

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2010.34.7.881

인장 하중을 받는 무한 고체에 포함된 다수의 등방성 함유체 문제 해석을 위한 체적 적분방정식법

이 정 기*†

* 홍익대학교 기계정보공학과

Volume Integral Equation Method for Multiple Isotropic Inclusion Problems in an Infinite Solid Under Uniaxial Tension

Jung-Ki Lee*†

* Dept. of Mechanical and Design Engineering, Hongik Univ.

(Received February 8, 2010 ; Revised June 1, 2010 ; Accepted June 8, 2010)

Key Words: Volume Integral Equation Method(체적 적분방정식법), Boundary Integral Equation Method(경계요소법), Finite Element Method(유한요소법), Isotropic Inclusion(등방성 함유체), Infinite Solid(무한 고체), Composite Materials(복합 재료), Fiber Volume Fraction(섬유 체적분율)

초록: 체적 적분방정식법(Volume Integral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법을 이용하여, 서로 상호작용을 하는 등방성 함유체를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 인장하중을 받을 때 무한고체 내부에 발생하는 응력분포 해석을 매우 효과적으로 수행하였다. 즉, 등방성 기지에 다수의 등방성 함유체가 1) 정사각형 배열 형태 또는 2) 정육각형 배열 형태로 포함되어 있는 경우에, 다양한 함유체의 체적비에 대하여, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포의 변화를 구체적으로 조사하였다. 또한, 체적 적분방정식법을 이용한 해를 해석해 또는 유한요소법을 이용한 해와 비교해 봄으로써, 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해의 정확도를 검증하였다.

Abstract: A volume integral equation method (VIEM) is introduced for solving the elastostatic problems related to an unbounded isotropic elastic solid; this solid is subjected to remote uniaxial tension, and it contains multiple interacting isotropic inclusions. The method is applied to two-dimensional problems involving long parallel cylindrical inclusions. A detailed analysis of the stress field at the interface between the matrix and the central inclusion is carried out; square and hexagonal packing of the inclusions are considered. The effects of the number of isotropic inclusions and different fiber volume fractions on the stress field at the interface between the matrix and the central inclusion are also investigated in detail. The accuracy and efficiency of the method are clarified by comparing the results obtained by analytical and finite element methods. The VIEM is shown to be very accurate and effective for investigating the local stresses in composites containing isotropic fibers.

1. 서론

다양한 형태의 재료들로 구성되는 복합재료에서의 정확한 변형률 및 응력 성분을 계산하기 위한 연구는 많은 연구자들에 의하여 진행되고 있다.

복합재료를 이루는 재료들은 일반적으로 등방성 재료이나, 항공분야에 사용되고 있는 금속기지 복합재료에서는 Ti 기지는 등방성 재료로 이루어지지만, SiC 섬유는 이방성 재료로 이루어지는 경우도 있다.

따라서, 복합재료에서의 파손 메카니즘을 정확히 예측하기 위해서는, 등방성 함유체 또는 이방성 함유체가 포함된 등방성 무한고체에서의 탄성 해석이 필요하다.

인장하중을 받을 때, 단일 또는 다수의 함유체를 포함하는 무한 고체에서의 탄성해석에 관한 연구는 Eshelby,⁽¹⁾ Hashin,⁽²⁾ Achenbach와 Zhu,⁽³⁾ Christensen,⁽⁴⁾ Nimmer 외,⁽⁵⁾ 그리고 많은 연구자들⁽⁶⁻¹²⁾에 의하여 연구되었다.

본 논문에서는, 체적 적분방정식법(Volume Int-

† Corresponding Author, inq3jkl@wow.hongik.ac.kr

egral Equation Method)이라는 새로운 수치해석 방법을 이용하여, 서로 상호작용을 하는 등방성 함유체를 포함하는 등방성 무한고체가 정적 인장하중을 받을 때 무한고체 내부에 발생하는 응력분포 해석을 매우 효과적으로 수행하였다. 즉, 등방성 기지에 다수의 등방성 함유체가 1) 정사각형 배열 형태 또는 2) 정육각형 배열 형태로 포함되어 있는 경우에 대하여, 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.05만큼씩 증가할 때, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포의 변화를 구체적으로 조사하였다.

또한, 체적 적분방정식법을 이용한 해를 해석해 또는 유한요소법을 이용한 해와 비교해 봄으로서, 체적 적분방정식법을 이용하여 구한 해의 정확도를 검증하였다.

끝으로, 본 논문에서 체적 적분방정법을 이용하여 구한 해를 그림과 표로 정리함으로써, 다른 연구자들이 다른 다양한 방법들을 사용하여 구한 해들의 정확도를 검증할 때 벤치마킹(benchmark)할 수 있도록 하였다.

2. 체적 적분방정식법(VIEM)

Fig. 1은 재료특성이 다른 다양한 형태를 갖는 다수의 함유체를 포함하는 무한고체가 무한하중을 받는 일반적인 탄성정역학 문제를 나타낸다. 여기서, 무한하중이란 무한원방에서 작용하는 하중을 나타낸다.

