

■ 論 文 ■

다수단 확률적 사용자 균형의 민감도 분석

Sensitivity Analysis of Stochastic User Equilibrium in a Multi-Modal Network

김 병 관

(한국건설기술연구원 첨단교통연구실 수석연구원)

임 용 택

(전남대학교 교통물류학부 교수)

목 차

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> I. 서론 II. 다수단 확률적 사용자 균형 <ul style="list-style-type: none"> 1. 다수단 교통망의 표현 2. 다수단 확률적 사용자 균형 문제 III. 다수단 확률적 사용자 균형의 민감도 분석 <ul style="list-style-type: none"> 1. 링크변수에 대한 민감도 | <ul style="list-style-type: none"> 2. 수단분담율에 대한 민감도 IV. 민감도 분석의 적용 및 평가 <ul style="list-style-type: none"> 1. 도로용량 및 노선빈도에 대한 민감도 분석 2. 수단분담율에 대한 민감도 분석 V. 결론 참고문헌 |
|---|--|

Key Words: 민감도 분석, 다수단 교통망, 확률적 사용자 균형, 수단선택, 교통망 설계 문제
 Sensitivity Analysis, Multi-Modal Network, Stochastic User Equilibrium, Mode Choice, Network Design Problem

요 약

본 연구는 기존의 단일수단이 아닌 다수단 확률적 사용자 균형상태의 민감도 분석 방법을 설명한다. 다수단 교통망에서의 민감도 분석에 대한 연구의 첫 단계로 우선은 물리적으로 분리되어진 승용차 교통망과 대중교통 (버스, 지하철) 교통망으로 구성된 다수단 교통망을 고려하고자 한다. 연구는 우선 승용차와 대중교통 교통망의 임의의 링크 변수에 대한 민감도 분석 방법을 정립하고 실질적인 링크 변수의 적용으로 링크용량과 대중교통 노선빈도에 대한 민감도 분석을 수행해본다. 다음으로 승용차 수단분담율과 대중교통 수단분담율에 대한 민감도 분석 방법을 정립한다. 본 연구의 결과는 경제학의 탄력성과 같이 교통시설의 운영 및 정책변화에 따른 통행자의 행태 변화와 운영 및 정책 효과를 분석해 볼 수 있는 중요한 정보가 될 수 있을 것이다. 또한 협력적 게임의 다수단 교통망 설계 문제를 구성하기 위한 중요한 도구로 활용될 수 있을 것이다.

This study presents a sensitivity analysis method for stochastic user equilibrium of multi-modal network flows. We consider a multi-modal network consisting of a road network for passenger cars physically separated from a transit network for public transport. We first establish a sensitivity analysis method with respect to arbitrary link parameters and perform a sensitivity analysis with respect to link capacity and transit line frequency as practical link parameters. Next, We establish a sensitivity analysis method and perform the sensitivity analysis with respect to modal split by passenger car and public transit. As with the elasticity of economics, these results can be important information for analyzing changes in travel behavior due to the changes in operation and policy of transportation facilities, as well as for analyzing the effects of these operational changes and policies. These results also can be utilized as a tool to constitute a multi-modal network design problem by using cooperative game theory.

1. 서론

교통망 균형에서의 민감도 분석에 관한 연구는 최근 교통망 설계 문제(Network Design Problem)에 대한 연구와 함께 많은 관심을 받아오고 있다. 특히, 교통망 설계 모형 중 더 우수한 최적해를 구할 수 있다고 연구되어진 협력적 게임의 접근법을 이용한 해법(Yang & Bell, 1997; Jing & Lam, 2000; Maher, 2001; 임용택, 2004; 김병관, 2004)은 교통망 설계 변수의 변화에 대한 균형상태의 통행변수의 변화를 알아야 하기에 이러한 민감도 분석 방법이 반드시 필요하게 된다.

민감도 분석이 교통망 연구에서 중요하게 여겨지는 이유는 다음과 같다. 첫째는 민감도 분석이 교통망 설계 문제와 같은 교통체계의 다양한 최적화 문제를 해결하기 위한 중요한 도구로 사용될 수 있다는 것이다.

둘째는 민감도 분석의 결과가 경제학의 탄력성과 같은 개념으로 교통망 운영 및 정책의 변화에 따른 통행행태의 변화를 추정하고 운영 및 정책의 효과를 분석해 볼 수 있는 중요한 정보로 활용될 수 있다는 것이다.

이러한 민감도 분석에 관한 연구는 결정적 사용자 균형(deterministic user equilibrium)상태에서 민감도 분석을 수행한 Tobin & Friesz (1988)의 연구가 가장 잘 알려져 있다. 또한 Qiu & Magnanti (1989)는 사용자 균형의 변동부등문제(variational inequality problem)에서 민감도 분석 방법을 연구하였다. 그 밖에 Yang (1997)은 가변 수요 사용자 균형(elastic demand user equilibrium)의 민감도 분석을 수행하여 교통망 설계 문제로 혼잡통행료 산정 연구를 수행하였고 Davis (1994), Ying & Miyagi (2001), 임용택 (2004)은 확률적 사용자 균형(stochastic user equilibrium)의 민감도 분석 방법을 연구하였다.

지금까지의 이러한 민감도 분석에 대한 연구는 단일 수단(uni-modal) 교통망에 한정하여 연구가 이루어져 왔다고 볼 수 있다. 하지만 실제 교통망에서는 도로의 승용차와 대중교통의 버스, 지하철 등의 각 수단은 운영특성에 따라 통행자의 통행에 영향을 미치고 있으며 이러한 수단 간의 상호작용에 의해서 통행자들은 자신에 맞는 수단을 선택하게 된다. 이에 본 연구는 승용차와 대중교통(버스, 지하철)으로 구성된 다수단 교통망을 대상으로 다수단 확률적 균형(multi-modal stochastic user equilibrium)상태에 대한 민감도 분석 방법을 연구하고자 한다.

다수단 교통망에 대한 민감도 분석 연구의 첫 단계로 우선은 동일 링크를 통행하는 수단간 상호영향을 고려할 수 없는 통행비용함수의 분리(separable) 형태를 가정한다. 즉, 승용차 교통망과 대중교통 교통망이 물리적으로 분리되어 지하철의 경우 별도의 주행노선을 갖고 버스의 경우도 버스전용차로를 이용한다고 가정하여 연구를 수행하고자 한다.

대신 기종점간 수단별 통행비용에 의한 수단선택의 영향과 그에 따른 각 수단의 통행변수의 영향에 초점을 맞추어 연구를 수행하고자 한다.

기존의 단일수단 교통망의 민감도 분석이 단일수단의 교통망 변화에 따른 그 수단의 통행배정의 변화만을 연구대상으로 했다면 본 연구의 다수단 교통망의 민감도 분석은 특정 수단의 교통망 변화에 따른 수단선택의 변화와 그에 따른 각 수단의 통행배정의 변화를 함께 연구 대상으로 한다는 것이다.

기존연구: 교통망 변화 → 통행비용 변화 →
(단일수단) 경로선택 변화 → 링크 통행량 변화

본 연구: 교통망 변화 → 통행비용 변화 →
(다수단) 수단선택 변화 → 수단별 경로선택 변화 →
수단별 통행수요, 링크 통행량 변화

이러한 민감도는 다수단 교통시설의 운영 및 정책의 변화에 따라 각 교통수단별 통행행태가 어떻게 변화하는가를 살펴볼 수 있는 매우 중요한 정보로 활용될 수 있을 것이다.

이후의 연구의 구성을 설명하면 다음과 같다. 2장에서는 본 연구의 다수단 확률적 사용자 균형의 민감도 분석을 위한 다수단 교통망 구성과 지금까지 연구된 확률적 사용자 균형 문제를 살펴본다. 3장에서 다수단 확률적 사용자 균형 상태의 민감도 분석 방법을 정립한다. 여기서는 첫째, 승용차와 대중교통 교통망의 임의의 링크 변수에 대한 민감도 분석 방법을 정립하고 실질적인 링크 변수로 승용차 링크용량과 대중교통 노선빈도에 대한 민감도 분석을 적용해본다. 둘째, 승용차 수단분담율과 대중교통 수단분담율에 대한 민감도 분석 방법을 정립한다. 4장에서는 소규모 모의 교통망을 대상으로 본 연구의 민감도 분석 방법을 적용하여 좀 더 자세한 설명과 평가를 수행해 보도록 한다. 마지막으로 5장에서는 연구의 결과와 향후연구 과제를 논의한다.

