 통상 공리주의 입장을 따라 형식성, 추상성, 엄밀성, 체계성을 강조한 개념학습 위주이다. 여기서는 직관이나 계산기능은 이러한 개념을 이해하고 숙달하기 위해 행해진다. 반면에 중등학교 수학교육에서는 개념학습보다는 문제해결학습 위주이다. 어렵고 딱딱한 개념을 바로 접하기보다 직관이나 계산기능을 통하여 개념을 형성하는 방식이다. 이러한 입장이 선형대수학의 기원을 따르는 입장과 맥락을 같이하는 것에 주목한다.

가령 [10], [12]는 공리주의를 따르는 경우로서 벡터공간에서 출발한다. 그렇지 않는 경우로는 앞의 5종이 모두 해당하지만 특히 벡터공간을 마지막에 다루는 [6], [13]을 들 수 있다. 이들 두 문헌은 비록 순서의 차이는 있지만 2가지 기원을 모두 가장 먼저 다룬다는 점에서 공리주의에 가장 반대되는 직관을 중시하는 경우라 볼 수 있기 때문이다.

나아가 [10], [12]도 순서의 유형이 서로 다름을 쉽게 관찰할 수 있다. 이들 사이에는 행렬과 선형사상 중 어느 것을 먼저 선택하고 있는 것에 따라 다를 뿐만 아니라 또한 1차방정식을 기원으로서 다루거나 응용으로서 다루거나에 따라서도 다르다. 이러한 관찰로부터 위에서 제시한 7가지 유형은 모두 다른 유형의 순서를 가지고 있음을 알 수 있다.

4 벡터이론이 행렬이론보다 선행해야 하는 이유

이제 본 논문의 주제인 벡터이론이 행렬이론보다 선행해야 하는 이유에 대해 논의한다. 논의에 앞서 2절에서 조사한 바와 같이 역사적 순서는 벡터이론보다 행렬이론이 앞선다는 점을 상기해야 한다. 행렬이론은 비록 행렬식이나 행렬 개념이 완전히 독자적으로 형성되지는 않았지만 1차방정식의 문제해결에서 기원을 두고 18세기 중반에 행렬식의 개념이 형성되었다. 반면에 벡터이론은 17세기 후반 물리적 또는 기하학적 기원을 갖고는 있지만 19세기 초반 복소수에 의한 대수적 기원이 나타나서야 제대로 형성되었다고 할 수 있기 때문이다.

하지만 이러한 역사적 순서와는 달리 수학교육에서는 벡터이론이 행렬이론보다 선행해야 하는 이유로서 아래 3가지 측면을 들 수 있다. 그것은 개념이해, 연계성, 직관중시이다.

(i) 개념 요소 측면에서 개념이해의 강조를 위해서이다. 수학교육에서 개념학습은 필연적으로 수학적 구조와 관계한다. 다른 학문과는 달리 수학은 수학 자체의 구조, 즉 수학적 지식을 내적으로 조직하고 상호연관성을 짓는 틀을 갖고 있기 때문이다. 말하자면 개념학습은 수학적 구조를 본질적으로 이해할 수 있어야 하며 다양한 문제해결에 정확하고 유연하게 응용할 수 있어야 한다. 이러한 점에서 개념이해, 계산기능, 그리고 응용은 개념학습의 주된 요소이다

([5]).

행렬이론을 벡터이론보다 선행하는 것은 1차방정식을 기원으로 두고 역사적 순서에 부합하는 것이지만, 이는 개념이해보다는 방정식의 문제해결을 통한 계산기능을 강조한다. 이에 비해 벡터이론을 선행하는 것은 그 기원인 평면과 공간의 기하학을 통하여 벡터의 개념이해를 중시하는 것이다. 이것은 지식의 측면에서도 기능적인 측면보다는 개념적인 측면을 강조하는 것이라 할 수 있다.

(ii) 벡터이론과 행렬이론의 연계성 측면이다. 즉 이론적 체계에서 보면 벡터이론 다음에 행렬이론의 순으로 자연스럽게 연계된다. 독립적인 기원을 갖고 출발하여 발전한 이들 두 분야는 여러 가지 측면에서 순서를 가지면서 결합되어진다. 먼저 표기법의 측면에서, 행렬을 벡터보다는 일반적인 표현형태로서 간주함으로써 결합할 수 있다([2]). 가령 연립1차방정식의 표현은 스칼라 형식, 벡터 형식, 행렬 형식, 사상 형식으로 구분되어진다. 또한 연산의 측면에서도 내적의 일반화로서 행렬의 곱셈을 볼 수 있듯이 벡터대수의 일반화로서 행렬대수를 고려함으로써 결합할 수 있다. 나아가 사상의 측면에서 이들은 실제적인 의미로 결합되어진다. 벡터공간 사이의 선형사상은 행렬에 의해 표현될 수 있기 때문이다.

