

유체유동에 의한 다중벽 탄소나노튜브의 안정성 해석

Stability Analysis of Multi-wall Carbon Nanotubes Conveying Fluid

송 오 섭*·윤 경 재*

Ohseop Song and Kyungjae Yun

(2010년 4월 29일 접수 ; 2010년 5월 24일 심사완료)

Key Words : Multi-wall Carbon Nanotubes(다중벽 탄소나노튜브), Flutter(플러터), Stability(안정성), Conveying Fluid(유체유동), Critical Flow Velocity(임계유속)

ABSTRACT

In this paper, vibration and flow-induced flutter instability analysis of cantilever multi-wall carbon nanotubes conveying fluid and modelled as a thin-walled beam is investigated. Non-classical effects of transverse shear and rotary inertia and van der Waals forces between two walls are incorporated in this study. The governing equations and the associated boundary conditions are derived through Hamilton's principle. Numerical analysis is performed by using extend Galerkin method which enables us to obtain more exact solutions compared with conventional Galerkin method. Cantilevered carbon nanotubes are damped with decaying amplitude for flow velocity below a certain critical value, however, beyond this critical flow velocity, flutter instability may occur. Variations of critical flow velocity with both radius ratio and length of carbon nanotubes are investigated and pertinent conclusion is outlined.

1. 서 론

탄소나노튜브(carbon nanotubes; 이하 CNT)가 1991년 Iijima에 의해 발견된 이후로 CNT의 기계적 특성에 관한 광범위한 연구가 수행되었다. 지금까지 연구결과에 의하면 CNT는 다른 어떠한 알려진 재료보다 우수한 기계적 특성을 보이며, 또한 물리적, 화학적으로도 탁월한 특성 때문에 수소저장 연료전지, 나노 와이어, 나노 캡슐, 나노 핀셋, 단전자 소자, 가스센서, 의·공학용 미세 부품, 고기능 복합체 등에서 무한한 응용 가능성을 보여주고 있다. 이러한 응용에 있어서 CNT의 기계적 거동에 대한 이해가 필수적이다. 그러나 CNT의 이에 관한 연구

는 아직 활발하지 않으며, 특히 그 진동 특성들에 관한 연구는 초기 단계에 있다 할 수 있다.

CNT는 가스를 저장하기 위한 나노 컨테이너와 유체를 수송하는 나노파이프로 사용될 수 있는 가능성을 지니고 있다. 특히, 나노파이프는 내부를 흐르는 유체유동의 속도에 따라 그 거동 특성이 크게 달라지므로 이에 대한 연구가 필수적이다. CNT를 셀과 보로 모델링하여 그 진동 현상을 규명하기 위한 노력들이 시도되어왔다.

CNT는 단일벽 탄소나노튜브(single-wall carbon nanotubes; 이하 SWCNT)와 다중벽 탄소나노튜브(multi-wall carbon nanotubes ; 이하 MWCNT)로 나눌 수 있다. SWCNT는 하나의 튜브로 구성되어 있으며, MWCNT는 여러 개의 튜브로 구성되어 있다. 여러 개의 튜브가 동심원 형태로 배열된 MWCNT의 경우 각 튜브사이에 작용하는 반데르발스(van der Waals) 힘 때문에 반경방향 진동모드가

† 교신저자; 정희원, 충남대학교 기계공학과
E-mail : songos@cnu.ac.kr

Tel : (042)821-5650, Fax : (042)822-5642

* 정희원, 국방과학연구소

발생한다. 따라서 좀 더 정확한 CNT의 기계적 특성을 파악하기 위해서 반데르발스 힘의 효과를 고려한 MWCNT의 특성에 대한 연구가 활발히 진행되어지고 있다. 최근 MWCNT에 대한 연구로서, Yoon 등은⁽²⁾ 다중 탄성보 모델을 기초로 하며, 탄성체 안에 놓여진 MWCNT의 공진 주파수와 그에 연관된 진동 모드에 관한 연구를 수행하였으며 또한 C. M. Wang과 그의 공동 연구자들⁽³⁾은 작은 종횡비를 가진 CNT의 해석을 위해, 티모센코 보(이하 TB) 모델을 사용하여 MWCNT의 자유진동해석을 하였으며 DQ 방법(Differential quadrature method)을 사용하여 종횡비와 경계 조건을 달리하며 운동방정식을 풀어 오일러 보의 결과와 비교 하였다. 그리고 최근에는 Metin Aydogdu⁽⁴⁾ 등이 GSDT(generalized shear deformation beam theory)를 이용한 MWCNT의 자유진동해석을 수행하였다.

한편 MWCNT의 유체유발진동에 관한 연구는 Euler beam 이론에 기초하여 수행되어 전단 변형과 회전 관성의 영향이 무시됨으로 인하여 MWCNT의 길이가 상대적으로 짧고 재료의 E/G(G: 전단탄성계수) 값이 큰 경우에 고차진동모드로 갈 경우 전단 변형 및 회전관성 효과가 커지게 되어 오일러 보 이론이 잘 맞지 않게 된다.

따라서, 이 연구에서는 전단 변형과 회전관성의 영향을 고려하며, 또한 1,2차 와핑효과를 고려한 박판 보 모델(thin-walled beam model)에 기초하여 MWCNT의 유체유발 플러터 해석을 수행하고자 한다. 이 연구를 통하여 Timoshenko beam과 Euler beam의 차이점을 분석하고 또한 MWCNT와 SWCNT의 플러터 특성을 비교 분석한다.

2. 이론 해석

2.1 변위장

MWCNT내의 각점 A_1, A_2 의 변위 벡터를 변위변수(kinematic variables)로 표시하면 다음과 같다 (Fig. 1).

$$\begin{aligned}
 u_1(s_1, z_1, t) &= u_{1o}(z_1, t) - Y_1(s_1)\phi_1(z_1, t) \\
 v_1(s_1, z_1, t) &= v_{1o}(z_1, t) + X_1(s_1)\phi_1(z_1, t) \\
 w_1(s_1, z_1, n_1, t) &= \\
 &w_{1o}(z_1, t) + \theta_{Y_1}(z_1, t)[X_1(s_1) + n_1 \frac{dY_1}{ds_1}]
 \end{aligned}$$