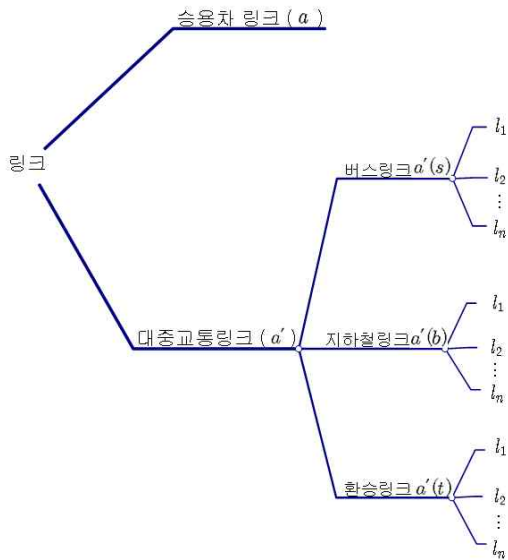
II. 다수단 확률적 사용자 균형

1. 다수단 교통망의 표현

본 연구의 다수단 교통망은 크게 승용차와 대중교통 교통망으로 구성되며 각 수단의 교통망은 승용차와 대중교통 링크로 구성된다. 그 중 대중교통 링크는 다시 버스와 지하철의 노선링크와 환승링크로 구분되어진다.

버스와 지하철은 대중교통 수단이라는 하나의 대중교통 교통망으로 표현된다. 이러한 이유는 현재 환승이 자유로운 대중교통망을 통행자가 통행함에 있어서 버스와 지하철의 개별 수단만을 선택하는 것이 아니라 경로선택의 행위로 다양한 대중교통 노선을 선택하여 통행을 하기 때문이다. 따라서 버스와 지하철의 수단을 구분 짓는 것은 의미가 없다고 생각되며 본 연구와 같이 대중교통이라는 하나의 통합된 교통망으로 보는 것이 더 바람직하다고 생각된다. 따라서 <그림 1>과 같이 승용차 링크는 (a)로 표현되고 대중교통 링크는 (a')로 표현된다. 또한 대중교통 링크(a')는 버스 노선링크(b), 지하철 노선링크(s), 환승링크(t)에 대해서 속성값으로 {b, s, t}의 값을 갖고 각 노선링크와 환승링크를 통행하는 노선(l_n)의 속성값을 갖게 된다.

본 연구의 승용차와 대중교통 교통망과 관련된 표현을 정리하면 다음과 같다.



<그림 1> 다수단 교통망의 링크 구성

1) 승용차 교통망의 표현

- $N = \{i, j, \dots\}$: 노드 집합
- $A = \{a, \dots\}$: 링크 집합
- $W = \{w, \dots\}$: 기종점 쌍 집합
- S_w : 승용차의 기종점 w 간 최소기대통행비용
- q_w : 승용차의 기종점 w 간 통행수요
- $q = (q_w)_{w \in W}$: 승용차 통행수요 벡터
- $k_w = \{k, p, \dots\}$: 기종점 w 간 승용차 경로 집합
- h_k^w : 기종점 w 간 경로 k 의 통행량
- P_k^w : 기종점 w 의 통행자가 경로 k 를 통행할 확률
- P_a^w : 기종점 w 의 통행자가 링크 a 를 통행할 확률
- $P_{a,b}^w$: 기종점 w 의 통행자가 링크 a 와 링크 b 를 같이 통행할 확률
- x_a : 링크 a 의 통행량
- $x = (x_a)_{a \in A}$: 링크 통행량 벡터
- t_a : 링크 a 의 통행비용
- $t = (t_a)_{a \in A}$: 링크 통행비용 벡터
- $\epsilon = (\epsilon_a)_{a \in A}$: 링크 a 의 임의의 변수 벡터
- $C = (C_a)_{a \in A}$: 링크 a 의 도로용량 벡터
- $c_k^w = \sum_a t_a \delta_{a,k}^w$: 경로 k 의 통행비용
- $\delta_{a,k}^w = \begin{cases} 1 & \text{만약 링크 } a \text{ 가 경로 } k \text{ 상에 있으면} \\ 0 & \text{그렇지 않으면} \end{cases}$
- θ : 인지통행비용의 분산계수

본 연구에서는 민감도 분석에 대한 설명을 위하여 링크 통행비용함수(t_a)를 링크 통행량(x_a)과 임의의 링크 변수(ϵ_a)의 함수로 표현한다. 따라서 링크 통행비용함수 $t_a(x_a, \hat{\epsilon}_a)$ 는 링크 통행량(x_a)과 링크 변수(ϵ_a)에 대한 함수이며 링크 통행량이 증가함에 따라 단조증가 한다고 가정한다. 그 역함수 $x_a(t_a, \epsilon_a)$ 또한 링크 통행비용이 증가함에 따라 단조증가하게 된다. 링크 통행비용(t_a)과 경로 통행비용(c_k^w)은 일반화 통행비용을 의미하고 통행량이 증가함에 따라 단조증가 함으로 혼잡이 발생한다고 가정한다.

일반적으로 문헌상에서 θ 는 통행자가 얼마나 정확하게 최단경로를 인지하는가의 정도를 나타내는 분산계수로 이해되고 있다. θ 가 커질수록 통행자의 인지오차가 작아져 최단경로를 선택할 확률이 높아진다. 결국 $\theta \rightarrow \infty$ 이면 결정적 사용자균형 상태와 같아지게 된다(Sheffi, 1985).

2) 대중교통 교통망의 표현

- $\hat{N} = \{i', j', \dots\}$: 노드 집합
- $\hat{A} = \{a', \dots\}$: 링크 집합
- $L = \{l_1, \dots\}$: 대중교통 노선 집합
- \hat{S}_w : 대중교통의 기종점 w 간 최소기대통행비용
- \hat{q}_w : 대중교통의 기종점 w 간 통행수요
- $\hat{q} = (\hat{q}_w)_{w \in W}$: 대중교통 통행수요 벡터
- $\hat{k}_w = \{k', p', \dots\}$: 기종점 w 간 대중교통 경로 집합
- \hat{h}_k^w : 기종점 w 의 경로 k' 의 통행량
- \hat{P}_k^w : 기종점 w 의 통행자가 경로 k' 를 통행할 확률
- $\hat{P}_{a'}^w$: 기종점 w 의 통행자가 링크 a' 를 통행할 확률
- $\hat{P}_{a,b}^w$: 기종점 w 의 통행자가 링크 a 와 링크 b 를 같이 통행할 확률
- $\hat{x}_{a'}$: 링크 a' 의 통행량
- $\hat{x} = (\hat{x}_{a'})_{a' \in \hat{A}}$: 링크 통행량 벡터
- $\hat{t}_{a'}$: 링크 a' 의 통행비용
- $\hat{t} = (\hat{t}_{a'})_{a' \in \hat{A}}$: 링크 통행비용 벡터
- $\hat{\epsilon} = (\hat{\epsilon}_{a'})_{a' \in \hat{A}}$: 링크 a' 의 임의의 변수 벡터
- $f = (f_l)_{l \in L}$: 대중교통 노선 l 의 노선빈도 벡터
- $\hat{c}_k^w = \sum_{a'} \hat{c}_{a',k}^w$: 경로 k' 의 통행비용
- $\delta_{a',k}^w = \begin{cases} 1 & \text{만약 링크 } a' \text{ 가 경로 } k' \text{ 상에 있으면} \\ 0 & \text{그렇지 않으면} \end{cases}$
- θ : 인지통행시간의 분산계수

승용차 교통망과 마찬가지로 대중교통 링크의 통행비용함수($\hat{t}_{a'}$)는 링크 통행량($\hat{x}_{a'}$)과 임의의 변수($\hat{\epsilon}_{a'}$)의 함수로 표현한다. 따라서 링크통행비용함수 $\hat{t}_{a'}(\hat{x}_{a'}, \hat{\epsilon}_{a'})$ 는 링크 통행량($\hat{x}_{a'}$)과 링크 변수($\hat{\epsilon}_{a'}$)에 대한 함수이며 통행량이 증가함에 따라 단조증가 한다고 가정한다. 또한 그 역함수 $\hat{x}_{a'}(\hat{t}_{a'}, \hat{\epsilon}_{a'})$ 또한 링크 통행비용이 증가함에 따라 단조증가 한다고 가정한다. 또한 링크 통행비용($\hat{t}_{a'}$)과 경로 통행비용(\hat{c}_k^w)은 일반화 통행비용을 의미하고 통행량에 대해서 단조증가 함에 따라 혼잡이 발생한다고 가정한다.