Fig. 1에서, 기지(matrix)는 무한공간을 차지하는 균일한 등방성 재료로 이루어지고, 함유체들은 기지와 다른 등방성 재료로 이루어진다고 가정한다. $c^{(1)}_{ijkl}$ 은 함유체의 탄성상수를 나타내고, $c^{(2)}_{ijkl}$ 는 기지의 탄성상수를 나타낸다. 함유체들과 기지 사이의 경계면은 변위와 표면력 벡터(traction

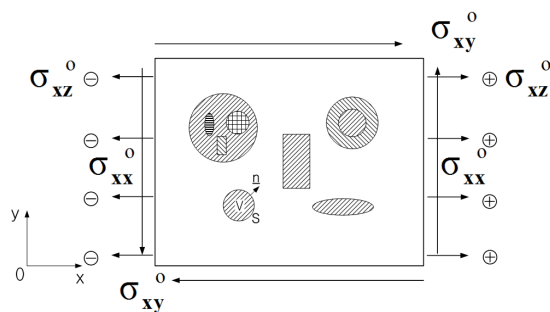


Fig. 1 Geometry of the general elastostatic problem

vector)의 연속성

$$u_m(\mathbf{x}) = u_m^o(\mathbf{x}) - \int_V \delta c_{ijkl} g_{i,j}^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_{k,l}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \tag{1}$$

의 방정식을 만족함을 보였다. 식 (1)에서 적분은 전체 무한공간에 대해서 이루어지고, $\delta c_{ijkl} = c^{(1)}_{ijkl} - c^{(2)}_{ijkl}$ 이며 등방성 함유체와 기지 사이의 탄성상수의 차이를 나타낸다. $u_m^o(\mathbf{x})$ 는 무한 하중에 대한 변위를 나타내며, $g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ 은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수이다. 즉, $g_i^m(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ 은 등방성 무한기지의 \mathbf{x} 에서 m 방향으로 작용하는 단위 집중하중 \mathbf{e}_m 때문에 $\boldsymbol{\xi}$ 에서 발생하게 되는 변위 벡터의 i 방향 성분을 나타낸다. 식 (1)에서 합의 규약과 콤마 표기법이 사용되었으며, 미분은 적분변수 $\boldsymbol{\xi}_i$ 에 관해서 행해진다. 여기서, δc_{ijkl} 가 함유체 내부에서만 0이 아니므로, 피 적분함수(integrand)는 함유체 외부의 무한공간에서는 0이 된다는 사실을 주목해야 한다.⁽⁷⁾

만약 \mathbf{x} 가 함유체 내부에 속하면, 식 (1)은 함유체 내부에서의 미정 변위 벡터 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 에 관한 적분-미분 방정식(integro-differential equation)이 된다. 따라서, 임의의 형상을 갖는 단일의 함유체라 할지라도, 식 (1)의 해를 해석적으로 구한다는 것은 매우 어려운 문제가 된다. 그러므로, 함유체 내부를 표준의 유한요소들을 사용해서 요소 분할하여 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 를 수치해석 방법으로 결정하는 체적 적분방정식법이 Lee와 Mal^(7,14)에 의하여 개발되었다. 일단, 함유체 내부에서의 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 가 결정되면, 함유체 내부에서의 변형률 및 응력을 계산할 수 있고, 또한 함유체 외부에서의 변위, 변형률 및 응력도 식 (1)의 적분 값을 구함으로써 별다른 어려움없이 계산할 수 있다. 식 (1)에서 g_i^m 은 등방성 무한기지에서의 탄성정역학 Green 함수이므로, 비록 함유체가 이방성 재료로 이루어진다고 할지라도, 체적 적분방정식법에서는 이방성 함유체에서의 Green 함수를 필요로 하지 않는다는 장점이 있다.

등방성 무한기지에 다수의 등방성 함유체가 포함된 무한고체에서의 일반적인 탄성동역학 및 탄성정역학 문제를 해석하기 위한 체적 적분방정식법에 대한 자세한 기술은 Lee와 Mal^(7,14)에 잘 나타나 있다.

3. 다수의 함유체 문제

Fig. 2에 있는 다수의 등방성 함유체가 등방성

기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다. 다수의 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.05만큼씩 증가할 때, 함유체의 개수를 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포의 변화를 조사하였다. 이 경우는 체적 적분방정식법이 최적의 수치해석 방법임을 알 수 있다.^(7,15) 왜냐하면, 1) 경계요소법과 달리, 모든 경계면에서의 연속 조건이 자동적으로 만족하고, 함유체 내부를 유한요소를 사용하여 요소 분할하므로 임의의 형상을 갖는 함유체를 해석할 때 도 전혀 어려움이 없게 되며, 2) 유한요소법과 달리, 무한공간을 이루고 있는 기지는 요소분할할 필요가 없이, 함유체 내부만을 요소분할하면 되기 때문이다. 특히, 3) 함유체의 체적비가 변화할 때, 기지를 요소분할할 필요가 없이 함유체의 위치만 변경하면 되므로, 체적 적분방정식법 모델링을 매우 효율적으로 수행할 수 있게 된다.

