

# 마찰재 접촉강성에 따른 디스크 브레이크 진동모드 형상화

강재영\*

공주대학교 기계자동차공학부

## Mode Shape Variation of Disc Brake with Respect to Contact Stiffness Variation

Jaeyoung Kang\*

Division of Mechanical and Automotive Engineering, Kongju National University, Choongnam 330-717, Korea

(Received 27 August 2009 / Accepted 19 November 2009)

**Abstract** : Eigensolutions associated with self-excited vibration of disc brake system can be obtained by complex eigenvalue analysis. The eigenvalue sensitivity to change in contact stiffness can be used to demonstrate stability criteria and eigenvalue veering. Dynamic instability on eigenvalue loci with respect to the variation of contact stiffness is found to be related to mode interaction between two adjacent modes. This modal interaction can be effectively shown by mode shape visualization. This paper presents the methodology to construct the mode shape of disc brake system where a disc and two brake pads are coupled with contact stiffness.

**Key words** : Brake squeal(브레이크 스킨노이즈), Mode shape(모드형상), Mode-veering(모드-비어링), Mode-coupling(모드연성)

### 1. 서론

자동차용 브레이크 스킨(squeal) 문제는 현재 빈번히 발생하고 있는 현상으로 지속적인 관심을 받아왔다. 많은 연구자들이 이를 예측하고 제거하기 위한 해석법에 대한 연구를 수행하여 왔다.<sup>1-3)</sup> Nack<sup>4)</sup>은 유한요소법(FEM)을 기반으로한 복소수해석법(complex eigenvalue analysis)을 사용하여 불안정 모드를 해석하였다. Flint<sup>5)</sup>는 모드연성에 따른 스킨모드를 수학적 모델을 통해 예측하였다.

이러한 모드연성에 의한 불안정성을 보다 근본적으로 해석하기 위해 고유치 민감도 해석(eigenvalue sensitivity analysis)이 수행되었다. Huang<sup>6,7)</sup>은 드럼 브레이크에 대한 해석을 수행하여 모드 연성이 접촉강성에 따른 두 모드의 주파수간격에 크게 영향

을 받음을 제시하였고, 두 연성모드의 모드형상이 부합되면 스킨이 발생할 가능성이 크다고 가정하였다. 최근들어 Kang<sup>8-12)</sup>은 스킨 현상에 대한 매카니즘을 선형 및 비선형 모델을 통해 규명하였다. 브레이크 디스크의 회전속도 및 마찰특성, 물리적 매카니즘 및 비선형 스킨현상 등이 기술되어 있다.

브레이크 시스템은 디스크와 패드간 접촉강성으로 접해 있는 시스템으로써 강성의 변화에 따라 전체 시스템의 진동형상이 변하게 된다. 이를 통해 스킨이 발생하는 주파수에서의 시스템 진동형상, 즉 스킨 형상을 파악하게 된다. 하지만 기존 연구에서는 디스크 브레이크 시스템의 모드형상화에 대한 구체적인 이론전개를 제시하지 않았다.

본 연구에서는 상기 제시된 스킨 현상에 대한 해석결과를 보다 효과적으로 분석할 수 있도록 스킨 진동모드 형상화방법을 이론적으로 제시한다. 스킨

\*Corresponding author, E-mail: jkang@kongju.ac.kr

이 발생하는 주파수의 모드형상을 형상화함으로써 모드연성에 관여하고 있는 진동모드를 판별할 수 있다. 또한 접촉강성에 대한 고유치 민감도 해석(eigenvalue sensitivity analysis)을 수행하여 스켈이 발생하는 두 모드간 임계마찰계수(critical friction coefficient)를 주파수 간격과 관련하여 설명하였다.

## 2. 모델링

### 2.1 디스크브레이크 시스템 운동방정식

마찰에 의한 진동(friction-induced vibration) 모델을 구축하기 위해 디스크와 패드간 발생하는 상대 변위 및 그에 따른 가상일을 유도해야 한다. 빔 진동 이론에 따르면 디스크 접선방향의 변위를 정의하는데 도움이 된다(Fig. 1).