2. 다수단 확률적 사용자 균형 문제

본 연구의 다수단 확률적 사용자 균형은 기본적으로 경로비용에 대한 다항로짓의 경로선택 확률로 공식화 된다(Sheffi, 1985). 또한 승용차와 대중교통의 통행수요(q_w, \hat{q}_w)를 로짓모형의 수단분담모형으로 연결하고 Daganzo (1982)의 단일수단 확률적 사용자균형 문제를 확장하여 식 (1)~(6)과 같은 다수단 확률적 사용자 균형 문제를 정의하게 된다.

다수단 확률적 사용자 균형 문제

$$\min_t Z(t, \hat{t}) = \sum_a \int_{t_a(0)}^{t_a} x_a(v)dv - \sum_w q_w S_w(c^w(t)) \quad (1)$$

$$\min_{\hat{t}} \hat{Z}(\hat{t}, t) = \sum_a \int_{\hat{t}_a(0)}^{\hat{t}_a} \hat{x}_a(\hat{v})d\hat{v} - \sum_w \hat{q}_w \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})) \quad (2)$$

s.t.

$$q_w + \hat{q}_w = \bar{q}_w \quad (3)$$

$$\sum_k h_k^w = q_w, \quad \sum_{k'} \hat{h}_{k'}^w = \hat{q}_w \quad (4)$$

$$\sum_w \sum_k h_k^w \delta_{a,k} = x_a, \quad \sum_w \sum_{k'} \hat{h}_{k'}^w \delta_{a',k'} = \hat{x}_{a'} \quad (5)$$

$$h_k^w \geq 0, \quad \hat{h}_{k'}^w \geq 0 \quad (6)$$

여기서,

$$q_w = D_w(S_w, \hat{S}_w) = \bar{q}_w \frac{1}{1 + \exp(-\theta(\hat{S}_w - S_w))} \quad (7)$$

$$\hat{q}_w = \hat{D}_w(\hat{S}_w, S_w) = \bar{q}_w \frac{1}{1 + \exp(-\theta(S_w - \hat{S}_w))} \quad (8)$$

위의 S_w 와 \hat{S}_w 는 기종점 w 를 통행하는 승용차와 대중교통 통행자의 최소기대통행비용(expected minimum travel cost) 또는 기대비효용(expected disutility)을 의미한다. 반면, $-S_w$ 와 $-\hat{S}_w$ 는 승용차와 대중교통 통행의 기대 효용(expected utility)을 의미하고 이론적으로 교통망의 효용을 나타내는 정량적인 척도로 이해될 수 있다(Williams, 1977).

$$S_w(c^w(t)) = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_k \exp(-\theta c_k^w), \quad w \in W$$

$$\hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})) = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{k'} \exp(-\theta \hat{c}_{k'}^w), \quad w \in W$$

위의 최소기대통행비용은 Sheffi가 제시한 아래의 기대인지통행비용(expected perceived travel cost)함수와 동일한 것이다.

$$S_w(c^w) = E \left[\min_{\forall k} \{C_k^w\} \right], \quad C_k^w = c_k^w + \frac{1}{\theta} \ln(h_k^w)$$

여기서, C_k^w 는 기종점 w 의 경로 k 의 인지통행비용(perceived travel cost)으로 실질적인 경로비용(c_k^w)에 확률적 비용이 추가되어진 비용이 된다. 균형 상태에서는 사용된 경로의 인지통행비용(C_k^w)이 동일한 상태가 됨으로 인지통행비용을 동등경로통행비용(equivalent path cost)이라고도 부른다.

다항로짓모형을 이용하여 기종점 w 간 승용차 통행자와 대중교통 통행자가 경로 k 와 k' 를 선택할 확률($P_k^w, \hat{P}_{k'}^w$)과 수단별 경로통행량($h_k^w, \hat{h}_{k'}^w$)을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$P_k^w = \frac{\exp(-\theta c_k^w)}{\sum_p \exp(-\theta c_p^w)}, \quad k \in k_w$$

$$\hat{P}_{k'}^w = \frac{\exp(-\theta \hat{c}_{k'}^w)}{\sum_p \exp(-\theta \hat{c}_p^w)}, \quad k' \in \hat{k}_w$$

$$h_k^w = q_w \frac{\exp(-\theta c_k^w)}{\sum_p \exp(-\theta c_p^w)}, \quad k \in k_w$$

$$\hat{h}_{k'}^w = \hat{q}_w \frac{\exp(-\theta \hat{c}_{k'}^w)}{\sum_p \exp(-\theta \hat{c}_p^w)}, \quad k' \in \hat{k}_w$$

또한 승용차 링크와 대중교통 링크의 통행량은 다음과 같이 경로 통행량과 링크 선택확률을 이용하여 계산할 수 있다.

$$x_a = \sum_w \sum_k h_k^w \delta_{a,k}^w$$

$$= \sum_w q_w \frac{\exp(-\theta c_k^w) \delta_{a,k}^w}{\sum_p \exp(-\theta c_p^w)}, \quad a \in A$$

$$\hat{x}_{a'} = \sum_w \sum_{k'} \hat{h}_{k'}^w \delta_{a',k'}^w$$

$$= \sum_w \hat{q}_w \frac{\exp(-\theta \hat{c}_{k'}^w) \delta_{a',k'}^w}{\sum_p \exp(-\theta \hat{c}_p^w)}, \quad a' \in \hat{A}$$

Ying & Yang (2005)은 이러한 형태의 확률적 사용자 균형 문제가 유일해를 가짐을 다음과 같이 증명하였다.

$$\nabla Z_t = \frac{\partial Z}{\partial t_a} = F_a(t, \hat{t})$$

$$= x(t) - \sum_w q_w (\nabla_t S_w(c^w(t)))^T = 0$$

$$\nabla \hat{Z}_{\hat{t}} = \frac{\partial \hat{Z}}{\partial \hat{t}_{a'}} = \hat{F}_{a'}(\hat{t}, t)$$

$$= \hat{x}(\hat{t}) - \sum_w \hat{q}_w (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})))^T = 0$$

$\nabla_t F, \nabla_{\hat{t}} F, \nabla_t \hat{F}, \nabla_{\hat{t}} \hat{F}$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\nabla_t F = \text{diag}((x_a)_{t_a})_a - \sum_w q_w \nabla_t^2 S_w(c^w(t))$$

$$- \sum_w \frac{\partial D_w}{\partial S_w} (\nabla_t S_w(c^w(t)))^T (\nabla_t S_w(c^w(t)))$$

$$\nabla_{\hat{t}} F = - \sum_w \frac{\partial D_w}{\partial S_w} (\nabla_t S_w(c^w(t)))^T (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})))$$

$$\nabla_t \hat{F} = \text{diag}((\hat{x}_{a'})_{\hat{t}_{a'}})_{a'} - \sum_w \hat{q}_w \nabla_t^2 \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t}))$$

$$- \sum_w \frac{\partial \hat{D}_w}{\partial S_w} (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})))^T (\nabla_t \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})))$$

$$\nabla_{\hat{t}} \hat{F} = - \sum_w \frac{\partial \hat{D}_w}{\partial S_w} (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})))^T (\nabla_t S_w(c^w(t)))$$

$$\frac{\partial D_w}{\partial S_w} = - \frac{\partial D_w}{\partial \hat{S}_w} = \frac{\partial \hat{D}_w}{\partial \hat{S}_w} = - \frac{\partial \hat{D}_w}{\partial S_w}$$

이므로,

$$\begin{bmatrix} \nabla_t F & \nabla_{\hat{t}} F \\ \nabla_t \hat{F} & \nabla_{\hat{t}} \hat{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}((x_a)_{t_a})_a & 0 \\ 0 & \text{diag}((\hat{x}_{a'})_{\hat{t}_{a'}})_{a'} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} - \sum_w q_w \nabla_t^2 S_w & 0 \\ 0 & - \sum_w \hat{q}_w \nabla_{\hat{t}}^2 \hat{S}_w \end{bmatrix}$$

$$- \sum_w \frac{\partial D_w}{\partial S_w} \begin{bmatrix} (\nabla_t S_w)^T (\nabla_t S_w) & (\nabla_t S_w)^T (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w) \\ (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w)^T (\nabla_t S_w) & (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w)^T (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w) \end{bmatrix}$$

$\text{diag}((x_a)_{t_a})_a = \frac{\partial x_a}{\partial t_b} \delta_{a,b}$, $\text{diag}((\hat{x}_{a'})_{\hat{t}_{a'}})_{a'} = \frac{\partial \hat{x}_{a'}}{\partial \hat{t}_{b'}} \delta_{a',b'}$ 는 링크비용함수로부터 직접 계산이 가능하며 각 대각 요소들(diagonal entris)이 양의 값을 갖는 양확정(positive definite)이 된다.