이러한 연계성은 이론적 체계의 순서인

쉬운 것 → 어려운 것, 단순한 것 → 복잡한 것

를 따른다고 볼 수 있다. 따라서 벡터이론에서 행렬이론으로의 진행은 이러한 개념의 지도순서와 부합한다.

(iii) 앞의 2가지 이유보다 더욱 본질적으로 벡터이론이 행렬이론보다 선행되어야 하는 이유는 직관중시 측면에 있다. 수학을 크게 논리와 직관으로 구분할 때 이는 논리보다는 직관이 강조되어야 한다는 것을 말한다. 효과적인 개념학습은 (i)에서 언급한 3가지 개념 요소인 개념이해, 계산기능, 응용의 균형적이고 통합적인 형성이 이루어져야 하기 때문이다. 이들이 균형적이면서도 유기적으로 잘 통합되기 위해서는 통합의 주체가 필요한데 그것이 바로 개인의 수학적 직관이다. 요컨대 효과적인 개념학습을 위해서는 수학적 직관에 의해 개념, 계산, 응용이 상호연관성을 갖고 적절하게 균형적으로 통합되어야 한다.

행렬이론은 계산기능을 강조함으로써 논리를 함양하는데 도움이 되는 반면 벡터이론은 기하학을 통해 벡터개념을 강조함으로써 논리보다는 직관을 함양하는데 도움이 되기 때문이다. 또한 이것은 물리적 기원을 갖고 있어서 실제 물리학을 포함한 여러 분야에로의 응용에도 더욱 효과적이다.

지금까지 우리는 벡터이론이 행렬이론보다 선행되어야 하는 이유를 고찰하였다. 이러한 고찰로부터 3절에서 소개한 문헌분석에서 나타난 7가지 유형 중에서 [6], [8], [13]은 모두 직관중시 형태로서 다음과 같이 비교할 수 있다.

[8]은 벡터이론과 행렬이론을 명확히 구분하고 벡터이론을 선행하여 구성한 순서이다. [6]과 [13]은 선형대수학의 기원에 해당하는 1차방정식과 기하학을 동기로서 먼저 다루고 벡터공간은 마지막에 다루는 순서로 구성되어 있다. 이들 두 유형의 차이점은 [13]은 선형대수학의 이름에 걸맞게 역사적 순서에 부합할 뿐만 아니라 계산기능을 강조하는 1차방정식을 출발점으로 하고 있는데 비해 [6]은 개념이해를 강조하는 기하학을 출발점으로 한다. 이로 인해 [13]은 1차방정식에 이어 기하학을 다룸으로써 벡터이론이 선행하는 것에 비해 [6]은 기하학에 이어 1차방정식을 다룸으로써 행렬이론이 선행하고 있다.

5 결론 및 제언

4절에서는 선형대수학의 학습에서 벡터이론이 행렬이론보다 선행하는 것이 바람직한 이유로서 3가지 측면을 고려하였다. 이를 요약하면 다음과 같다.

첫째 개념학습의 측면에서 볼 때 행렬이론은 방정식의 문제해결을 통한 계산기능을 강조하는 것에 비해 벡터이론은 기하학을 통하여 개념이해를 강조할 수 있다. 둘째 이론적 체계의 측면에서 볼 때 벡터이론에서 행렬이론으로의 진행은 표기법이나 연산에 있어서 자연스러운 일반화로서 전개할 수 있다. 셋째 수학을 직관과 논리의 측면에서 볼 때 행렬이론은 계산기능을 강조함으로써 논리를 함양하는데 도움이 되는 반면 벡터이론은 개념이해를 강조함으로써 논리보다는 직관을 함양하는데 도움이 될 수 있다.

요컨대 벡터이론이 행렬이론보다 선행하는 교수학습은 직관중시의 체계적 개념학습이라 할 수 있다. 이러한 교수학습은 수학적 직관을 주체로 개념, 계산, 응용의 균형적이고 통합적인 수학교육을 가능하게 한다. 대학에서의 통상의 공리주의 입장을 따르는 수학교육은 체계적 개념학습만을 강조하는 것에 비해 이것은 수학적 직관을 중시함으로서 균형성과 통합성을 추구한다는 점에서 기존의 방식에 대한 개선으로 볼 수 있다.