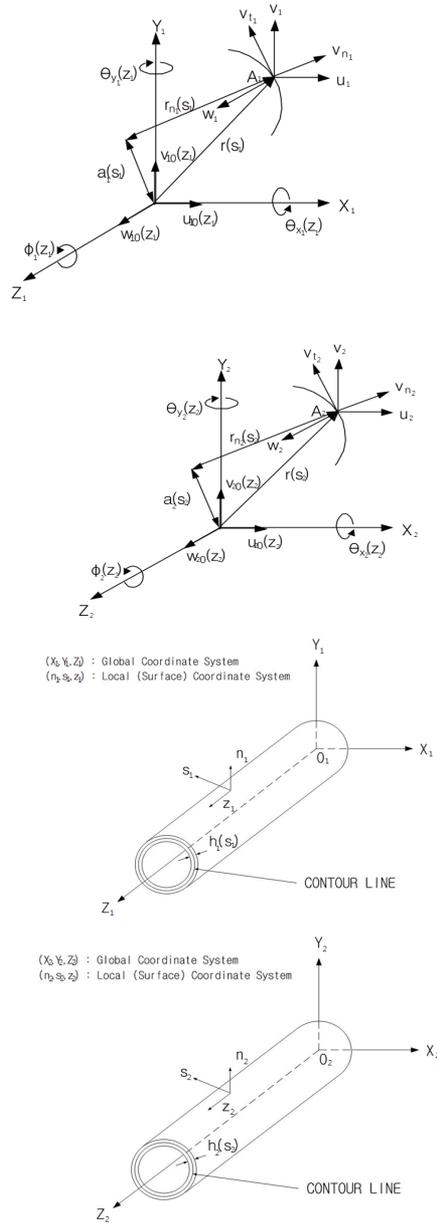


Fig. 1 Kinematic variables, coordinate system of thin-walled beam of MWCNT

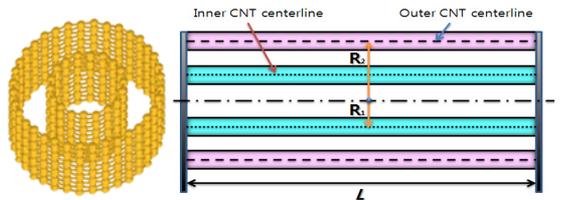


Fig. 2 Configuration and geometry of MWCNT

$$\begin{aligned}
 & + \theta_{X_1}(z_1, t) \left[Y_1(s_1) - n_1 \frac{dX_1}{ds_1} \right] \\
 & - \phi'_1(z_1, t) \left[F_{w_1}(s_1) + n_1 a_1(s_1) \right] \\
 u_2(s_2, z_2, t) & = u_{2o}(z_2, t) - Y_2(s_2) \phi_2(z_2, t) \\
 v_2(s_2, z_2, t) & = v_{2o}(z_2, t) + X_2(s_2) \phi_2(z_2, t) \\
 w_2(s_2, z_2, n_2, t) & = \\
 & w_{2o}(z_2, t) + \theta_{Y_2}(z_2, t) \left[X_2(s_2) + n_2 \frac{dY_2}{ds_2} \right] \\
 & + \theta_{X_2}(z_2, t) \left[Y_2(s_2) - n_2 \frac{dX_2}{ds_2} \right] \\
 & - \phi'_2(z_2, t) \left[F_{w_2}(s_2) + n_2 a_2(s_2) \right]
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $u_{1o}, v_{1o}, w_{1o}, u_{2o}, v_{2o}, w_{2o}$ 는 각각 X, Y, Z 축 방향의 병진변위변수이며, $\theta_{X_1}, \theta_{Y_1}, \phi_1, \theta_{X_2}, \theta_{Y_2}, \phi_2$ 는 X, Y, Z 축에 관한 회전변위변수를 나타낸다. 또한 $F_{w_1}(s_1), F_{w_2}(s_2)$ 와 $n_1 a_1(s_1), n_2 a_2(s_2)$ 는 비틀림에 의해 발생하는 축방향 변위인 1차 외평함수와 2차 외평함수를 나타낸다⁽⁷⁾.

그리고 각 튜브 표면에 부착된 (n_1, s_1, z_1) 및 (n_2, s_2, z_2) 좌표는 각각 반경방향, 원주방향, 축방향 국부좌표를 나타낸다.

$$\begin{aligned}
 F_{w_1}(s_1) & = \int_0^{s_1} \left[r_{n_1}(s_1) - 2 \frac{A_{c_1}}{\alpha_1} \right] ds_1, A_{c_1} \\
 & = \oint r_{n_1} ds_1, \alpha_1 = \oint ds_1 \\
 a_1(s_1) & = - Y_1 \frac{dY_1}{ds_1} - X_1 \frac{dX_1}{ds_1} \\
 F_{w_2}(s_2) & = \int_0^{s_2} \left[r_{n_2}(s_2) - 2 \frac{A_{c_2}}{\alpha_2} \right] ds_2, A_{c_2} \\
 & = \oint r_{n_2} ds_2, \alpha_2 = \oint ds_2 \\
 a_2(s_2) & = - Y_2 \frac{dY_2}{ds_2} - X_2 \frac{dX_2}{ds_2}
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{s_1 s_1} \\ \sigma_{z_1 z_1} \\ \sigma_{n_1 n_1} \\ \sigma_{n_1 z_1} \\ \sigma_{s_1 n_1} \\ \sigma_{s_1 z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{13}} & \overline{Q_{23}} & \overline{Q_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{s_1 s_1} \\ \epsilon_{z_1 z_1} \\ \epsilon_{n_1 n_1} \\ \gamma_{z_1 n_1} \\ \gamma_{s_1 n_1} \\ \gamma_{s_1 z_1} \end{bmatrix} \tag{3a}$$

2.2 구성 방정식

MWCNT의 (n_1, s_1, z_1) 및 (n_2, s_2, z_2) 좌표에 관한 응력-변형률 관계는 식 (3)과 같다.

식 (3)의 3D 응력-변형률 관계로부터 2D 응력-변형률 관계식을 유도하기 위하여 다음 식 (4)와 같이 3D 응력을 두께방향(n_1, n_2)에 대하여 적분하여 s_1 와 z_1, s_2 와 z_2 만의 함수인 함응력과 함모멘트를 구한다.

함응력(stress resultants) :

$$\begin{bmatrix} N_{s_1 s_1} \\ N_{z_1 z_1} \\ N_{s_1 z_1} \end{bmatrix} = \int_{h_1} \begin{bmatrix} \sigma_{s_1 s_1} \\ \sigma_{z_1 z_1} \\ \sigma_{s_1 z_1} \end{bmatrix} dn_1 \tag{4a}$$

$$\begin{bmatrix} N_{s_2 s_2} \\ N_{z_2 z_2} \\ N_{s_2 z_2} \end{bmatrix} = \int_{h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{s_2 s_2} \\ \sigma_{z_2 z_2} \\ \sigma_{s_2 z_2} \end{bmatrix} dn_2 \tag{4b}$$

전단함응력(shear stress resultants) :

$$\begin{bmatrix} N_{n_1 z_1} \\ N_{s_1 n_1} \end{bmatrix} = \int_{h_1} \begin{bmatrix} \sigma_{n_1 z_1} \\ \sigma_{s_1 n_1} \end{bmatrix} dn_1 \tag{4c}$$

$$\begin{bmatrix} N_{n_2 z_2} \\ N_{s_2 n_2} \end{bmatrix} = \int_{h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{n_2 z_2} \\ \sigma_{s_2 n_2} \end{bmatrix} dn_2 \tag{4d}$$

함모멘트(stress couples) :

$$\begin{bmatrix} L_{z_1 z_1} \\ L_{s_1 z_1} \end{bmatrix} = \int_h \begin{bmatrix} \sigma_{z_1 z_1} \\ \sigma_{s_1 z_1} \end{bmatrix} n_1 dn_1 \tag{4e}$$

$$\begin{bmatrix} L_{z_2 z_2} \\ L_{s_2 z_2} \end{bmatrix} = \int_{h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{z_2 z_2} \\ \sigma_{s_2 z_2} \end{bmatrix} n_2 dn_2 \tag{4f}$$

식 (3)을 식 (4)에 대입하여 적분하면 다음과 같은 함응력과 함모멘트에 관한 식을 얻을 수 있다⁽¹²⁾.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{s_2 s_2} \\ \sigma_{z_2 z_2} \\ \sigma_{n_2 n_2} \\ \sigma_{n_2 z_2} \\ \sigma_{s_2 n_2} \\ \sigma_{s_2 z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q_{13}} & \overline{Q_{23}} & \overline{Q_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{44}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{55}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{s_2 s_2} \\ \epsilon_{z_2 z_2} \\ \epsilon_{n_2 n_2} \\ \gamma_{z_2 n_2} \\ \gamma_{s_2 n_2} \\ \gamma_{s_2 z_2} \end{bmatrix} \tag{3b}$$

$$\begin{bmatrix} N_{z_1 z_1} \\ N_{s_1 z_1} \\ L_{z_1 z_1} \\ N_{n_1 z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{z_1 z_1}^{o_1} \\ \gamma_{s_1 z_1}^{o_1} \\ W_{M_1} \\ \epsilon_{z_1 z_1}^{n_1} \\ \gamma_{n_1 z_1} \end{bmatrix} \quad (5a)$$

$$\begin{bmatrix} N_{z_2 z_2} \\ N_{s_2 z_2} \\ L_{z_2 z_2} \\ N_{n_2 z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{z_2 z_2}^{o_2} \\ \gamma_{s_2 z_2}^{o_2} \\ W_{M_2} \\ \epsilon_{z_2 z_2}^{n_2} \\ \gamma_{n_2 z_2} \end{bmatrix} \quad (5b)$$

2.3 운동방정식과 경계조건

해밀턴의 변분원리를 이용하여 유체유동에 의한 MWCNT의 운동방정식과 경계조건을 유도하면 다음과 같다.