Table 1 Material properties of the isotropic matrix and the isotropic inclusion for the elastostatic problems

(Uni5t: GPa)	Isotropic Matrix	Isotropic Inclusion
λ	67.34	176.06
μ	37.88	176.06

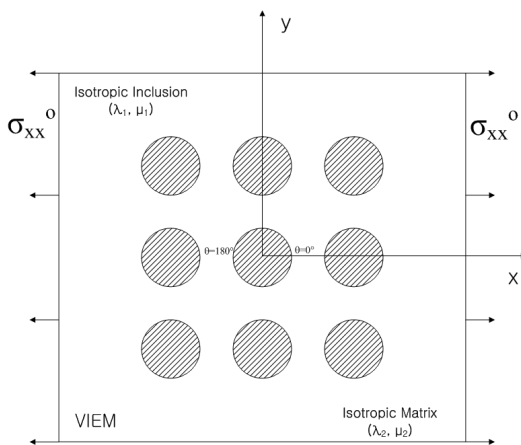


Fig. 2 Multiple isotropic cylindrical inclusions in unbounded isotropic matrix under uniform remote tensile loading

3.1 등방성 무한 기지에서의 탄성정역학 Green 함수

식 (1)에서 등방성 무한기지에 대한 Green 함수⁽¹⁶⁾는 다음과 같이 주어진다.

$$g_{\alpha}^{\beta} = \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left[-\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \ln r \delta_{\alpha\beta} + r_{,\alpha} r_{,\beta} \right] \quad (2)$$

여기서, $\mathbf{r} = | \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} |$, $\alpha, \beta = 1, 2$ 그리고 λ, μ 는 등방성 무한기지에서 Lamé 상수를 나타낸다.

3.2 다수의 등방성 함유체의 배열이 정사각형 (square) 형태일 때

다수의 등방성 함유체가 정사각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.

우선, 체적 적분방정식법을 이용한 해의 정확도를 검증하기 위하여, 단일의 등방성 함유체가 등방성 기지에 포함되어 있는 경우에 함유체 내부에서의 응력분포를 조사하였다. 다음에, 다수의 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.05만큼씩 증가할 때, 함유체의 개수를 a) 9개, b) 25개, c) 49개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서의 응력분포의 변화를 조사하였다. 등방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있으며, 등방성 함유체의 Lamé 상수가 등방성 기지의 Lamé 상수보다 큰 경우를 고려해 보았다. Table 2는 함유체의 체적비에 따라 달라지는 함유체 사이의 거리/함유체의 반지름(d/a)를 나타낸다. 예를 들어, 함유체의 체적비(c)가 0.40인 경

Table 2 Fiber separation distances according to different fiber volume fractions

Fiber volume fraction (c)	Fiber separation distance / Radius of inclusion (d/a)	
	Square array	Hexagonal array
0.20	3.9633	4.2589
0.25	3.5449	3.8093
0.30	3.2360	3.4774
0.35	2.9960	3.2194
0.40	2.8025	3.0115
0.45	2.6422	2.8392
0.50	2.5066	2.6935

Table 3 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) within the isotropic cylindrical inclusion due to uniform remote tensile loading (σ_{xx}^0)

	Normalized tensile stress component inside the isotropic inclusion
Exact	1.3167
VIEM	1.3167 (Average)

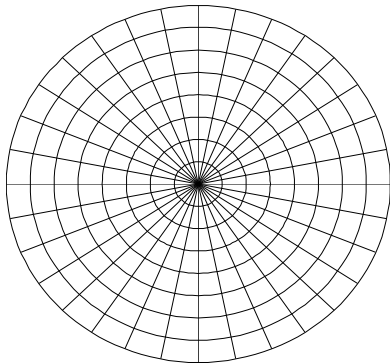


Fig. 3 A typical discretized model in the volume integral equation method

우에, 함유체 사이의 거리(d)는 2.8025a가 된다. 여기서, a는 함유체의 반지름을 나타낸다.

Fig. 3은 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델⁽¹⁷⁾의 예를 나타내며, 함유체 내부를 각각 256개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다.