또한 Sheffi(1985)의 연구에서 잘 알려져 있듯이 $S_w(c^w(t))$ 는 $c^w(t)$ 에 대해서 오목(concave)함수이므로 $-S_w(c^w)$ 는 t_a 에 대해서 볼록(convex)함수가 된다. 따라서 $-\sum_w q_w \nabla_t^2 S_w$ 와 $-\sum_w \hat{q}_w \nabla_{\hat{t}}^2 \hat{S}_w$ 는 양반확정(positive semi-definite)이 된다.

세 번째 항도 $\frac{\partial D_w}{\partial S_w} < 0$ 이므로 쉽게 양반확정 행렬임을 알 수 있다. 결국 $\begin{bmatrix} \nabla_t F & \nabla_t F \\ \nabla_t \hat{F} & \nabla_t \hat{F} \end{bmatrix}$ 는 양확정 행렬이 되고 식

(1)~(6)의 최적해(t, \hat{t})는 유일하며 그에 따른 유일한 x, \hat{x}, q, \hat{q} 을 갖게 된다.

III. 다수단 확률적 사용자 균형의 민감도 분석

1. 링크변수에 대한 민감도 분석

수식표현에 있어서 다음과 같이 정의한다.

$(x_a)_{t_a}$: x_a 에 대한 t_a 의 편미분계수

$(x_a)_{\epsilon_a}$: x_a 에 대한 ϵ_a 의 편미분계수

$(x_a)_{\epsilon_a}$ 와 $\frac{\partial x_a}{\partial \epsilon_b}$ 의 차이를 설명하면 $(x_a)_{\epsilon_a}$ 는 x_a 가 ϵ_b 의 함수로 직접 계산이 가능할 경우 사용된다. 따라서 만약 약에 $a \neq b$ 이면 $(x_a)_{\epsilon_b} = 0$ 이 되고 $a = b$ 이면 $(x_a)_{\epsilon_a} = \text{diag}((x_a)_{\epsilon_a})_a$ 가 된다. 또한 $\frac{\partial x_a}{\partial \epsilon_b}$ 는 균형 상태에서 ϵ_b 의 변화에 대한 x_a 의 변화율을 나타낸다. 따라서 일반적으로 $a \neq b$ 라도 $\frac{\partial x_a}{\partial \epsilon_b} \neq 0$ 일 수 있다.

다수단 확률적 사용자 균형 상태에서는 다음이 성립한다.

$$F(t, \hat{t}, \epsilon) = x(t, \epsilon) - \sum_w q_w (\nabla_t S_w(c^w(t)))^T = 0$$

$$\hat{F}(\hat{t}, t, \hat{\epsilon}) = \hat{x}(\hat{t}, \hat{\epsilon}) - \sum_w \hat{q}_w (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})))^T = 0$$

위 수식으로부터,

$$\nabla_{\epsilon} F = \nabla_{\hat{\epsilon}} F = \nabla_{\hat{\epsilon}} \hat{F} = \nabla_{\hat{\epsilon}} \hat{F} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_t F & \nabla_t F \\ \nabla_t \hat{F} & \nabla_t \hat{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial \epsilon} & \frac{\partial t}{\partial \hat{\epsilon}} \\ \frac{\partial \hat{t}}{\partial \epsilon} & \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{\epsilon}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\epsilon}} \end{bmatrix} = 0$$

결국, $\frac{\partial t}{\partial \epsilon}, \frac{\partial \hat{t}}{\partial \epsilon}, \frac{\partial t}{\partial \hat{\epsilon}}, \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{\epsilon}}$ 는 식(9)와 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial \epsilon} & \frac{\partial t}{\partial \hat{\epsilon}} \\ \frac{\partial \hat{t}}{\partial \epsilon} & \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{\epsilon}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_t F & \nabla_t F \\ \nabla_t \hat{F} & \nabla_t \hat{F} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\epsilon}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\epsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diag}((x_a)_{\epsilon_a})_a & 0 \\ 0 & \text{diag}((\hat{x}_{a'})_{\hat{\epsilon}_{a'}})_{a'} \end{bmatrix}$$

$x(t, \epsilon), \hat{x}(\hat{t}, \hat{\epsilon})$ 이므로 위의 계산 결과를 이용하여 링크변수의 변화에 따른 링크통행량의 변화율 $\frac{\partial x}{\partial \epsilon},$

$\frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{\epsilon}}, \frac{\partial x}{\partial \hat{\epsilon}}, \frac{\partial \hat{x}}{\partial \epsilon}$ 을 구하면 식(10)~(17)과 같다.

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial x}{\partial \epsilon} = (x)_{\epsilon} + (x)_{\hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \epsilon} \quad (10)$$

$$\left(\frac{x_a}{\epsilon_b}\right)_{a,b} = ((x_a)_{\epsilon_b} \delta_{a,b} + (x_a)_{\hat{t}_a} \frac{\partial \hat{t}_a}{\partial \epsilon_b})_{a,b} \quad (11)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{\epsilon}} = (\hat{x})_{\hat{\epsilon}} + (\hat{x})_{\hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{\epsilon}} = (\hat{x})_{\hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{\epsilon}} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\hat{x}_{a'}}{\hat{\epsilon}_b}\right)_{a',b} = ((\hat{x}_{a'})_{\hat{t}_{a'}} \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial \hat{\epsilon}_b})_{a',b} \quad (13)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial x}{\partial \hat{\epsilon}} = (x)_{\hat{\epsilon}} + (x)_{\hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{\epsilon}} = (x)_{\hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{\epsilon}} \quad (14)$$

$$\left(\frac{x_a}{\hat{\epsilon}_b}\right)_{a,b} = ((x_a)_{\hat{t}_a} \frac{\partial \hat{t}_a}{\partial \hat{\epsilon}_b})_{a,b} \quad (15)$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial \hat{x}}{\partial \epsilon} = (\hat{x})_{\hat{\epsilon}} + (\hat{x})_{\hat{t}} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \epsilon} \quad (16)$$

$$\left(\frac{\hat{x}_{a'}}{\hat{\epsilon}_b}\right)_{a',b} = ((\hat{x}_{a'})_{\hat{\epsilon}_b} \delta_{a',b} + (\hat{x}_{a'})_{\hat{t}_{a'}} \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial \hat{\epsilon}_b})_{a',b} \quad (17)$$

다음으로 $\frac{\partial q}{\partial \epsilon}, \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{\epsilon}}, \frac{\partial q}{\partial \hat{\epsilon}}, \frac{\partial \hat{q}}{\partial \epsilon}$ 를 구하면 식(18)~(21)과 같다.

$$q_w = D_w(S_w(c^w(t)), \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})))$$

$$\hat{q}_w = \hat{D}_w(\hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})), S_w(c^w(t)))$$

이므로

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial q_w}{\partial \epsilon_a} = \frac{\partial D_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial \epsilon_a} + \frac{\partial D_w}{\partial \hat{S}_w} \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \epsilon_a} \quad (18)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial \hat{q}_w}{\partial \epsilon_a} = - \frac{\partial q_w}{\partial \epsilon_a} \quad (19)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial \hat{q}_w}{\partial \hat{\epsilon}_{a'}} = \frac{\partial \hat{D}_w}{\partial S_w} \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{\epsilon}_{a'}} + \frac{\partial D_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial \hat{\epsilon}_{a'}} \quad (20)$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\partial q_w}{\partial \hat{\epsilon}_{a'}} = - \frac{\partial \hat{q}_w}{\partial \hat{\epsilon}_{a'}} \quad (21)$$

여기서,

$$\frac{\partial S_w}{\partial \epsilon_a} = \sum_b \frac{\partial S_w}{\partial t_b} \frac{\partial t_b}{\partial \epsilon_a}, \quad \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \epsilon_a} = \sum_{b'} \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{t}_{b'}} \frac{\partial \hat{t}_{b'}}{\partial \epsilon_a}$$

$$\frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{\epsilon}_{a'}} = \sum_{b'} \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{t}_{b'}} \frac{\partial \hat{t}_{b'}}{\partial \hat{\epsilon}_{a'}}, \quad \frac{\partial S_w}{\partial \hat{\epsilon}_{a'}} = \sum_b \frac{\partial S_w}{\partial t_b} \frac{\partial t_b}{\partial \hat{\epsilon}_{a'}}$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t_b} = \frac{\sum_k \exp(-\theta c_k^w) \delta_{b,k}^w}{\sum_p \exp(-\theta c_p^w)} = P_b^w$$

$$\frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{t}_{b'}} = \frac{\sum_k \exp(-\theta \hat{c}_k^w) \delta_{b',k}^w}{\sum_{p'} \exp(-\theta \hat{c}_{p'}^w)} = \hat{P}_{b'}^w$$