해밀턴의 변분원리 ;

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} (-\delta V + \delta K + \delta W_f + \delta W_{vdw}) dt = 0 \quad (6)$$

$t = t_0, t = t_1$ 에서

$$\delta u_{1o} = \delta v_{1o} = \delta w_{1o} = \delta \theta_{Y_1} = \delta \theta_{X_1} = \delta \phi_1 = 0$$

$$\delta u_{2o} = \delta v_{2o} = \delta w_{2o} = \delta \theta_{Y_2} = \delta \theta_{X_2} = \delta \phi_2 = 0$$

식(6)에서 MWCNT의 변형 에너지 V 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{1i1j} \epsilon_{1i1j} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{2i2j} \epsilon_{2i2j} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_C [N_{z_1 z_1} \epsilon_{z_1 z_1}^{o_1} + L_{z_1 z_1} \epsilon_{z_1 z_1}^{n_1} + N_{s_1 z_1} \gamma_{s_1 z_1}^{o_1} \\ &\quad + N_{s_1 z_1} 2 \frac{A_{C_1}}{\beta_1} \phi'_1 + N_{n_1 z_1} \gamma_{n_1 z_1}] ds_1 dz_1 \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L \int_C [N_{z_2 z_2} \epsilon_{z_2 z_2}^{o_2} + L_{z_2 z_2} \epsilon_{z_2 z_2}^{n_2} + N_{s_2 z_2} \gamma_{s_2 z_2}^{o_2} \\ &\quad + N_{s_2 z_2} 2 \frac{A_{C_2}}{\beta_2} \phi'_2 + N_{n_2 z_2} \gamma_{n_2 z_2}] ds_2 dz_2 \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)에 변분을 취하고, 식(1)의 변위 요소를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta V &= [T_A^{(1)} \delta w_{1o} + M_Y^{(1)} \delta \theta_{Y_1} + M_X^{(1)} \delta \theta_{X_1} - B_\omega^{(1)} \delta \phi'_1 \\ &\quad + (B_\omega^{(1)'} + M_p^{(1)}) \delta \phi_1 + Q_X^{(1)} \delta u_{1o} + Q_Y^{(1)} \delta v_{1o}]^L \\ &- \int_0^L [T_A^{(1)'} \delta w_{1o} + (M_Y^{(1)'} - Q_X^{(1)}) \delta \theta_{Y_1} \\ &\quad + (M_X^{(1)'} - Q_Y^{(1)}) \delta \theta_{X_1} \\ &\quad + (B_\omega^{(1)''} + M_p^{(1)'}) \delta \phi_1 \\ &\quad + Q_X^{(1)'} \delta u_{1o} + Q_Y^{(1)'} \delta v_{1o}] dz_1 \\ &+ [T_A^{(2)} \delta w_{2o} + M_Y^{(2)} \delta \theta_{Y_2} + M_X^{(2)} \delta \theta_{X_2} - B_\omega^{(2)} \delta \phi'_2 \\ &\quad + (B_\omega^{(2)'} + M_p^{(2)}) \delta \phi_2 + Q_X^{(2)} \delta u_{2o} + Q_Y^{(2)} \delta v_{2o}]^L \\ &- \int_0^L [T_A^{(2)'} \delta w_{2o} + (M_Y^{(2)'} - Q_X^{(2)}) \delta \theta_{Y_2} \\ &\quad + (M_X^{(2)'} - Q_Y^{(2)}) \delta \theta_{X_2} \\ &\quad + (B_\omega^{(2)''} + M_p^{(2)'}) \delta \phi_2 + Q_X^{(2)'} \delta u_{2o} \\ &\quad + Q_Y^{(2)'} \delta v_{2o}] dz_2 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $T_A^{(1)}(z_1), T_A^{(2)}(z_2), M_Y^{(1)}(z_1), M_Y^{(2)}(z_2), M_X^{(1)}(z_1), M_X^{(2)}(z_2), Q_X^{(1)}(z_1), Q_X^{(2)}(z_2), Q_Y^{(1)}(z_1), Q_Y^{(2)}(z_2), B_\omega^{(1)}(z_1), B_\omega^{(2)}(z_2), M_p^{(1)}(z_1), M_p^{(2)}(z_2)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} T_A^{(1)}(z_1) &= a_{11}^{(1)} w_{1o}' + a_{12}^{(1)} \theta_{Y_1}' + a_{13}^{(1)} \theta_{X_1}' + a_{16}^{(1)} \phi_1'' \\ T_A^{(2)}(z_2) &= a_{11}^{(2)} w_{2o}' + a_{12}^{(2)} \theta_{Y_2}' + a_{13}^{(2)} \theta_{X_2}' + a_{16}^{(2)} \phi_2'' \\ M_Y^{(1)}(z_1) &= a_{21}^{(1)} w_{1o}' + a_{22}^{(1)} \theta_{Y_1}' + a_{23}^{(1)} \theta_{X_1}' + a_{26}^{(1)} \phi_1'' \\ M_Y^{(2)}(z_2) &= a_{21}^{(2)} w_{2o}' + a_{22}^{(2)} \theta_{Y_2}' + a_{23}^{(2)} \theta_{X_2}' + a_{26}^{(2)} \phi_2'' \\ M_X^{(1)}(z_1) &= a_{31}^{(1)} w_{1o}' + a_{32}^{(1)} \theta_{Y_1}' + a_{33}^{(1)} \theta_{X_1}' + a_{36}^{(1)} \phi_1'' \\ M_X^{(2)}(z_2) &= a_{31}^{(2)} w_{2o}' + a_{32}^{(2)} \theta_{Y_2}' + a_{33}^{(2)} \theta_{X_2}' + a_{36}^{(2)} \phi_2'' \\ Q_X^{(1)}(z_1) &= a_{44}^{(1)} (\theta_{Y_1} + u_{1o}') + a_{45}^{(1)} (\theta_{X_1} + v_{1o}') + a_{47}^{(1)} \phi_1' \\ Q_X^{(2)}(z_2) &= a_{44}^{(2)} (\theta_{Y_2} + u_{2o}') + a_{45}^{(2)} (\theta_{X_2} + v_{2o}') + a_{47}^{(2)} \phi_2' \\ Q_Y^{(1)}(z_1) &= a_{54}^{(1)} (\theta_{Y_1} + u_{1o}') + a_{55}^{(1)} (\theta_{X_1} + v_{1o}') + a_{57}^{(1)} \phi_1' \\ Q_Y^{(2)}(z_2) &= a_{54}^{(2)} (\theta_{Y_2} + u_{2o}') + a_{55}^{(2)} (\theta_{X_2} + v_{2o}') + a_{57}^{(2)} \phi_2' \\ B_\omega^{(1)}(z_1) &= a_{61}^{(1)} w_{1o}' + a_{62}^{(1)} \theta_{Y_1}' + a_{63}^{(1)} \theta_{X_1}' + a_{66}^{(1)} \phi_1'' \\ B_\omega^{(2)}(z_2) &= a_{61}^{(2)} w_{2o}' + a_{62}^{(2)} \theta_{Y_2}' + a_{63}^{(2)} \theta_{X_2}' + a_{66}^{(2)} \phi_2'' \\ M_p^{(1)}(z_1) &= a_{74}^{(1)} (\theta_{Y_1} + u_{1o}') + a_{75}^{(1)} (\theta_{X_1} + v_{1o}') + a_{77}^{(1)} \phi_1' \\ M_p^{(2)}(z_2) &= a_{74}^{(2)} (\theta_{Y_2} + u_{2o}') + a_{75}^{(2)} (\theta_{X_2} + v_{2o}') + a_{77}^{(2)} \phi_2' \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, $a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}$ 는 MWCNT의 전단 및 굽힘강

성계수이다. 식 (6)에서 운동에너지 K 는 MWCNT의 운동에너지 K_p 와 유체유동의 운동에너지 K_f 의 합으로 표현된다.