Table 3은 등방성 기지와 원형 단면을 갖는 실린더 형태의 단일의 등방성 함유체로 이루어진 무한고체가 무한 인장하중을 받을 때 함유체 내부에 발생하는 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)에 대한 체적 적분방정식법의 해와 해석해와의 비교를 나타낸다. 이때, 실린더 형태의 등방성 함유체 내부에서의 인장응력 성분은 일정한 값을 갖게 된다.⁽¹⁸⁻²⁰⁾ 체적 적분방정식법의 해와 해석해가 서로 잘 일치함을 알 수 있다. 다음으로, Fig. 4는 다수의 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델⁽¹⁷⁾의 예를 나타내며, 각각의 함유체 내부를 각각 256개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다. Fig. 5는 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른

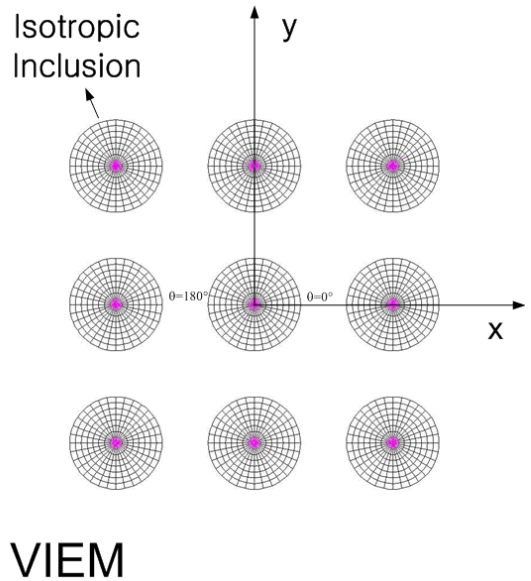


Fig. 4 A typical discretized model in the volume integral equation method

개수의 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).

동일한 함유체의 체적비에 대하여, 등방성 함유체의 개수가 증가하여도 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다.

그러나, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 표준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이 크게 변하는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 중앙에 위치한 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 커지기 때문으로 판단된다.

Fig. 5에 나와 있는 체적 적분방정법을 이용하여 구한 해를 Table 4에 구체적인 수치들로 정리함으로써, 다른 연구자들이 다른 다양한 방법들을 사용하여 구한 해들의 정확도를 검증할 때 벤치마킹(benchmark)할 수 있도록 하였다.

3.3 다수의 등방성 함유체의 배열이 정육각형(hexagon) 형태일 때

다음에는, 다수의 등방성 함유체가 정육각형 형태로 등방성 기지에 포함되어 있는 무한고체가 무한 인장하중을 받는 경우를, 평면 변형률 문제로 가정하여, 고찰해 본다.

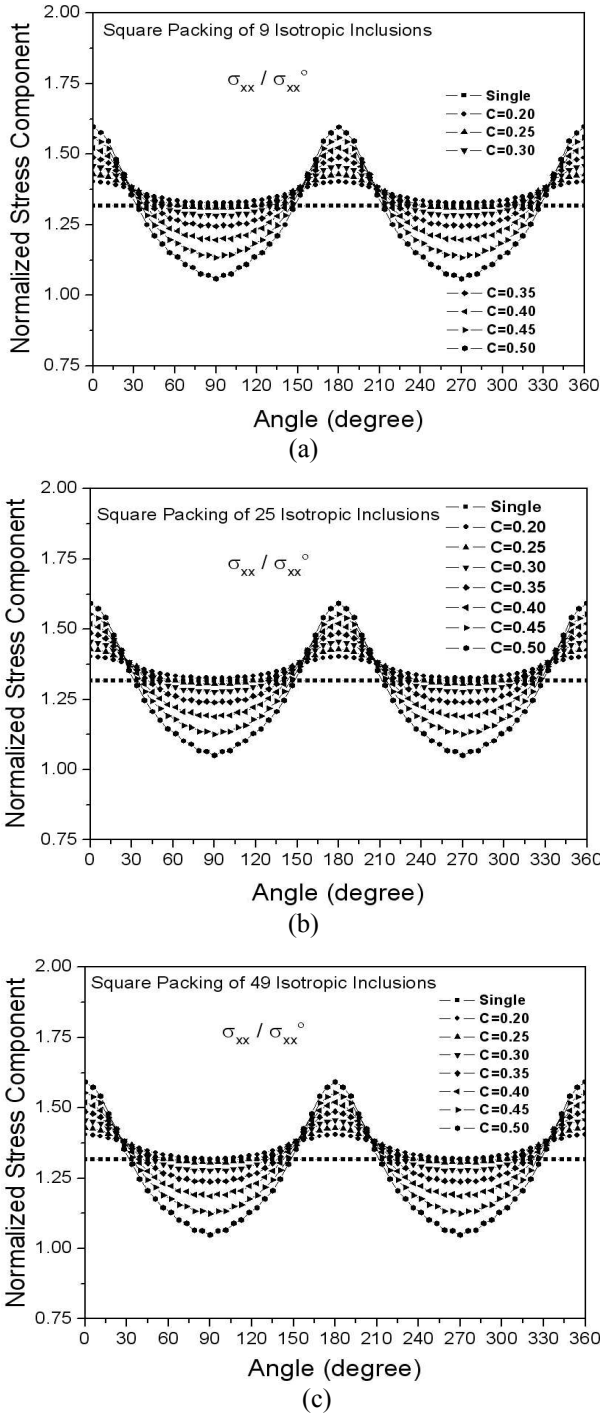


Fig. 5 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

다수의 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 함유체의 체적비(c)가 0.20부터 0.50까지 0.05만큼 씩 증가할 때, 함유체의 개수를 a) 7개, b) 19개, c) 37개로 늘려가면서, 중앙에 위치한 함유체에서