1) 승용차 도로링크 용량에 대한 민감도 분석

다수단 확률적 균형 상태는 도로용량과 노선빈도에 대해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F(t, \hat{t}, C) = x(t, C) - \sum_w q_w (\nabla_t S_w(c^w(t)))^T = 0 \quad (22)$$

$$\hat{F}(\hat{t}, t, f) = \hat{x}(\hat{t}, f) - \sum_w \hat{q}_w (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})))^T = 0 \quad (23)$$

위 수식으로부터,

$$\nabla_C F = \nabla_C \hat{F} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_t F & \nabla_{\hat{t}} F \\ \nabla_t \hat{F} & \nabla_{\hat{t}} \hat{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial C} \\ \frac{\partial \hat{t}}{\partial C} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial C} \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial C} \end{bmatrix} = 0$$

따라서 $\frac{\partial t}{\partial C}, \frac{\partial \hat{t}}{\partial C}$ 는 식(24)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial C} \\ \frac{\partial \hat{t}}{\partial C} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_t F & \nabla_{\hat{t}} F \\ \nabla_t \hat{F} & \nabla_{\hat{t}} \hat{F} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial C} \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial C} \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서, $\frac{\partial F}{\partial C} = (x_a)_{C_b} \delta_{a,b}, \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial C} = 0$

위의 계산 결과를 이용하여 도로용량에 대한 링크 통행량의 변화율($\frac{\partial x}{\partial C}, \frac{\partial \hat{x}}{\partial C}$)과 통행수요의 변화율($\frac{\partial q}{\partial C}, \frac{\partial \hat{q}}{\partial C}$)을 구하면 식(25)~(28)과 같다.

$$\frac{\partial x}{\partial C} = ((x_a)_{C_b} \delta_{a,b} + (x_a)_{t_a} \frac{\partial t_a}{\partial C_b})_{a,b} \quad (25)$$

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial C} = ((\hat{x}_{a'})_{\hat{t}_{a'}} \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial C_b})_{a',b} \quad (26)$$

$$\frac{\partial q_w}{\partial C_a} = \frac{\partial D_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial C_a} + \frac{\partial \hat{D}_w}{\partial S_w} \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial C_a} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \hat{q}_w}{\partial C_a} = - \frac{\partial q_w}{\partial C_a} \quad (28)$$

여기서,

$$\frac{\partial S_w}{\partial C_a} = \sum_b \frac{\partial S_w}{\partial t_b} \frac{\partial t_b}{\partial C_a}, \quad \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial C_a} = \sum_{b'} \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{t}_{b'}} \frac{\partial \hat{t}_{b'}}{\partial C_a}$$

2) 대중교통 노선빈도에 대한 민감도 분석

식(22), (23)으로 부터 다음과 같이 수식을 유도할 수 있다.

$$\nabla_f F = \nabla_f \hat{F} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \nabla_t F & \nabla_{\hat{t}} F \\ \nabla_t \hat{F} & \nabla_{\hat{t}} \hat{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial f} \\ \frac{\partial \hat{t}}{\partial f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial f} \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial f} \end{bmatrix} = 0$$

따라서 $\frac{\partial t}{\partial f}, \frac{\partial \hat{t}}{\partial f}$ 는 식(29)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t}{\partial f} \\ \frac{\partial \hat{t}}{\partial f} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla_t F & \nabla_{\hat{t}} F \\ \nabla_t \hat{F} & \nabla_{\hat{t}} \hat{F} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial f} \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial f} \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서, $\frac{\partial F}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial f} = (\hat{x}_{a'})_{f_i} \delta_{a',i}, \quad \delta_{a',i}$ 링크 a' 가 노선 i 의 링크면 1, 그렇지 않으면 0

위의 계산 결과를 이용하여 노선빈도에 대한 링크 통행량의 변화율인 $\frac{\partial x}{\partial f}, \frac{\partial \hat{x}}{\partial f}$ 을 구하면 식(30), (31)과 같다.

$$\frac{\partial x}{\partial f} = ((x_a)_{t_a})_{a,t} \frac{\partial t_a}{\partial f_i} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \hat{x}}{\partial f} = ((\hat{x}_{a'})_{f_i} \delta_{a',t} + (\hat{x}_{a'})_{i_a} \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial f_i})_{a',t} \quad (31)$$

또한 노선빈도에 대한 통행수요의 변화율인 $\frac{\partial \hat{q}}{\partial f}$, $\frac{\partial q}{\partial f}$ 를 구하면 식(32), (33)과 같다.

$$\frac{\partial \hat{q}_w}{\partial f_i} = \frac{\partial \hat{D}_w}{\partial \hat{S}_w} \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial f_i} + \frac{\partial D_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial f_i} \quad (32)$$

$$\frac{\partial q_w}{\partial f_i} = - \frac{\partial \hat{q}_w}{\partial f_i} \quad (33)$$

여기서,

$$\frac{\partial \hat{S}_w}{\partial f_i} = \sum_b \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{t}_b} \frac{\partial \hat{t}_b}{\partial f_i}, \quad \frac{\partial S_w}{\partial f_i} = \sum_b \frac{\partial S_w}{\partial t_b} \frac{\partial t_b}{\partial f_i}$$

2. 수단분담율에 대한 민감도 분석

다음은 수단분담율에 대한 통행변수의 민감도를 구해 보려 한다. 이 경우의 다수단 확률적 균형상태의 조건식은 승용차 수단분담율(p)에 대해서 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$F(t, p) = x(t) - \sum_w q_w(p_w) (\nabla_t S_w(c^w(t)))^T = 0$$

$$\hat{F}(\hat{t}, p) = \hat{x}(\hat{t}) - \sum_w \hat{q}_w(p_w) (\nabla_{\hat{t}} \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t})))^T = 0$$

여기서 기종점 통행량은 다음과 같이 정의된다.

$$q_w(p_w) = \bar{q}_w p_w = \bar{q}_w (1 - \hat{p}_w)$$

$$\hat{q}_w(p_w) = \bar{q}_w (1 - p_w) = \bar{q}_w \hat{p}_w$$

p_w, \hat{p}_w 는 기종점 w 간 승용차와 대중교통 수단분담율을 나타내며 다수단 확률적 사용자 균형 상태에서는 다음이 성립한다.

$$\begin{cases} F(t, p) = F(t, \hat{p}) = 0 \\ \hat{F}(\hat{t}, p) = \hat{F}(\hat{t}, \hat{p}) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla_p F = \nabla_{\hat{p}} F = \nabla_p \hat{F} = \nabla_{\hat{p}} \hat{F} = 0$$

$$\nabla_t F \left(\frac{\partial t}{\partial p} \right) + (F)_q (q)_p = 0 \quad (34)$$

$$\nabla_{\hat{t}} \hat{F} \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial p} \right) + (\hat{F})_{\hat{q}} (\hat{q})_p = 0 \quad (35)$$

$$\nabla_t F \left(\frac{\partial t}{\partial p} \right) + (F)_q (q)_p = 0 \quad (36)$$

$$\nabla_{\hat{t}} \hat{F} \left(\frac{\partial \hat{t}}{\partial p} \right) + (\hat{F})_{\hat{q}} (\hat{q})_p = 0 \quad (37)$$

수단분담율에 대한 민감도 분석의 경우 ∇F_t 와 $\nabla \hat{F}_{\hat{t}}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\nabla_t F = \text{diag}((x_a)_{t_a})_a - \sum_w q_w \nabla_t^2 S_w(c^w(t))$$

$$\nabla_{\hat{t}} \hat{F} = \text{diag}((\hat{x}_{a'})_{\hat{t}_{a'}})_{a'} - \sum_w \hat{q}_w \nabla_{\hat{t}}^2 \hat{S}_w(\hat{c}^w(\hat{t}))$$

식(34)~(37)로부터 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial t}{\partial p} = - \nabla_t F^{-1} (F)_q (q)_p$$

$$\frac{\partial \hat{t}}{\partial p} = - \nabla_{\hat{t}} \hat{F}^{-1} (\hat{F})_{\hat{q}} (\hat{q})_p$$

$$\frac{\partial t}{\partial \hat{p}} = - \nabla_t F^{-1} (F)_q (q)_{\hat{p}}$$

$$\frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{p}} = - \nabla_{\hat{t}} \hat{F}^{-1} (\hat{F})_{\hat{q}} (\hat{q})_{\hat{p}}$$