MWCNT의 운동에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 K_p &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_1 \frac{\partial u_{1i}}{\partial t} \frac{\partial u_{1i}}{\partial t} d\tau + \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_2 \frac{\partial u_{2i}}{\partial t} \frac{\partial u_{2i}}{\partial t} d\tau \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_1 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 \right] d\tau \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_2 \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} \right)^2 \right] d\tau
 \end{aligned} \tag{10}$$

유체의 운동에너지는 다음과 같이 구할 수 있다. 파이프의 변형에 의한 2차 유동이 없다고 가정할 때, 유체의 운동은 파이프의 중심선을 따라 움직인다. 따라서 변형 후 파이프 중심선의 임의의 점에 대한 위치벡터를 \vec{R}_{pc} , 같은 점에서 유체의 위치벡터를 $\vec{R}_{f/pc}$ 라 할 때 그 관계식은 다음과 같다(Fig. 3).

$$\vec{R}_{f_1} = \vec{R}_{pc_1} + \vec{R}_{f_1/pc_1} \tag{11}$$

여기서, \vec{R}_{pc} 와 $\vec{R}_{f/pc}$ 는 다음과 같다.

$$\vec{R}_{pc_1} = u_1 \vec{I} + v_1 \vec{J} + (z_1 + w_1) \vec{K} \tag{12}$$

$$\vec{R}_{f_1/pc_1} = x_{b_1} \vec{i}_b + y_{b_1} \vec{j}_b \tag{13}$$

$\theta_{Y_1}, \theta_{X_1}, \phi_1 \ll 1$ 일 때, 식 (12),(13)의 $(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$ 와 $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ 사이의 좌표 변환식은 식 (14)와 같다.

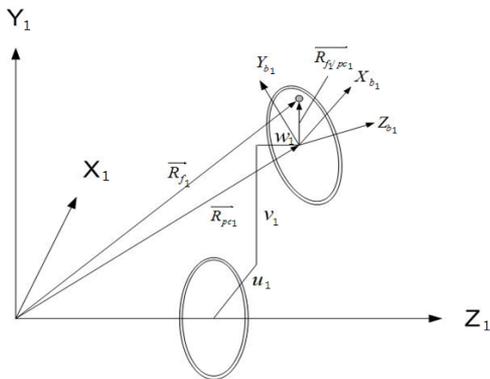


Fig. 3 Displacement of MWCNT conveying fluid

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_b \\ \vec{j}_b \\ \vec{k}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_1 & \theta_{Y_1} \\ -\phi_1 & 1 & \theta_{X_1} \\ -\theta_{Y_1} & -\theta_{X_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} \tag{14}$$

그러므로 유체의 운동에너지는 다음과 같으며

$$K_f = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_{f_1} \vec{R}_{f_1} \cdot \vec{R}_{f_1} d\tau \tag{15}$$

식 (15)의 변분을 시간에 대하여 적분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_1} \delta K_f dt &= \\
 &- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \rho_{f_1} [(\ddot{u}_{10} + 2U_1 \dot{u}_{10}' + U_1^2 u_{10}'') \delta u_{10} \\
 &+ (\ddot{v}_{10} + 2U_1 \dot{v}_{10}' + U_1^2 v_{10}'') \delta v_{10} \\
 &+ \ddot{w}_{10} \delta w_{10}] \pi (R_1 - \frac{h_1}{2})^2 dz_1 dt \\
 &+ \int_{t_0}^{t_1} \rho_{f_1} [(\dot{u}_{10} + U_1 u_{10}') U_1 \delta u_{10}]_0^L \\
 &+ [(\dot{v}_{10} + U_1 v_{10}') U_1 \delta v_{10}]_0^L \pi (R_1 - \frac{h_1}{2})^2 dt
 \end{aligned} \tag{16}$$

끝단($z_1 = L$)에서 유속에 U_1 의 한 가상일(δW_f)은 비보존계이므로 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \delta W_f &= - \int_0^{2\pi} \int_0^{(R_1 - \frac{h_1}{2})} \rho_{f_1} U_1 [(\dot{u}_{10} + U_1 u_{10}') \delta u_{10} \\
 &+ (\dot{v}_{10} + U_1 v_{10}') \delta v_{10} \\
 &+ w_{10} \delta w_{10}]_{z_1=L} r_1 dr_1 d\theta_1
 \end{aligned} \tag{17}$$

각 튜브사이의 작용하는 반데르발스(이하 vdw) 힘에 의한 일은 다음과 같이 표현 될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \delta W_{vdw_1} &= -c_1 (u_{2o} - u_{1o}), \\
 \delta W_{vdw_2} &= c_1 (u_{2o} - u_{1o})
 \end{aligned} \tag{18}$$

여기서, c_1 은 반데르발스 상호작용계수(interaction coefficient), Δ 는 탄소-탄소 본드의 길이이며 다음과 같다.

$$c_1 = \frac{320 \times (2R_1)}{0.16\Delta^2} \text{ erg/cm}^2, \quad \Delta = 0.142 \text{ nm}$$

MWCNT의 변형에너지식 (8), CNT의 운동에너지식 (10), 유체의 운동에너지식 (16), 외력에 의한 가상일식 (17), van der Waals force에 의한 일인식 (18)을 해밀턴의 원리에 대입하여 정리하면 다음과 같은 굽힘 운동에 관한 운동방정식과 경계조건을 유도할 수 있다.

운동방정식

$$\begin{aligned} \delta u_{1o} : & a_{44}^{(1)}(u_{1o}'' + \theta_{y_1}') = \\ & b_{1o}^{(1)} \ddot{u}_{1o} + m_{f_1} \ddot{u}_{1o} + 2m_{f_1} U_1 \dot{u}_{1o}' \\ & + m_{f_1} U^2 u_{1o}'' + c_1 (u_{2o} - u_{1o}) \\ \delta u_{2o} : & a_{44}^{(2)}(u_{2o}'' + \theta_{y_2}') = b_{2o}^{(2)} \ddot{u}_{2o} - c_1 (u_{2o} - u_{1o}) \\ \delta \theta_{y_1} : & a_{22}^{(1)} \theta_{y_1}'' - a_{44}^{(1)}(u_{1o}' + \theta_{y_1}') = (b_5^{(1)} + b_{15}^{(1)}) \ddot{\theta}_{y_1} \\ \delta \theta_{y_2} : & a_{22}^{(2)} \theta_{y_2}'' - a_{44}^{(2)}(u_{2o}' + \theta_{y_2}') = (b_5^{(2)} + b_{15}^{(2)}) \ddot{\theta}_{y_2} \end{aligned} \quad (19)$$

경계조건

$$\begin{aligned} \text{at } z_1 = z_2 = 0 \quad ; \quad & u_{1o} = u_{2o} = \theta_{Y_1} = \theta_{Y_2} = 0 \\ \text{at } z_1 = z_2 = L \quad ; \quad & a_{44}^{(1)}(u_{1o}' + \theta_{Y_1}') = 0 \\ & a_{44}^{(2)}(u_{2o}' + \theta_{Y_2}') = 0 \quad (20) \\ & a_{22}^{(1)} \theta_{Y_1}' = 0 \\ & a_{22}^{(2)} \theta_{Y_2}' = 0 \end{aligned}$$

여기서, $a_{44}^{(1)}, a_{44}^{(2)}, a_{22}^{(1)}, a_{22}^{(2)}$ 는 내부와 외부 튜브의 전단 및 굽힘강성계수이며, $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, (b_5^{(1)} + b_{15}^{(1)}), (b_5^{(2)} + b_{15}^{(2)})$ 는 내부와 외부 튜브의 단위길이 당 질량과 극관성 모멘트를 나타낸다.