Table 4 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the matrix and the central inclusion for models containing square array of 9, 25 and 49 isotropic inclusions due to uniform remote tensile loading (σ_{xx}^0)

Fiber Volume Fraction (c)	Number of Inclusions	Location		
		$\theta = 0^\circ$	45°	90°
0.20	9	1.40233	1.35022	1.32772
	25	1.40257	1.34957	1.32593
	49	1.40432	1.34839	1.31899
0.25	9	1.42863	1.34297	1.31026
	25	1.42932	1.34065	1.30532
	49	1.42909	1.34050	1.30532
0.30	9	1.45785	1.32846	1.28267
	25	1.45711	1.32627	1.27807
	49	1.45711	1.32627	1.27807
0.35	9	1.48886	1.30757	1.24500
	25	1.48730	1.30450	1.23907
	49	1.48705	1.30393	1.23758
0.40	9	1.52228	1.28038	1.19566
	25	1.51937	1.27668	1.18876
	49	1.51931	1.27609	1.18698
0.45	9	1.55809	1.24793	1.13343
	25	1.55425	1.24386	1.12615
	49	1.55407	1.24339	1.12427
0.50	9	1.59649	1.21090	1.05788
	25	1.59228	1.20699	1.05036
	49	1.59214	1.20643	1.04846

의 응력분포의 변화를 조사하였다. 등방성 함유체와 등방성 기지의 물질 특성치는 Table 1에 나타나 있다. Table 2는 함유체의 체적비에 따라 달라지는 함유체 사이의 거리/함유체의 반지름(d/a)를 나타낸다. 예를 들어, 함유체의 체적비(c)가 0.45인 경우에, 함유체 사이의 거리(d)는 2.8392a가 된다. 여기서, a는 함유체의 반지름을 나타낸다.

Fig. 6은 다수의 함유체의 상호작용을 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법에 사용된 대표적인 분할된 모델⁽¹⁷⁾의 예를 나타내며, 각각의 함유체 내부를 각각 256개의 표준의 8-절점 사각형 및 6-절점 삼각형 유한요소를 사용하여 분할하였다.

Fig. 7은 서로 다른 함유체의 체적비에 대하여, 서로 다른 개수의 함유체가 포함되어 있을 때, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의경계면에서의 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)을 나타낸다($\theta = 0^\circ \sim 360^\circ$).

동일한 함유체의 체적비에 대하여, 등방성 함

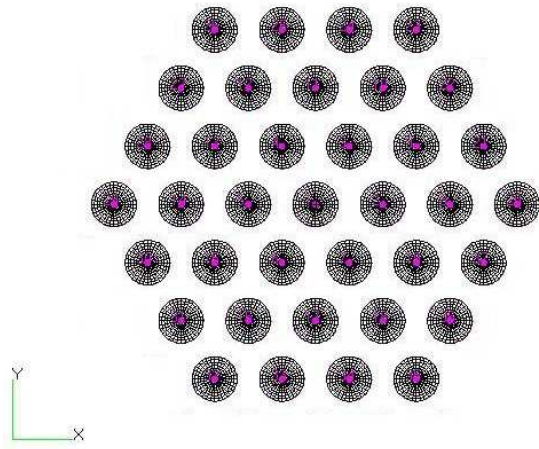


Fig. 6 A typical discretized model in the volume integral equation method for hexagonal inclusion packing array

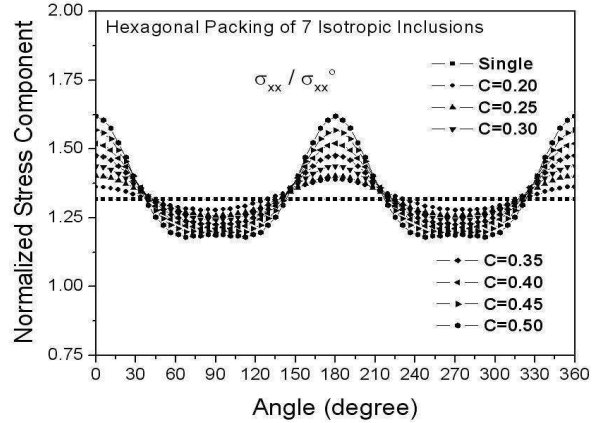
유체의 개수가 증가하여도 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이 크게 변하지 않는 것을 볼 수 있다. 그러나, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 규준화된 인장응력 성분($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$)이 크게 변하는 것을 볼 수 있다. 그 이유는, 함유체의 체적비가 증가함에 따라서, 중앙에 위치한 함유체와 주변에 있는 함유체들 사이의 상호작용이 커지기 때문으로 판단된다.

Fig. 7에 나와 있는 체적 적분방정법을 이용하여 구한 해를 Table 5에 구체적인 수치들로 정리함으로써, 다른 연구자들이 다른 다양한 방법들을 사용하여 구한 해들의 정확도를 검증할 때 벤치마킹(benchmark)할 수 있도록 하였다.