여기서,

$$(F)_q = - \frac{\partial S_w}{\partial t_a} = - P_a^w, \quad (\hat{F})_{\hat{q}} = - \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{t}_{a'}} = - \hat{P}_{a'}^w$$

$$(q)_p = \bar{q}_w, \quad (\hat{q})_p = - \bar{q}_w$$

$$(q)_{\hat{p}} = - \bar{q}_w, \quad (\hat{q})_{\hat{p}} = \bar{q}_w$$

따라서 $\frac{\partial t}{\partial p}, \frac{\partial \hat{t}}{\partial p}, \frac{\partial t}{\partial \hat{p}}, \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{p}}$ 는 식(38)~(41)과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{\partial t_a}{\partial p_w} = \sum_b \left(\frac{\partial F_a}{\partial t_b} \right)_{a,b}^{-1} P_b^w \bar{q}_w \quad (38)$$

$$\frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial p_w} = - \sum_b \left(\frac{\partial \hat{F}_{a'}}{\partial \hat{t}_b} \right)_{a',b}^{-1} \hat{P}_b^w \bar{q}_w \quad (39)$$

$$\frac{\partial t_a}{\partial \hat{p}_w} = - \sum_b \left(\frac{\partial F_a}{\partial t_b} \right)_{a,b}^{-1} P_b^w \bar{q}_w = - \frac{\partial t_a}{\partial p_w} \quad (40)$$

$$\frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial \hat{p}_w} = \sum_b \left(\frac{\partial \hat{F}_{a'}}{\partial \hat{t}_b} \right)_{a',b}^{-1} \hat{P}_b^w \bar{q}_w = - \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial p_w} \quad (41)$$

결국, 수단분담율의 변화에 따른 링크통행량의 변화율

$\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial \hat{x}}{\partial p}, \frac{\partial x}{\partial \hat{p}}, \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{p}}$ 은 식(42)~(45)와 같다.

$$\textcircled{1} \frac{\partial x}{\partial p} = (x)_i \frac{\partial t}{\partial p} = ((x_a)_{t_a} \frac{\partial t_a}{\partial p_w})_{a,w} \quad (42)$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial \hat{x}}{\partial p} = (\hat{x})_i \frac{\partial \hat{t}}{\partial p} = ((\hat{x}_{a'})_{\hat{t}_{a'}} \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial \hat{p}_w})_{a',w} \quad (43)$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial x}{\partial \hat{p}} = (x)_i \frac{\partial t}{\partial \hat{p}} = ((x_a)_{t_a} \frac{\partial t_a}{\partial \hat{p}_w})_{a,w} \quad (44)$$

$$\textcircled{4} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{p}} = (\hat{x})_i \frac{\partial \hat{t}}{\partial \hat{p}} = ((\hat{x}_{a'})_{\hat{t}_{a'}} \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial \hat{p}_w})_{a',w} \quad (45)$$

또한, 수단분담율 변화에 따른 수단별 비효용의 변화

$\frac{\partial S}{\partial p}, \frac{\partial \hat{S}}{\partial p}, \frac{\partial S}{\partial \hat{p}}, \frac{\partial \hat{S}}{\partial \hat{p}}$ 를 구하면 식(46)~(49)와 같다.

$$\frac{\partial S_w}{\partial p_w} = \sum_a \frac{\partial S_w}{\partial t_a} \frac{\partial t_a}{\partial p_w} = \sum_a P_a^w \frac{\partial t_a}{\partial p_w} \quad (46)$$

$$\frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{p}_w} = \sum_{a'} \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{t}_{a'}} \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial \hat{p}_w} = \sum_{a'} \hat{P}_{a'}^w \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial \hat{p}_w} = - \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{p}_w} \quad (47)$$

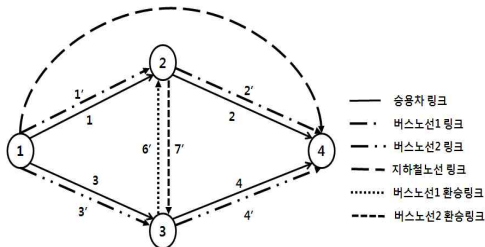
$$\frac{\partial S_w}{\partial \hat{p}_w} = \sum_a \frac{\partial S_w}{\partial t_a} \frac{\partial t_a}{\partial \hat{p}_w} = \sum_a P_a^w \frac{\partial t_a}{\partial \hat{p}_w} = - \frac{\partial S_w}{\partial \hat{p}_w} \quad (48)$$

$$\frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{p}_w} = \sum_{a'} \frac{\partial \hat{S}_w}{\partial \hat{t}_{a'}} \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial \hat{p}_w} = \sum_{a'} \hat{P}_{a'}^w \frac{\partial \hat{t}_{a'}}{\partial \hat{p}_w} \quad (49)$$

IV. 민감도 분석의 적용 및 평가

다수단 확률적 사용자 균형의 민감도 분석 방법을 좀 더 자세히 설명하고 평가하기 위한 간단한 모의 교통망을 설정하면 <그림 2>와 같다.

모의 교통망은 4개의 승용차 링크, 5개의 대중교통(버스, 지하철) 노선링크, 2개의 환승링크로 구성되어 있다. 기점 1 → 종점 4로의 하나의 기종점에 대해서 통행수요는 $\bar{q}=200$ 이고 $\theta=0.05$ 라 가정한다.



<그림 2> 소규모 모의 교통망

<표 1> 소규모 교통망 링크비용함수의 속성 자료

구분	a, a'	t _a ⁰	β _a , β _{a'}	l	f _l	C _a	K _{a'}		
승용차 링크	1	1	2	-	-	10	-		
	2	2	3	-	-	8	-		
	3	1	2	-	-	8	-		
	4	0	1	-	-	9	-		
대중교통 링크	버스	1'	15	2	1	2	-	4	
		2'	15	2	1	2	-	4	
		3'	10	2	2	3	-	6	
		4'	20	2	2	3	-	6	
	지하철	5'	45	1	3	2	-	6	
		환승	6'	-	10	1	2	-	-
			7'	-	10	2	3	-	-

또한 대중교통과 관련하여 버스의 차량용량은 $k_1=k_2=2$ 이고 지하철의 차량용량은 $k_3=3$ 라 가정한다.

승용차 링크, 대중교통 노선링크, 환승링크의 비용함수는 통행량에 따른 단조증가 함수의 형태로 다음과 같이 가정하고 비용함수의 속성자료는 <표 1>과 같다.

승용차 링크 (링크통행시간)

$$t_a(x_a) = t_a^0 + \beta_a x_a / C_a$$

대중교통 노선링크 (링크통행시간+환잡비용)

$$\hat{t}_{a'}(\hat{x}_{a'}) = \hat{t}_{a'}^0 + \beta_{a'} \hat{x}_{a'} / K_{a'} \quad (K_{a'} = f_l k_l)$$

대중교통 환승링크(환승시간)

$$\hat{t}_{a'}(\hat{x}_{a'}) = \beta_{a'} \frac{0.5}{f_l} \hat{x}_{a'}$$

1. 도로용량 및 노선빈도에 대한 민감도 분석

초기 링크용량 $C_1=10, C_2=8, C_3=8, C_4=9$ 와 노선빈도 $f_1=2, f_2=3, f_3=2$ 에서의 링크용량과 노선빈도의 변화에 따른 링크 통행량의 민감도($\partial x/\partial C, \partial \hat{x}/\partial C, \partial x/\partial f, \partial \hat{x}/\partial f$)을 계산하면 <표 2>와 같다.

결과에서 링크1의 도로용량(C_1)이 1단위 증가하면 링크 1의 통행량은 0.839 증가한다고 볼 수 있다. 또한 대중교통 노선 1의 노선빈도(f_1)가 1단위 증가하면 링크 1의 통행량은 -0.568 감소한다고 볼 수 있다.

도로용량(C_1)의 경우, 링크 1에서 증가된 0.839의 통행은 링크 3(승용차), 링크 1'(버스), 링크 3'(버스), 링크 5'(지하철)에서 전환되어 온 통행일 것이다.