3. 수치 해석

3.1 무차원화(Dimensionless)

다음과 같이 무차원화된 파라미터를 가정한다.

$$\begin{aligned} \xi_1 = \frac{z_1}{L}, \quad \bar{\eta}_1(\xi_1, T) &= \frac{u_{10}(z_1, t)}{L}, \\ \bar{\Theta}_{Y_1}(\xi_1, T) &= \theta_{y_1}(z_1, t), \\ \xi_2 = \frac{z_2}{L}, \quad \bar{\eta}_2(\xi_2, T) &= \frac{u_{20}(z_2, t)}{L}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{Y_2}(\xi_2, T) &= \theta_{y_2}(z_2, t), \\ \bar{u} &= \sqrt{\frac{m_f L^2}{a_{22}}} U, \quad T = \sqrt{\frac{a_{22}^{(1)}}{b_1^{(1)} + m_{f_1}}} \frac{t}{L^2}, \quad (21) \\ \beta &= \frac{m_{f_1}}{b_1^{(1)} + m_{f_1}}, \\ \sigma_1 &= \frac{a_{22}^{(1)}}{a_{44}^{(2)} L^2}, \quad \sigma_2 = \frac{a_{22}^{(2)}}{a_{44}^{(2)} L^2}, \\ \gamma_1 &= \left(\frac{b_5^{(1)} + b_{15}^{(1)}}{b_1^{(1)} + m_{f_1}} \right) \frac{1}{L^2}, \quad \gamma_2 = \left(\frac{b_5^{(2)} + b_{15}^{(2)}}{b_1^{(2)} + m_{f_2}} \right) \frac{1}{L^2} \\ \Phi_1 &= \frac{c_1 L^4}{a_{44}^{(1)}}, \quad \Phi_2 = \frac{c_1 L^4}{a_{44}^{(2)}} \end{aligned}$$

여기서, $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}$ 은 MWCNT의 단위길이 당 질량이며, m_{f_1} 은 유체의 단위길이 당 질량이다.

식 (21)을 운동방정식 (19) 및 경계조건식 (20)에 대입하면, 다음과 같은 무차원화된 식을 유도할 수 있다.

운동방정식

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{Y_1}' + \bar{\eta}_1'' &= \sigma_1 \bar{\eta}_1 + 2\sigma_1 \bar{u}_1 \beta^2 \dot{\bar{\eta}}_1' \\ &+ \sigma_1 \bar{u}_1^2 \bar{\eta}_1'' - \Phi_1 (\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1) \\ \bar{\Theta}_{Y_2}' + \bar{\eta}_2'' &= \sigma_2 \bar{\eta}_2 + 2\sigma_2 \bar{u}_2 \beta^2 \dot{\bar{\eta}}_2' \\ &+ \sigma_2 \bar{u}_2^2 \bar{\eta}_2'' + \Phi_1 (\bar{\eta}_2 - \bar{\eta}_1) \\ \sigma_1 \bar{\Theta}_{Y_1}'' - \bar{\Theta}_{Y_1} - \bar{\eta}_1' &= \sigma_1 \gamma_1 \ddot{\bar{\Theta}}_{Y_1} \\ \sigma_2 \bar{\Theta}_{Y_2}'' - \bar{\Theta}_{Y_2} - \bar{\eta}_2' &= \sigma_2 \gamma_2 \ddot{\bar{\Theta}}_{Y_2} \end{aligned} \quad (22)$$

경계조건

$$\begin{aligned} \text{at } \xi_1 = \xi_2 = 0 \quad ; \quad & \bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2 = \bar{\Theta}_{Y_1} = \bar{\Theta}_{Y_2} = 0 \\ \text{at } \xi_1 = 1 \quad ; \quad & \bar{\Theta}_{Y_1} + \bar{\eta}_1' = 0, \quad \sigma_1 \bar{\Theta}_{Y_1}' = 0 \\ \text{at } \xi_2 = 1 \quad ; \quad & \bar{\Theta}_{Y_2} + \bar{\eta}_2' = 0, \quad \sigma_2 \bar{\Theta}_{Y_2}' = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

여기서, $(\dot{\quad}) = \frac{\partial(\quad)}{\partial T}, (\quad)' = \frac{\partial(\quad)}{\partial \xi}$ 이다.

3.2 고유치 문제 및 모드 형상

Extended Galerkin's method를 사용하여 위의 고유치문제의 해를 구하기 위하여 식 (24)와 같이 해

를 가정한다.

$$\bar{\eta}_1(\xi_1, T) = \sum_{j=1}^N a_{1j}(T) \phi_{1j}^{(1)}(\xi_1) \quad (24a)$$

$$\bar{\theta}_{Y_1}(\xi_1, T) = \sum_{j=1}^N b_{1j}(T) \phi_{2j}^{(2)}(\xi_1) \quad (24b)$$

$$\bar{\eta}_2(\xi_2, T) = \sum_{j=1}^N a_{2j}(T) \phi_{2j}^{(1)}(\xi_2) \quad (24c)$$

$$\bar{\theta}_{Y_2}(\xi_2, T) = \sum_{j=1}^N b_{2j}(T) \phi_{2j}^{(2)}(\xi_2) \quad (24d)$$

여기에서 외팔보인 경우, 시험함수는 내부 유동유체가 없는 경우의 한단 고정, 타단 자유의 경계 조건을 만족 시키는 TB의 고유 함수를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \phi_{1j}^{(1)}(\xi_1) &= \frac{1}{\omega_{1j}^2} (-\phi_{1j}^{(2)}(\xi_1))'''' \\ \phi_{2j}^{(2)}(\xi_2) &= \frac{1}{\omega_{2j}^2} (-\phi_{2j}^{(2)}(\xi_2))'''' \\ \phi_{1j}^{(2)}(\xi_1) &= -[q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \text{Cos}(p_j)] \text{Cosh}(q_j \xi_1) \\ &\quad + [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sinh}(q_j \xi_1) \\ &\quad + [q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \text{Cos}(p_j)] \text{Cos}(p_j \xi_1) \\ &\quad + \frac{q_j^3}{p_j^3} [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sin}(p_j \xi_1) \\ \phi_{2j}^{(2)}(\xi_2) &= -[q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \text{Cos}(p_j)] \text{Cosh}(q_j \xi_2) \\ &\quad + [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sinh}(q_j \xi_2) \\ &\quad + [q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \text{Cos}(p_j)] \text{Cos}(p_j \xi_2) \\ &\quad + \frac{q_j^3}{p_j^3} [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sin}(p_j \xi_2) \end{aligned} \quad (25)$$

여기에서, $p_{1j}, p_{2j}, q_{1j}, q_{2j}$ 는 다음과 같으며, s_{1j}, s_{2j} 는 외팔보의 j 번째 고유치이다.

$$\begin{aligned} p_{1j}^2 &= \frac{1}{2} (\sigma_1 s_{1j}^2 + \sqrt{\sigma_1^2 s_{1j}^4 + 4s_{1j}^2}) \\ q_{1j}^2 &= \frac{1}{2} (-\sigma_1 s_{1j}^2 + \sqrt{\sigma_1^2 s_{1j}^4 + 4s_{1j}^2}) \\ p_{2j}^2 &= \frac{1}{2} (\sigma_2 s_{2j}^2 + \sqrt{\sigma_2^2 s_{2j}^4 + 4s_{2j}^2}) \end{aligned} \quad (26)$$

$$q_{2j}^2 = \frac{1}{2} (-\sigma_2 s_{2j}^2 + \sqrt{\sigma_2^2 s_{2j}^4 + 4s_{2j}^2})$$