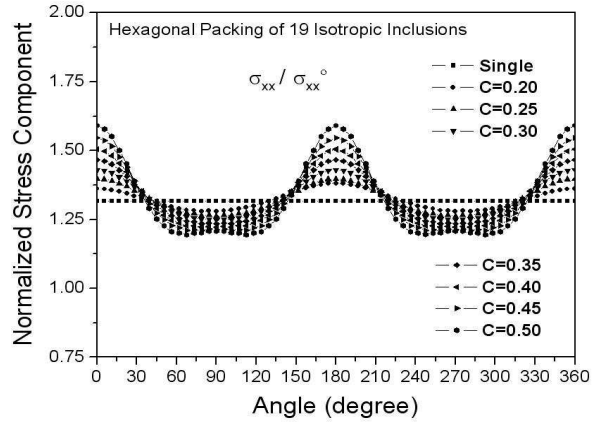
3.4 체적 적분방정식법을 이용한 해의 검증

Table 3에서 단일의 함유체에 대한 체적 적분방정식법을 이용한 해와 해석해가 서로 잘 일치함을 알 수 있었다. 이번에는, 다수의 함유체에 대한 체적 적분방정식법을 이용한 해를 검증하기 위하여, 함유체의 체적비(c)가 0.35이고, 9개의 등방성 함유체의 배열이 정사각형 형태일 때, 체적 적분방정식법을 이용한 해와 ADINA⁽²¹⁾라는 상업용 유한요소법 코드를 이용한 해를 비교해 보기로 한다.

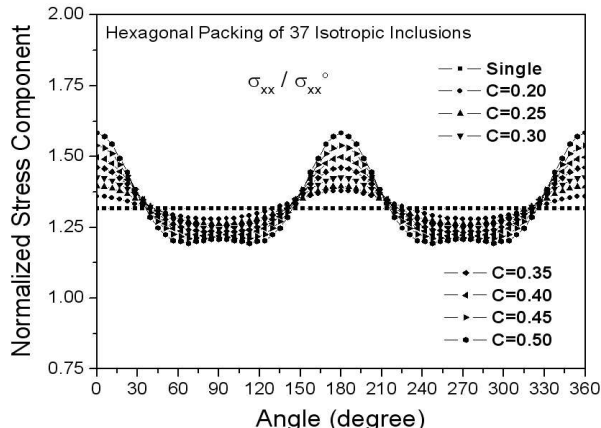
Fig. 8은 ADINA에 사용된 유한요소법 모델을 나타낸다. Fig. 8(a)는 전체 모델을 나타내고, (b)는 9개의 함유체 주위(A로 표시)를 확대한 모델을 나타내며, (c)는 중앙의 함유체 주위(B로 표시)를 확대한 모델을 나타낸다.



(a)



(b)



(c)

Fig. 7 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

Fig. 8에 사용된 4개의 절점을 갖는 사각형 요소의 개수는 121,600이고, 절점의 개수는 129,786이다. 중앙의 함유체와 기지의 경계면에서의 정확한 응력분포를 구하기 위하여, 매우 세밀한

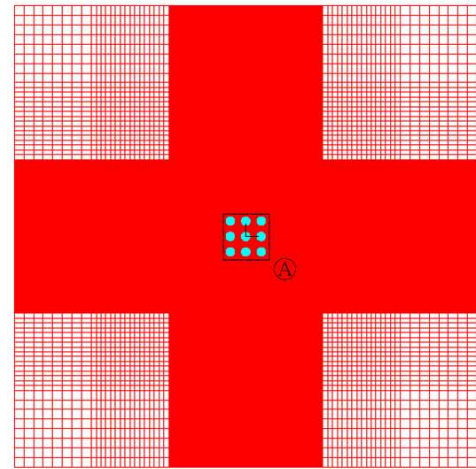
Table 5 Normalized tensile stress component ($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$) at the interface between the matrix and the central inclusion for models containing hexagonal array of 7, 19 and 37 isotropic inclusions due to uniform remote tensile loading (σ_{xx}^0)

Fiber Volume Fraction (c)	Number of Inclusions	Location		
		$\theta = 0^\circ$	45°	90°
0.20	7	1.36143	1.30882	1.27712
	19	1.36136	1.31035	1.27910
	37	1.35940	1.30898	1.27822
0.25	7	1.40244	1.31486	1.25779
	19	1.39795	1.31434	1.26286
	37	1.39515	1.31255	1.26185
0.30	7	1.43708	1.31065	1.24106
	19	1.43025	1.30970	1.24825
	37	1.42637	1.30727	1.24695
0.35	7	1.47617	1.30377	1.22508
	19	1.46676	1.30169	1.23439
	37	1.46174	1.29878	1.23326
0.40	7	1.51940	1.29239	1.21046
	19	1.50447	1.29067	1.22176
	37	1.49855	1.28788	1.22123
0.45	7	1.56787	1.27493	1.19671
	19	1.54662	1.27388	1.21254
	37	1.53997	1.27050	1.21249
0.50	7	1.61821	1.25151	1.18652
	19	1.59138	1.25128	1.20703
	37	1.58401	1.24774	1.20759