대중교통 노선빈도(f_1)의 경우, 승용차 링크 1에서 감

<표 2> C_a 와 f_i 에 대한 링크 통행량의 민감도

구분		C_1	C_2	C_3	C_4	f_1	f_2	f_3
$\frac{\partial x}{\partial C}$	x_1	0.839	1.966	-0.744	-0.294	-1.657	-1.121	-0.403
	x_2	0.839	1.966	-0.744	-0.294	-1.657	-1.121	-0.403
	x_3	-0.349	-0.817	2.304	0.910	-2.473	-1.673	-0.601
$\frac{\partial \hat{x}}{\partial C}$	x_4	-0.349	-0.817	2.304	0.910	-2.473	-1.673	-0.601
	$\hat{x}_{1'}$	-0.118	-0.277	-0.376	-0.149	4.902	0.346	-0.204
	$\hat{x}_{2'}$	-0.115	-0.270	-0.366	-0.145	6.714	-0.543	-0.199
	$\hat{x}_{3'}$	-0.155	-0.363	-0.493	-0.195	0.767	3.490	-0.267
	$\hat{x}_{4'}$	-0.158	-0.370	-0.503	-0.199	-1.045	4.378	-0.273
	$\hat{x}_{5'}$	-0.217	-0.509	-0.691	-0.273	-1.539	-1.041	1.475
	$\hat{x}_{6'}$	-0.024	-0.056	-0.076	-0.030	2.401	0.285	-0.041
	$\hat{x}_{7'}$	-0.027	-0.063	-0.085	-0.034	0.590	1.173	-0.046

소된 -0.568의 통행은 링크3(승용차), 링크1'(버스), 링크3'(버스), 링크5'(지하철)를 이용할 것이다. 이를 검증해보면 다음과 같다.

• 도로용량(C_1)에 대한 링크 통행량(x_1)의 변화
 $-0.349(\text{링크3}) + -0.118(\text{링크1}') + -0.155(\text{링크3}') + -0.217(\text{링크5}') = -0.839$

• 노선빈도(f_1)에 대한 링크 통행량(x_1)의 변화
 $-0.930(\text{링크3}) + 9.853(\text{링크1}') + -0.871(\text{링크3}') + -7.485(\text{링크5}') = 0.568$

다음으로 도로용량과 노선빈도 변화에 따른 승용차와 대중교통 비효율의 민감도($\partial S/\partial C, \partial \hat{S}/\partial C, \partial S/\partial f, \partial \hat{S}/\partial f$)와 수단별 기종점 통행량의 민감도($\partial q/\partial C, \partial \hat{q}/\partial C, \partial q/\partial f, \partial \hat{q}/\partial f$)를 계산하면 <표 3>과 같다.

수단별 기종점 통행량에 대한 검증으로 도로용량(C_1)과 노선빈도(f_1)에 대해서 전체 승용차 링크 통행량 변화량과 전체 대중교통 링크 통행량 변화량이 수단별 기종점 통행수요 변화와 일치함을 확인해 보면 다음과 같다.

<표 3> C_a 와 f_i 에 대한 비효율 및 기종점 통행량의 민감도

구분	C_1	C_2	C_3	C_4	f_1	f_2	f_3
$\frac{\partial S}{\partial C}, \frac{\partial \hat{S}}{\partial C}$	-0.305	-0.715	-0.972	-0.384	-0.918	-0.621	-0.223
$\frac{\partial S}{\partial f}, \frac{\partial \hat{S}}{\partial f}$	-0.099	-0.232	-0.315	-0.125	-2.655	-1.796	-0.646
$\frac{\partial q}{\partial C}, \frac{\partial \hat{q}}{\partial C}$	0.490	1.149	1.560	0.616	-4.130	-2.794	-1.004
$\frac{\partial q}{\partial f}, \frac{\partial \hat{q}}{\partial f}$	-0.490	-1.149	-1.560	-0.616	4.130	2.794	1.004

• 링크 1의 도로용량(C_1)이 변할 경우

승용차: $0.839(\text{링크1}) + -0.349(\text{링크3}) = 0.490(\partial q/\partial C_1)$
 대중교통: $-0.118(\text{링크1}') + -0.155(\text{링크3}') + -0.217(\text{링크5}') = -0.490(\partial \hat{q}/\partial C_1)$

• 대중교통 노선 1의 노선빈도(f_1)가 변할 경우

승용차: $-1.657(\text{링크1}) + -2.473(\text{링크3}) = -4.130(\partial q/\partial f_1)$
 대중교통: $4.902(\text{링크1}') + 0.767(\text{링크3}') + -1.539(\text{링크5}') = 4.130(\partial \hat{q}/\partial f_1)$

<표 4~5>는 민감도(미분계수)를 이용하여 1차 Taylor 급수의 선형 근사식을 구축하고 $C_1=10 \rightarrow 12$ 일 경우와 $f_1=2 \rightarrow 3$ 일 경우에 대한 링크 통행량, 기종점 통행수요, 수단별 비효율을 추정하여 실제 $C_1=12$ 와 $f_1=3$ 일 때의 다수단 확률적 사용자 균형 통행배정 결과와의 차이를 비교한 것이다.

민감도 분석을 이용한 통행변수의 추정 결과에서 링크 1의 용량 변화의 경우는 오차율이 1% 이내, 노선 1의 노선빈도 변화의 경우는 오차율이 4% 이내로 실제 통행변수를 매우 잘 추정하고 있는 것을 알 수 있다.

<표 4> 링크 1의 용량($C_1=12$)에 대한 통행변수의 추정

구분	통행배정 결과		추정결과		
	초기값 ($C_1=10$)	실제값 ($C_1=12$)	추정값 ($C_1=12$)	오차율	민감도
x_1	51.604	53.046	53.281	0.00	0.839
x_2	51.604	53.046	53.281	0.00	0.839
x_3	70.459	69.859	69.762	0.00	-0.349
x_4	70.459	69.859	69.762	0.00	-0.349
$\hat{x}_{1'}$	24.728	24.525	24.492	0.00	-0.118
$\hat{x}_{2'}$	25.325	25.127	25.095	0.00	-0.115
$\hat{x}_{3'}$	30.211	29.944	29.901	0.00	-0.155
$\hat{x}_{4'}$	29.614	29.342	29.298	0.00	-0.158
$\hat{x}_{5'}$	22.998	22.626	22.564	0.00	-0.217
$\hat{x}_{6'}$	8.451	8.410	8.403	0.00	-0.024
$\hat{x}_{7'}$	7.854	7.807	7.800	0.00	-0.027
q	122.060	122.902	123.040	0.00	0.490
\hat{q}	77.940	77.098	76.960	0.00	-0.490
S	15.453	14.928	14.843	0.01	-0.305
\hat{S}	24.425	24.254	24.227	0.00	-0.099

<표 5> 대중교통 노선1의 빈도($f_1=3$)에 대한 통행변수의 추정

구분	통행배정 결과		추정결과		
	초기값 ($f_1=2$)	실제값 ($f_1=3$)	추정값 ($f_1=3$)	오차율	민감도
x_1	51.604	50.224	49.947	0.01	-1.657
x_2	51.604	50.224	49.947	0.01	-1.657
x_3	70.459	68.402	67.986	0.01	-2.473
x_4	70.459	68.402	67.986	0.01	-2.473
$\hat{x}_{1'}$	24.728	28.699	29.630	0.03	4.902
$\hat{x}_{2'}$	25.325	30.936	32.039	0.04	6.714
$\hat{x}_{3'}$	30.211	30.936	30.978	0.00	0.767
$\hat{x}_{4'}$	29.614	28.699	28.569	0.00	-1.045
$\hat{x}_{5'}$	22.998	21.739	21.459	0.01	-1.539
$\hat{x}_{6'}$	8.451	10.516	10.852	0.03	2.401
$\hat{x}_{7'}$	7.854	8.280	8.443	0.02	0.590
q	122.060	118.623	117.930	0.01	-4.130
\hat{q}	77.940	81.377	82.070	0.01	4.130
S	15.453	14.689	14.535	0.01	-0.918
\hat{S}	24.425	22.226	21.770	0.02	-2.655

2. 수단분담율에 대한 민감도 분석

수단분담율에 대한 민감도 분석 방법을 이용하여 현재 교통망 균형상태의 $p=0.610$ 에서의 민감도 분석 결과를 살펴보도록 하겠다.

수단분담율 변화에 따른 링크 통행량의 민감도 ($\partial x/\partial p, \partial \hat{x}/\partial p$)를 계산하면 <표 6>과 같다.