위 식 (25)를 운동방정식 (22)와 경계조건식 (23)에 대입 하고 $j=1$ 부터 N 까지 extended Galerkin 적분을 행하고 행렬 형태의 식으로 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad (27)$$

여기서, $\{\ddot{q}\}, \{\dot{q}\}, \{q\}$ 및 $[M], [C], [K]$ 는 다음과 같다.

$$\{\ddot{q}\} = \begin{bmatrix} \ddot{a}_{1j} \\ \ddot{a}_{2j} \\ \ddot{b}_{1j} \\ \ddot{b}_{2j} \end{bmatrix}, \quad \{\dot{q}\} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{1j} \\ \dot{a}_{2j} \\ \dot{b}_{1j} \\ \dot{b}_{2j} \end{bmatrix}, \quad \{q\} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ b_{1j} \\ b_{2j} \end{bmatrix}$$

$$M_{1i1j}^{(11)} = \sigma_1 \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1$$

$$M_{2i2j}^{(11)} = \sigma_2 \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_2$$

$$M_{1i1j}^{(22)} = \gamma_1 \sigma_1 \int_0^1 \phi_{1j}^{(2)} \phi_{1i}^{(2)} d\xi_1$$

$$M_{2i2j}^{(22)} = \gamma_2 \sigma_2 \int_0^1 \phi_{2j}^{(2)} \phi_{2i}^{(2)} d\xi_2$$

$$C_{1i1j}^{(11)} = 2\beta_1^2 \sigma_1 \bar{u}_1 \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)'} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1$$

$$C_{2i2j}^{(11)} = 2\beta_2^2 \sigma_2 \bar{u}_2 \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)'} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_2$$

$$\begin{aligned} K_{1i1j}^{(11)} &= \sigma_1 \bar{u}_1^2 \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)''} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1 - \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)''} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1 \\ &\quad + [\phi_{1j}^{(1)'} \phi_{1i}^{(1)}]_0^1 - \Phi_1 \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{2i2j}^{(11)} &= \sigma_2 \bar{u}_2^2 \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)''} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_1 - \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)''} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_2 \\ &\quad + [\phi_{2j}^{(1)'} \phi_{2i}^{(1)}]_0^1 - \Phi_2 \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_2 \end{aligned}$$

$$K_{1i1j}^{(12)} = - \int_0^1 \phi_{1j}^{(2)'} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1 + [\phi_{1j}^{(2)} \phi_{1i}^{(1)}]_0^1 \quad (28)$$

$$K_{2i2j}^{(12)} = - \int_0^1 \phi_{2j}^{(2)'} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_2 + [\phi_{2j}^{(2)} \phi_{2i}^{(1)}]_0^1$$

$$K_{1i1j}^{(21)} = \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)'} \phi_{1i}^{(2)} d\xi_1$$

$$K_{2i2j}^{(21)} = \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)'} \phi_{2i}^{(2)} d\xi_2$$

$$\begin{aligned}
 K_{1i1j}^{(22)} &= -\sigma_1 \int_0^1 \phi_{1j}^{(2)'} \phi_{1i}^{(2)} d\xi_1 \\
 &\quad + \int_0^1 \phi_{1j}^{(2)} \phi_{1i}^{(2)} d\xi_1 + \sigma_1 [\phi_{1j}^{(2)'} \phi_{1i}^{(2)}]_0^1 \\
 K_{2i2j}^{(22)} &= -\sigma_2 \int_0^1 \phi_{2j}^{(2)'} \phi_{2i}^{(2)} d\xi_2 \\
 &\quad + \int_0^1 \phi_{2j}^{(2)} \phi_{2i}^{(2)} d\xi_2 + \sigma_2 [\phi_{2j}^{(2)'} \phi_{2i}^{(2)}]_0^1 \\
 K_{1i2j}^{(11)} &= \Phi_1 \int_0^1 \phi_{2j}^{(1)} \phi_{1i}^{(1)} d\xi_1 \\
 K_{2i1j}^{(11)} &= \Phi_2 \int_0^1 \phi_{1j}^{(1)} \phi_{2i}^{(1)} d\xi_2
 \end{aligned}$$

상기 식 (27)을 상태공간식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\{\dot{Z}\} = [A]\{Z\} \tag{29}$$

여기서,

$$\{Z\} = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}, [A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$$

식 (29)의 해는 $e^{\lambda t}$ 형태이며 $|[A] - \lambda[I]| = 0$ 을 만족시키는 고유치 $\bar{\lambda}_r$ 에 의해 그 거동이 결정된다. 고유치는 감쇠가 존재하는 경우 다음과 같은 복소수의 형태로 표현된다.

$$\bar{\lambda}_r = \bar{\alpha}_r \pm i\bar{\omega}_r \tag{30}$$

여기에서, $\bar{\alpha}_r$ 은 감쇠, $\bar{\omega}_r$ 은 고유진동수를 나타내며 각각의 고유진동수에 대한 계수벡터 값은 모드 형상을 나타낸다.

이 연구의 수치해석에 사용된 MWCNT 및 유체의 물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E &= 1 \text{ TPa}, G = 0.4 \text{ TPa}, \nu = 0.25 \\
 \rho_1 &= 2.3 \text{ g/cm}^3, \rho_2 = 2.3 \text{ g/cm}^3, \rho_{f_1} = 1 \text{ g/cm}^3
 \end{aligned}$$

3.3 안정성

CNT의 안정성은 식 (30)의 고유치 $\bar{\lambda}_r$ 의 실수부인 $\bar{\alpha}_r$ 의 부호에 의해 결정된다. 즉, $\bar{\alpha}_r < 0$ 이면 안정, $\bar{\alpha}_r > 0$ 이면 불안정이다. 특히, $\bar{\alpha}_r > 0$ 인 경우 중, $\bar{\omega}_r \neq 0$ 이면 플러터(flutter) 형태의 불안정,

$\bar{\omega}_r = 0$ 이면 발산(divergence) 형태의 불안정성을 나타내게 된다.

3.4 무차원 상대 유속

무차원화 된 유속의 상대비교를 위해, 상대 유속을 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{U}_{rel} = \overline{u}_1 \overline{R}_1 \frac{1}{L} \tag{31}$$

여기에서, $\overline{R}_1 = \sqrt{\frac{m_{f_1}^*}{a_{22}^{(1)*}}} / \sqrt{\frac{m_{f_1}}{a_{22}^{(1)}}}$, $\overline{L} = \frac{L}{L^*}$ 이며, (*)는 $h_1 = 20 \text{ nm}, L = 800 \text{ nm}, R_{1out} = 40 \text{ nm}$ 일 때의 수치이다.

4. 해석 결과 및 고찰

앞서 제시한 수렴성이 우수한 EGM(extended Galerkin method)의 수치해석을 통하여 결과를 얻었으며, 우선 유체유동이 없는 경우($m_f = 0$)에 Table 1과 같이 참고문헌 (4), (5)의 결과와 비교하여 정확성을 입증하였다. 현재까지 외팔보 MWCNT에 대한 결과는 없으며, 다만 S-S(simply supported) 경우만 연구결과가 나와 있어 결과입증은 S-S를 통해 하였으며, 고차모드로 갈수록 결과값(P=Present)이 더욱 정확하게 일치해져가는 것을 확인할 수 있었다.