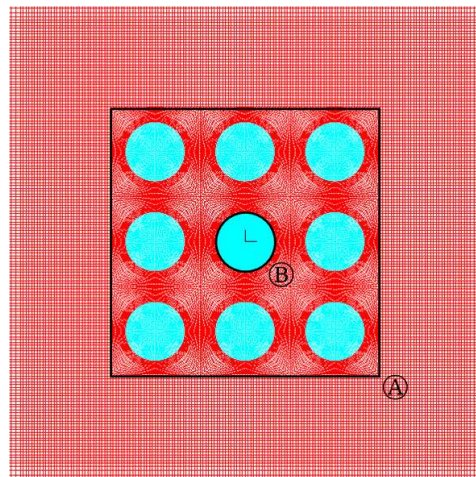
(refined) 유한요소들을 사용하여 요소 분할하였다. 또한, 무한공간을 충분히 고려하기 위하여, 한 변의 길이가 함유체 지름의 약 22.5배가 되는 정사각형이 무한 공간의 경계가 되도록 하였다.

Fig. 4의 체적 적분방정식법 모델과 Fig. 8에 있는 유한요소법 모델을 비교해보면, 체적 적분방정식법에 사용되는 모델이 매우 효율적임을 확인할 수 있다. 그 이유로는 1) 무한 공간을 이루고 있는 기지를 요소 분할할 필요가 없기 때문에 많은 개수의 유한요소를 절약할 수 있고, 2) 특히, 함유체의 체적비(c)가 바뀌어도, 함유체의 위치만 변경하면 되기 때문이다.

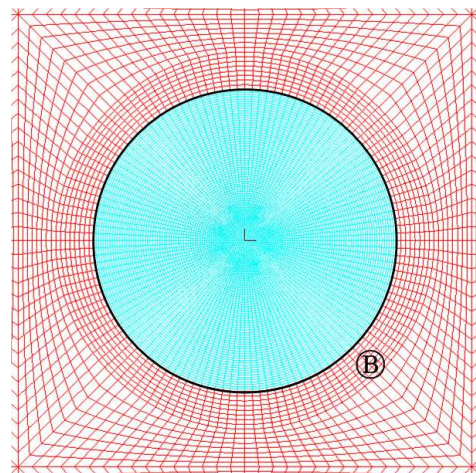
Fig. 9는 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방



(a)



(b)



(c)

Fig. 8 A typical discretized model in the finite element method for square inclusion packing array

성 기지의 경계면에서의 규준화된 인장응력 성분 ($\sigma_{xx} / \sigma_{xx}^0$)에 대한 체적 적분방정식법에 의한 해와 ADINA를 이용한 해와의 비교를 나타낸다($\theta =$

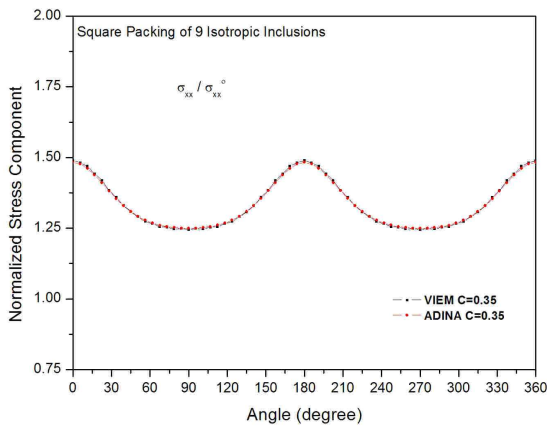


Fig. 9 Comparison of volume integral equation method and ADINA solutions for normalized tensile stress component ($\sigma_{xx}/\sigma_{xx}^0$) at the interface between the central isotropic inclusion and the isotropic matrix under uniform remote tensile loading

$0^\circ \sim 360^\circ$). 체적 적분방정식법에 의한 해와 ADINA를 이용한 해가 서로 잘 일치함을 확인할 수 있다.

여기서 주의할 점은, ADINA를 이용한 해에서, 경계면의 각 절점에서의 응력성분은 각 절점에서의 응력성분이 아니라, 경계면에 접한 매우 세밀한 유한요소들의 각 절점에서의 평균 응력성분임을 밝혀둔다.

4. 결 론

본 논문에서는 등방성 함유체의 배열이 복합재료의 응력에 미치는 영향에 대하여 조사하기 위하여, 체적 적분방정식법이라는 새로운 수치해석 방법을 적용하여, 등방성 무한기지에 다수의 등방성 함유체가 포함된 무한고체가 정적 무한하중을 받을 때 복합재료에 발생하는 응력분포에 관한 해석을 수행하였다.