위의 결과에서 수단분담율(p)이 1단위(200통행) 증가할 때 승용차 링크 1과 3의 통행량 변화의 합이 200이 되

<표 6> 수단분담율에 대한 링크 통행량의 민감도

구분	p	$\hat{p}=1-p$	
$\frac{\partial x}{\partial p}$	x_1	80.243	-80.243
	x_2	80.243	-80.243
	x_3	119.757	-119.757
	x_4	119.757	-119.757
$\frac{\partial \hat{x}}{\partial p}$	$\hat{x}_{1'}$	-48.221	48.221
	$\hat{x}_{2'}$	-46.966	46.966
	$\hat{x}_{3'}$	-63.223	63.223
	$\hat{x}_{4'}$	-64.479	64.479
	$\hat{x}_{5'}$	-88.701	88.701
	$\hat{x}_{6'}$	-9.699	9.699
	$\hat{x}_{7'}$	-10.955	10.955

고 대중교통 링크 1', 3', 5'의 통행량 변화의 합이 -200이 됨을 확인할 수 있다.

다음으로 $p=0.610$ 에서 수단분담율의 변화에 따른 승용차와 대중교통 수단의 비효용 변화($\partial S/\partial p, \partial \hat{S}/\partial p$)와 수단별 기종점 통행량의 변화($\partial q/\partial p, \partial \hat{q}/\partial p$)를 계산하면 <표 7>과 같다.

민감도 분석의 결과를 평가하기 위해서 초기의 $p=0.610$ 에서 계산된 민감도를 이용하여 $p=0.700$ 에서의 링크 통행량, 수단별 통행의 비효용, 수단별 기종점 통행량의 선형근사치를 추정하였다. 그리고 실제 $p=0.700$ 의 다수단 확률적 사용자 균형 통행배정을 실시하여 추정치의 정확도를 비교해보았다.

<표 8>의 민감도 분석을 이용한 통행변수의 추정 결과에서 추정값이 최대 3% 이내로 모의 교통망의 수단분담율이 $p=0.700$ 일 경우에 대한 실제 통행배정 결과를 잘 추정하고 있음을 확인할 수 있다.

<표 7> 수단분담율에 대한 비효용 및 기종점 통행량의 민감도

구분	비효용		기종점 통행량	
	승용차 ($\partial S/\partial p$)	대중교통 ($\partial \hat{S}/\partial p$)	승용차 ($\partial q/\partial p$)	대중교통 ($\partial \hat{q}/\partial p$)
민감도	44.469	-40.447	200	-200

<표 8> 수단분담율($p=0.700$)에 대한 통행변수의 추정

구분	통행배정 결과		추정결과		
	초기값 ($p=0.610$)	실제값 ($p=0.700$)	추정값 ($p=0.700$)	오차율	민감도
x_1	51.604	58.779	58.801	0.00	80.243
x_2	51.604	58.779	58.801	0.00	80.243
x_3	70.459	81.221	81.201	0.00	119.757
x_4	70.459	81.221	81.201	0.00	119.757
$\hat{x}_{1'}$	24.728	20.167	20.403	0.01	-48.221
$\hat{x}_{2'}$	25.325	20.878	21.112	0.01	-46.966
$\hat{x}_{3'}$	30.211	24.307	24.540	0.01	-63.223
$\hat{x}_{4'}$	29.614	23.597	23.830	0.01	-64.479
$\hat{x}_{5'}$	22.998	15.526	15.042	0.03	-88.701
$\hat{x}_{6'}$	8.451	7.471	7.581	0.01	-9.699
$\hat{x}_{7'}$	7.854	6.761	6.871	0.02	-10.955
q	122.060	140.000	140.000	0.00	200.000
\hat{q}	77.940	60.000	60.000	0.00	-200.000
S	15.453	19.441	19.442	0.00	44.469
\hat{S}	24.425	20.551	20.797	0.01	-40.447

V. 결론

본 연구의 민감도 분석은 다수단 확률적 사용자 균형 상태에 대한 임의의 교통망 변수(링크 용량, 대중교통 노선빈도, 수단분담율 등)와 교통망 통행변수(수단별 링크 통행량, 기중점 통행수요, 통행 비효용 등)간의 관계를 파악해 볼 수 있게 해주는 중요한 도구가 될 수 있다. 이는 경제학의 탄력성과 같이 교통시설 운영 및 정책변화에 따른 통행자의 통행행태 변화를 파악해 보고 현 교통체계에서 어떠한 정책이 더 영향력이 크며 효과적인지 있는지를 분석해 볼 수 있는 중요한 정보가 될 수 있다.

또한 교통계획모형의 교통망 설계 문제에서도 활용이 가능하다. 교통망 설계 문제는 교통망 운영자와 이용자의 최적화 문제가 결합된 바이레벨(Bi-level) 형태로 구성되며 이러한 문제를 해결하는 과정은 교통망 운영자와 이용자 간의 게임이론으로 설명될 수 있다. 교통망 설계 문제를 해결함에 있어서 최근에는 비협력 게임의 접근법이 아닌 협력적 게임의 접근법이 활발히 이루어지고 있다. 이러한 협력적 게임의 교통망 설계 문제는 교통망 설계변수의 변화에 따른 통행변수의 변화를 추정해야 하기 때문에 본 연구의 결과가 협력적 게임의 다수단 교통망 설계 문제를 해결하기 위한 도구로 활용될 수 있을 것이다.

본 연구에서는 다수단 교통망의 민감도 분석에 대한 연구의 첫 단계로 우선은 통행비용함수의 분리 형태를 가정하여 연구를 진행하였다. 따라서 실질적으로 동일 링크를 통행하는 수단 간의 상호영향은 고려하지 못하였다. 대신 기존 연구에서 고려되지 못했던 수단선택의 변화와 그에 따른 각 수단의 통행변수의 변화를 분석하고 그 방법론을 정립했다는 것이 본 연구의 의의라 할 수 있겠다. 향후 보다 완전한 형태의 다수단 교통망에서의 민감도 분석을 위해서는 본 연구에서 고려되지 못한 통행비용함수의 비분리(non-separable)형태에 대한 연구가 더 이루어질 필요가 있다.

참고문헌

1. 김병관·임용택·임강원(2004), “민감도 분석을 이용한 도로 혼잡통행료 산정 모형 개발”, 대한교통학회지, 제22권 제5호, 대한교통학회, pp.139~149.
2. 김병관(2010), “교통수단 선택을 고려한 다수단 연

- 속형 교통망 설계 모형”, 서울대학교 공학박사학위 논문.
3. 임용택(2004), “민감도 분석을 이용한 연속형 교통망설계모형의 개발”, 대한교통학회지, 제22권 제2호, 대한교통학회, pp.65~76.
4. Davis, G.(1994), “Exact solution of the continuous network design problem via stochastic user equilibrium assignment”, Transportation Research 28B, pp.61~75.
5. Daganzo, C. F.(1982), “Unconstrained formulation of some transportation equilibrium problems”, Transportation Science, Vol. 16, pp.332~360.
6. Hai Yang(1997), “Sensitivity analysis for the elastic-demand network equilibrium problem with applications”, Transportation Research 31B, pp.55~70.
7. Hai Yang, Michael G. H. Bell(1997), “Traffic restraint, road pricing and network equilibrium”, Transportation Research 31B, pp.303~314.
8. Hai Yang, William H. K. Lam(1996), “Optimal road tolls under condition of queueing and congestion”, Transportation Research 30A, pp.319~332.
9. Jiang Qian Ying, Toshihiko Miyagi(2001), “Sensitivity Analysis for Stochastic User Equilibrium Network Flow-A Dual Approach”, Transportation Science, Vol. 35, No. 2, pp.124~133.
10. Jiang Qian Ying, Hai Yang(2005), “Sensitivity of stochastic user equilibrium flows in a bi-modal network with application to optimal pricing”, TR-B, Vol. 39, pp.769~795.
11. Michael J. Maher et al.(2001), “A bi-level programming approach for trip matrix estimation and control problem with stochastic user equilibrium link flow”, Transportation Research 35B, pp.23~40.
12. Qiu, Y., T. L. Magnanti(1989), “Sensitivity analysis for variational inequalities defined on polyhedral sets”, Math. Oper. Res 14,

- pp.410~432.
13. Sheffi Y.(1985), "Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
 14. Tobin, R. L., T. L. Friesz(1988), "Sensitivity analysis for equilibrium network flows", Transportation Science, Vol. 22, pp.242~250.
 15. Williams, H.C.W.L.(1977), "On the formation of travel demand models and economics measures of user benefit", Environment and Planning 9A, pp.285~344.

✉ 주 작성자 : 김병관

✉ 교신저자 : 김병관

✉ 논문투고일 : 2010. 4. 8

✉ 논문심사일 : 2010. 7. 7 (1차)

2010. 8. 12 (2차)

✉ 심사판정일 : 2010. 8. 12

✉ 반론접수기한 : 2011. 2. 28

✉ 3인 익명 심사필

✉ 1인 abstract 교정필