또한 유체유동이 있는 경우($m_f \neq 0$)에 대하여 내부유동 유체의 유속변화에 따른 MWCNT 수치해의 정확성을 확인하고자 하였다. 그러나 현재까지 유체유동에 의한 MWCNT의 결과논문이 제시되지 않은 관계로 부득이하게 유체유동에 의한 SWCNT의

Table 1 Comparison of the present results with Refs. (1 & 2), ($R_i/R_o = 0.5$, no conveying fluid)

Mode no.	Natural frequencies					
	Timoshenko beam			Euler beam		
	Ref. (4)		P	Ref. (5)		P
	SW CNT	MW CNT	MW CNT	SW CNT	MW CNT	MW CNT
1	3.1278	3.0662	3.0877	3.1415	3.1410	3.1411
2	6.1735	6.0378	6.0746	6.2821	6.2650	6.2692
3	9.0418	8.5758	8.6244	9.4247	9.2756	9.2789
4	11.612	10.850	10.947	12.566	11.880	11.883
5	13.757	13.115	13.119	15.707	13.946	13.947

참고문헌 (1), (9)와의 결과비교를 Table 2에 나타냈으며, 결과에서 알 수 있듯이 단일벽보다 다중벽인 경우가 더 임계유속이 큰 결과 값을 가지므로 물리적으로 더 안정성 있는 구조물임을 보여주는 결과

Table 2 Comparison of the present results with Refs. (1 & 9), ($R_i/R_o=0.5$, conveying fluid)

\bar{L}	$\bar{U}_{rel,cr}$				
	SWCNT			MWCNT	
	Ref.(1)	Ref. (9)	Present	TB	EB
	EB	TB			
1	4.941 (2nd)	4.743 (2nd)	4.941 (2nd)	5.026 (2nd)	5.239 (2nd)
5	0.988 (2nd)	0.988 (2nd)	0.988 (2nd)	1.243 (2nd)	1.244 (2nd)

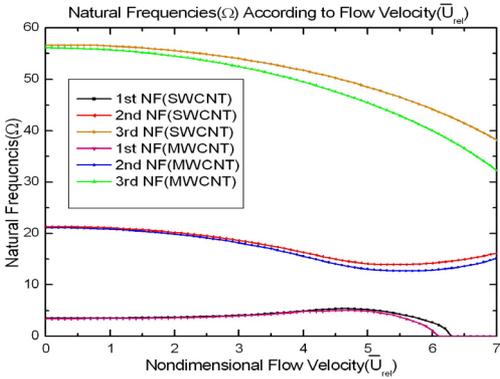


Fig. 4 Variation of natural frequencies with fluid velocity for cantilevered Timoshenko beam

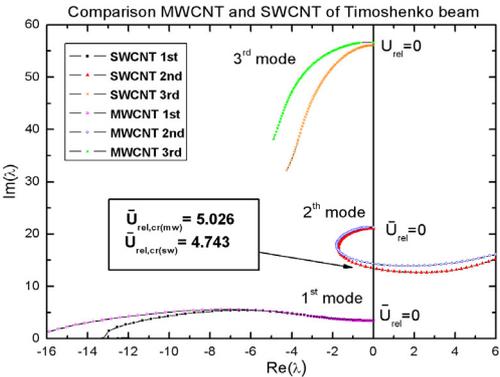


Fig. 5 Variation of real and imaginary parts of the non-dimensional eigenvalues with fluid velocity for both MWCNT and SWCNT (Timoshenko beam, $\bar{L}=1$, $R_i/R_o=0.5$)

로써 그 결과의 타당성 및 물리적 특성을 간접적으로 입증하였다.

Fig. 4는 유속 변화에 따른 MWCNT와 SWCNT의 TB와 EB의 처음 처자 3개 고유치의 변화를 나타낸 것으로 유속을 x축에, 고유치의 실수부와 허수부를 y축에 비교하였다. 그림에서 알 수 있듯이 MWCNT는 SWCNT에 비해 낮게 나타남을 확인할 수 있었다. 또한 TB와 EB를 비교한 경우에도 그림으로 나타내진 않았지만 Table 1,2에서 확인한 바와 같이 TB가 EB에 비해 낮게 나타남을 확인할 수 있었다. Figs. 5~8은 임계유속을 구하는 과정을 예시하기 위해 R_i/R_o 이 0.1과 0.7로 대표적인 두 가지 경우에 대하여, 유속의 변화에 따른 TB와 EB의

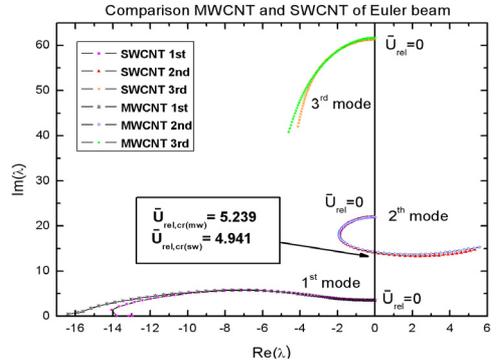


Fig. 6 Variation of real and imaginary parts of the non-dimensional eigenvalues with fluid velocity for both MWCNT and SWCNT (Euler beam, $\bar{L}=1$, $R_i/R_o=0.5$)

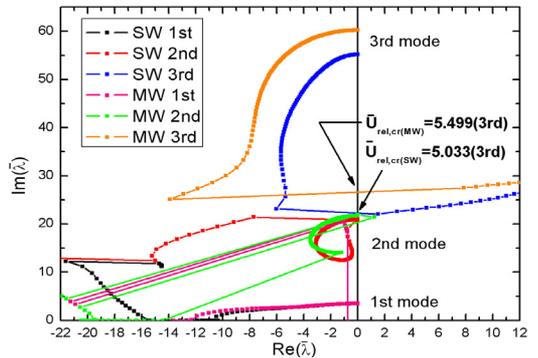


Fig. 7 Variation of real and imaginary parts of the non-dimensional eigenvalues with fluid velocity for both MWCNT and SWCNT (Timoshenko beam, $\bar{L}=1$, $R_i/R_o=0.7$)

처음 저차 3개의 고유치의 실수부와 허수부 값의 변화를 MWCNT와 기존의 SWCNT를 비교하였고, 또한 MWCNT의 TB와 EB를 비교하여 나타내었다. 실수부가 음수에서 양수로 변하는 점에서의 유속이 임계유속이 된다. 그림에서 확인할 수 있듯이 고유치의 실수부와 허수부 값의 변화가 MWCNT가 SWCNT에 비해 큰 값을 갖는 것을 확인할 수 있다. 즉 임계속도의 값이 커진다는 것을 의미함을 알 수 있다. 이러한 방법으로 $R_i/R_o = 0.1 \sim 0.9$ 까지의 범위를 0.2 간격으로 나누어 해석을 수행하여 구한 임계유속을 정리하여 결과 값들을 Table 3에 정리하여 나타내었다.

R_i/R_o 은 튜브의 벽두께의 비율로서 그 값에 따라서 튜브 강성, 질량, 유체와 튜브 간 질량비의 특성의 변화를 나타내는 중요한 변수이다.

Table 3에서 $R_i/R_o = 0.1$ 일 때 MWCNT의 경우도 SWCNT의 경우와 마찬가지로 TB와 EB의 차이가 가장 큰 것을 알 수 있으며 이는 튜브의 벽 두께가 클수록 전단변형효과가 커지기 때문임을 확인할 수 있었다. Fig. 8에서 R_i/R_o 값이 증가함에 따라 임계유속이 감소하다가 잠시 증가한 후에 다시 감소하는 S자형 변화이며, 이는 Ref. 8 및 Ref. 9와 동일한 형태로 나타나는 것을 알 수 있다. SWCNT의 경우와 마찬가지로 특정한 R_i/R_o 값에서는 TB이론이 EB이론의 결과 값보다 더 커지는 역전현상이 나타남을 확인하였으며 또한 역전(TB>EB)된 결과 값의 크기도 MWCNT가 SWCNT의 경우보다 더

커짐을 알 수 있다.

$R_i/R_o = 0.5$ 로 고정하고 $\bar{L} = 1, 3, 5, 10$ 인 4가지 경우에 대하여 MWCNT와 SWCNT의 TB 및 EB의 처음 저차 3개의 고유치 실수, 허수부의 변화를 이용하여 임계유속을 구한 결과를 정리하면 Table 4와 같다.