첫째로, 등방성 기지에 다수의 등방성 함유체가 1) 정사각형 배열 형태, 2) 정육각형 배열 형태로 포함되어 있는 경우에 대하여 고찰해 보았다. 등방성 함유체의 배열이 정사각형 또는 정육각형 형태인 각각의 경우에, 함유체의 체적비가 0.20부터 0.50까지 0.05만큼씩 증가할 때, 중앙에 위치한 등방성 함유체와 등방성 기지의 경계면에서의 인장응력 분포의 변화를 조사하였다.

둘째로, 체적 적분방정식법을 이용한 해의 정

확도를 검증하기 위하여, 체적 적분방정식법을 이용한 해와 ADINA⁽²¹⁾라는 상업용 유한요소법 코드를 이용한 해를 비교해 보았으며, 서로 다른 방법을 이용한 해들이 서로 잘 일치하는 것을 확인하였다. 또한, 체적 적분방정식법을 이용하는 것이 유한요소법을 이용하는 것보다 매우 효율적이라는 것을 확인하였다.

끝으로, 본 논문에서 체적 적분방정법을 이용하여 구한 해를 그림과 표로 정리함으로써, 다른 연구자들이 다른 다양한 방법들을 사용하여 구한 해들의 정확도를 검증할 때 벤치마킹(benchmark) 할 수 있도록 하였다.

후 기

이 논문은 2008학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었습니다. 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Eshelby, J. D., 1957, "The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems," *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, A241, pp. 376~396.
- (2) Hashin, Z., 1972, *Theory of Fiber Reinforced Materials*, NASA CR-1974.
- (3) Achenbach, J. D. and Zhu, H., 1990, "Effect of Interphases on Micro and Macromechanical Behavior of Hexagonal-Array Fiber Composites," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 956~963.
- (4) Christensen, R. M., 1991, *Mechanics of Composite Materials*, Krieger Pub. Co., Florida.
- (5) Nimmer, R. P., Bankert, R. J., Russel, E. S., Smith, G. A. and Wright, P.K., 1991, "Micro-mechanical Modeling of Fiber/Matrix Interface Effects in Transversely Loaded SiC/Ti-6-4 Metal Matrix Composites," *Journal of Composites Technology & Research*, Vol. 13, pp. 3~13.
- (6) Zahl, D. B. and Schmauder, S., 1994, "Transverse Strength of Continuous Fiber Metal Matrix Composites," *Computational Materials Science*, Vol. 3, pp. 293~299.

- (7) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1997 (Mar.), "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Inclusion and Crack Interaction Problems," *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 23~31.
- (8) Lee, J. and Mal, A., 1998, "Characterization of Matrix Damage in Metal Matrix Composites under Transverse Loads," *Computational Mechanics*, Vol. 21, pp. 339~346.
- (9) Naboulsi, S., 2003, "Modeling Transversely Loaded Metal-Matrix Composites," *Journal of Composite Materials*, Vol. 37, pp. 55~72.
- (10) Aghdam, M. M. and Falahatgar, S. R., 2004, "Micromechanical Modeling of Interface Damage of Metal Matrix Composites Subjected to Transverse Loading," *Composite Structures*, Vol. 66, pp. 415~420.
- (11) Lee, J. K., Han, H. D. and Mal, A., 2006, "Effects of Anisotropic Fiber Packing on Stresses in Composites," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, No. 33~36, pp. 4544~4556.
- (12) Ju, J. W. and Ko, Y. F., 2008, "Micromechanical Elastoplastic Damage Modeling for Progressive Interfacial Arc Debonding for Fiber Reinforced Composites," *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 17, pp. 307~356.
- (13) Mal, A. K. and Knopoff, L., 1967, "Elastic Wave Velocities in Two Component Systems," *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, Vol. 3, pp. 376~387.
- (14) Lee, J. K. and Mal, A. K., 1995, "A Volume Integral Equation Technique for Multiple Scattering Problems in Elastodynamics," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 67, pp. 135~159.
- (15) Buryachenko, V. A., 2007, *Micromechanics of Heterogeneous Materials*, Springer, New York.
- (16) Banerjee, P. K., 1993, *The Boundary Element Methods in Engineering*, McGraw-Hill, England.
- (17) PATRAN User's Manual, 1998, Version 7.0, MSC/PATRAN.
- (18) Hwu, C. and Yen, W. J., 1993 (Sep.), "On the Anisotropic Elastic Inclusions in Plane Elastostatics," *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 60, pp. 626~632.
- (19) Lee, J. K., Choi, S. J. and Mal, A., 2001, "Stress Analysis of an Unbounded Elastic Solid with Orthotropic Inclusions and Voids Using a New Integral Equation Technique," *International Journal of Solids And Structures*, Vol. 38 (16), pp. 2789~2802.
- (20) Mal, A. K. and Singh, S. J., 1991, *Deformation of Elastic Solids*, Prentice Hall, New Jersey.
- (21) ADINA User's Manual, 2008, Version 8.5, ADINA R & D, Inc..