물론 이러한 주장이 절대적인 것이 아님은 말할 나위도 없다. 학습자의 대상에 따라 당연히 다를 수 있다. 가령 중등수학의 경우와 대학수학의 경우는 다를 수 있다. 또한 동일한 학년이라도 학습자의 수학능력에 따라 다를 수도 있다. 나아가 학습자만이 아니라 교사의 관점에 따라서도 다른 선택이 가능하다. 보다 일반으로 이러한 지도순서의 문제는 수학교육 전반에 관련한다. 말하자면 교육철학, 교육목표, 교수학습에 따라 다양한 선택이 가능하다. 이러한

선택의 차이에 따른 교육적 의의나 성과는 추후 현장에서의 적용을 통해 구체적이고 실제적인 연구가 필요하다.

한편 3절에서의 고찰로부터 보다 일반으로 선형대수학의 순서를 분류하는 문제는 하나의 흥미로운 연구과제이다. 나아가 이와 유사한 연구를 다른 분야로 적용하는 일도 가능하다.

먼저 우리의 논의는 선형대수학에서 6가지 주요 개념을 대상으로 순서를 고려하고 있음을 염두에 두어야 한다. 이러한 점에서 주요 개념의 대상을 선형대수학의 전반으로 확대하는 경우에 대한 순서문제를 고려할 수 있다. 또한 주요 개념을 동일하게 한 경우에도 위에서 제시한 7가지 유형으로 충분한지, 그렇지 않다면 어떤 유형을 더 고려할 수 있는지, 등에 관한 여러 가지 의문을 제기할 수 있다. 이러한 여러 가지 의문들에 관한 폭넓고 심도 있는 후속연구를 기대한다.

감사의 글 본 논문의 개선을 위해 심사위원의 유용하고 의미있는 지적과 조언에 깊은 감사를 드린다.

참고 문헌

[1] 김용운, 김용국, 『수학사대전』, 우성문화사, 서울, 1986.

[2] 박홍경, 「선형대수학의 두 가지 기원적 개념」, 한국수학사학회지 21(2008), 109-120.

[3] 박홍경, 「행렬식 및 행렬 개념의 유형과 효과적인 개념학습」, *Proc. Jangjeon Math. Soc.* 12(2009),101-108.

[4] 박홍경, 김태완, 남영만, 「벡터개념의 강의적 체계순서에 관하여」, 한국수학사학회지 20(2007), 59-72.

[5] 박홍경, 김태완, 이우동, 「수학적 개념의 유형과 효과적인 개념학습」, 한국수학사학회지 20(2007), 105-126

[6] 이상구, 『현대 선형대수학』, 경문사. 서울, 2006.

[7] H. Eves, 허민, 오혜영 역, 『수학의 기초와 기본개념』, 경문사, 서울, 1995.

[8] 松坂和夫, 〈線型代數入門〉, 岩波書店, 1990.

[9] 佐武一郞, 〈線型代數學〉, 裳華房, 1992.

[10] 上坂吉則, 塚田眞, 〈入門線型代數〉, 近代科學社, 1987.

[11] Anton, H. and Busby, R. C., *Contemporary linear algebra*, Anton Textbooks Inc., 2003.

[12] S. Lang, *Linear algebra*, Springer-Verlag, 1987.

[13] D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, Addison-Wesley, 2000.

[14] S. Maclane, *Mathematics : forms and functions*, Springer-Verlag, 1986.

Is vector theory prior to matrix theory in teaching of linear algebra

Department of Internet Information, Daegu Haany University Hong Kyung Pak
Institute of Basic Science, Daegu Haany University Tae Wan Kim

Today linear algebra is one of compulsory courses for university mathematics by virtue of its theoretical fundamentals and fruitful applications. Vector theory and matrix theory constitute of main topics in linear algebra. In the present paper we consider the question which of the two topics is prior in teaching of linear algebra. We suggest that vector theory should be prior to matrix theory contrary to the historical order of them.

Key Words: linear algebra, vector theory, matrix theory, order of instruction

2000 Mathematics Subject Classification: 97-03
ZDM Subject Classification: G19

접수일 : 2010년 3월 18일 수정일 : 2010년 5월 14일 게재확정일 : 2010년 5월 17일