튜브의 길이가 길어질수록 임계유속이 감소하여 필터에 취약해지나 MWCNT의 경우 SWCNT에 비해 상대적으로 임계유속이 크므로 필터에 보다 더 안정함을 확인할 수 있다. 또한 MWCNT의 길이가 짧을수록 TB와 EB의 차이가 커지므로, EB이론이 임계유속을 TB이론 보다 크게 예측하여 부정확한 결과를 나타냄을 알 수 있다. CNT의 길이비(\bar{L})가

Table 3 Variation of relative critical velocities, $\overline{U}_{rel,cr}$ with R_i/R_o for both TB & EB of SWCNT and MWCNT ($\bar{L} = 1$)

$\frac{R_i}{R_o}$	$\overline{U}_{rel,cr}$					
	SWCNT			MWCNT		
	TB	EB	$\Delta(\%)$	TB	EB	$\Delta(\%)$
0.1	18.698 (2nd)	21.946 (2nd)	17.37	19.099 (2nd)	22.343 (2nd)	16.99
0.3	6.976 (2nd)	7.457 (2nd)	6.90	7.375 (2nd)	7.858 (2nd)	6.50
0.5	4.743 (2nd)	4.941 (2nd)	4.15	5.026 (2nd)	5.239 (2nd)	4.14
0.69	5.079 (2nd)	4.508 (2nd)	-11.24	5.678 (2nd)	4.910 (2nd)	-13.53
0.7	5.033 (3rd)	4.727 (2nd)	-6.08	5.499 (3rd)	5.056 (2nd)	-8.06
0.9	3.281 (3rd)	3.584 (3rd)	9.23	3.683 (3rd)	3.991 (3rd)	8.98

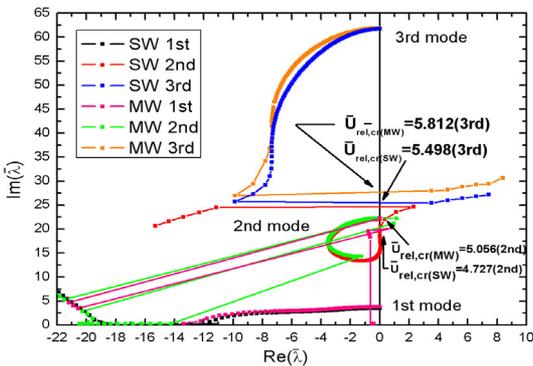


Fig. 8 Variation of real and imaginary parts of the non-dimensional eigenvalues with fluid velocity for both MWCNT and SWCNT (Euler beam, $\bar{L} = 1, R_i/R_o = 0.7$)

Table 4 Variation of relative critical velocity, $\overline{U}_{rel,cr}$ with \bar{L} for both TB & EB of SWCNT and MWCNT ($R_i/R_o = 0.5$)

\bar{L}	$\overline{U}_{rel,cr}$					
	SWCNT			MWCNT		
	TB	EB	$\Delta(\%)$	TB	EB	$\Delta(\%)$
1	4.743 (2nd)	4.941 (2nd)	4.17	5.026 (2nd)	5.239 (2nd)	4.24
3	1.641 (2nd)	1.647 (2nd)	0.37	1.923 (2nd)	1.934 (2nd)	0.57
5	0.988 (2nd)	0.988 (2nd)	0	1.291 (2nd)	1.293 (2nd)	0.15
7	0.897 (2nd)	0.897 (2nd)	0	1.198 (2nd)	1.198 (2nd)	0
10	0.494 (2nd)	0.494 (2nd)	0	0.529 (2nd)	0.529 (2nd)	0

짧을수록 TB이론을 적용하여야 정확한 해석 결과를 도출할 수 있다. 반면에 길이비(\bar{L})가 SWCNT와 MWCNT가 각각 어느 기준 값에 도달할 경우 TB와 EB의 결과 값이 동일하므로 그 값을 기준으로 EB이론 적용이 가능하다. 즉, Table 4를 통해서 알 수 있듯이 SWCNT의 경우 길이비(\bar{L})가 5인 경우 TB와 EB의 오차(%)가 0이므로 오일러 보 이론이 적용가능하며, MWCNT의 경우 길이비(\bar{L})가 7인 경우 TB와 EB의 오차가(%) 0이므로 오일러 보 이론이 적용 가능하므로 EB이론을 통해서도 정확한 해석 결과를 도출할 수 있다.

5. 결 론

이 연구에서는 외팔보(cantilever beam) 다중벽 탄소나노튜브(MWCNT)의 유체유발 진동 모델을 유도하고, 유동속도를 증가시켜가면서 MWCNT의 mode별 고유진동수와 MWCNT에 플러터가 발생하는 임계유속을 계산하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) MWCNT의 고유진동수는 SWCNT에 비해 낮은 값을 가지며 고차모드로 갈수록 그리고 임계유속이 커질수록 그 차이는 더욱 커짐을 확인 할 수 있다.

(2) 임계유속에 따른 고유치의 실수부와 허수부 값의 변화가 MWCNT가 SWCNT에 비해 큰 값을 갖으며 고차모드로 갈수록 그 차이는 더욱 커지는 것을 확인할 수 있다. 즉 임계속도의 값이 커진다는 것을 알 수 있다. 또한 임계유속이 클수록 EB이론이 TB이론 보다 임계유속을 크게 예측한다는 것을 알 수 있다.

(3) 내외경비(R_i/R_o)의 증가에 따른 EB이론과 TB이론에 기초한 임계 유속 사이의 차이는 감소에 서증가로 그리고 다시 감소되는 S자형 변화로의 SWCNT와 동일하게 나타나며, 이때 역전현상의 임계유속은 MWCNT가 SWCNT의 차이(TB>EB) 보다 더 크게 나타남을 알 수 있다.

(4) 길이 비(\bar{L})의 증가에 따라서 임계 유속이 점차 작아지는 경향을 보이며 이는 구조물이 점점 불안정성에 취약해짐을 뜻한다. MWCNT의 경우는 SWCNT보다 임계유속이 상대적 크고 또한 고차모드로 갈수록 그 차이는 더욱 커지므로, MWCNT가

SWCNT보다 더 안정성이 있는 구조임을 보여주고 있다.

참 고 문 헌

(1) Yoon, J., Ru, C. Q. and Mioduchowski, A., 2006, "Flow-induced Flutter Instability of Cantilever Carbon Nanotubes," International Journal of Solids and Structures 43, pp. 3337~3349.

(2) Yoon, J., Ru, C. Q. and Mioduchowski, A., 2005, "Vibration and Instability of Carbon Nanotubes Conveying Fluid," Composites Science and Technology 65, pp. 1326~1336.

(3) Yoon, J., Ru, C. Q. and Mioduchowski, A., 2003, "Vibration of an Embedded Multiwall Carbon Nanotube," Composites Science and Technology 63, pp. 1533~1542.

(4) Wang, C. M., Tan, V. B. C. and Zhang, Y. Y., 2006 "Timoshenko Beam Model for Vibration Analysis of Multi-walled Carbon Nanotubes," Journal of Sound and Vibration, Vol. 294, pp. 1060~1072.

(5) Metin Aydogdu, 2008, "Vibration of Multi-walled Carbon Nanotubes by Generalized Shear Deformation Theory," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 50, pp. 837~844.

(6) Wang, C. Y., Ru, C. Q. and Mioduchowski, A., 2005 "Free Vibration of Multiwall Carbon Nanotubes," Journal of Applied Physics 97 114323, pp. 1~11.

(7) Librescu, L. and Song, O. S., 2006, Thin-walled Composite Beams: Theory and Application, Springer.

(8) Choi, J. W. and Song, O. S., 2001, "Stability Analysis of Composite Material Pipes Conveying Fluid," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 11, No. 8, pp. 314~321.

(9) Choi, J. W., Gil, B. R. and Song, O. S., 2008, "Flow-induced Vibration of Carbon Nanotubes Conveying Fluid," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 18, No. 6, pp. 654~662.