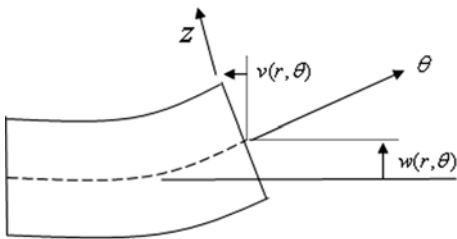


Fig. 1 접촉면에서의 변위

빔의 접촉면 상의 접선방향(θ)의 변위에 의해 발생하는 가상일(virtual work)은 다음과 같다.

$$\delta W_\theta = \mu k_c w(r, \theta) \left\{ -\frac{h}{2} \frac{\delta w_{, \theta}}{r} \right\} \quad (1)$$

여기서  $\mu$ ,  $k_c$ ,  $h$ 는 각각 마찰계수, 면적당 접촉강성, 빔의 두께를 나타낸다. 그에 따른 빔의 접촉면에서 발생하는 마찰력에 의한 총 가상일은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta W_{\theta, total} = \int_A \mu k_c w(r, \theta) \left\{ -\frac{h}{2} \frac{\delta w_{, \theta}}{r} \right\} dA \quad (2)$$

위 식을 디스크 브레이크 유한요소 모델(Fig. 2)에 적용하기 위해 디스크 및 패드의 접촉면의 변위벡터를 접촉면 상에 Fig. 3과 같이 정의한다.

유한요소 모델에서의 접촉모델링을 위해 접촉면 상의 임의의 한 노드(node)에 대해 디스크와 패드간

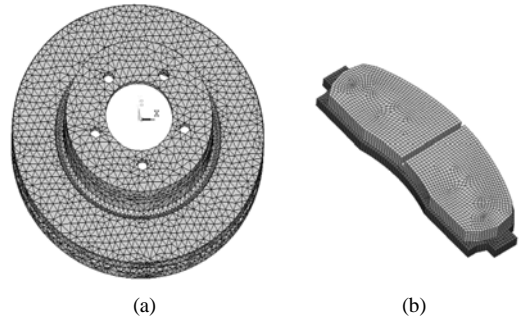


Fig. 2 유한요소 모델 (a)디스크, (b)패드

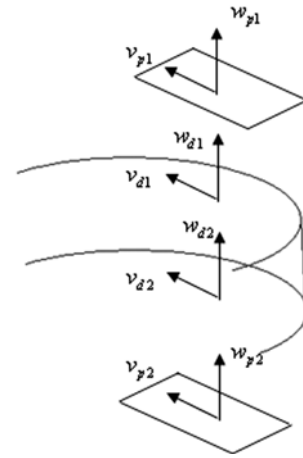


Fig. 3 양 접촉면에서의 디스크 및 패드변위

접촉면상의 접촉힘(contact force)을 정의하면, 첨자 “p”와 “d”를 각각 패드 및 디스크라고 할 때 미소 가상일을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta \Delta W_z^{p1-d1} = -k_c (w_{d1} - w_{p1}) (\delta w_{d1} - \delta w_{p1}) \quad (3)$$

$$\delta \Delta W_z^{d2-p2} = -k_c (w_{p2} - w_{d2}) (\delta w_{p2} - \delta w_{d2}) \quad (4)$$

$$\delta \Delta W_\theta^{p1-d1} = -\mu k_c (w_{p1} - w_{d1}) (\delta v_{p1} - \delta v_{d1}) \quad (5)$$

$$\delta \Delta W_\theta^{d2-p2} = \mu k_c (w_{d2} - w_{p2}) (\delta v_{d2} - \delta v_{p2}) \quad (6)$$

이때 각 접촉노드의 실제 변위를  $N$ 개의 진동모드로 모드전개(modal expansion)하면 모드좌표(modal coordinates)를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^N \Phi_{z,i}(r, \theta) q_i(t) = [\Phi_z] \{q\} \quad (7)$$

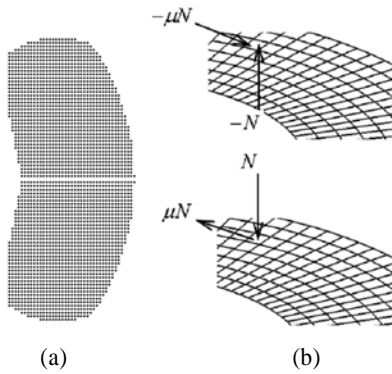


Fig. 4 유한요소 접촉모델, (a) 접촉면 형상(정규화된 노드), (b) 디스크/패드 접촉힘,  $N = k_c(u_{bj} - u_{ij})_{j=1,2}$

$$v(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^N \Phi_{\theta, i}(r, \theta) q_i(t) = [\Phi_\theta] \{q\} \quad (8)$$

여기서  $N$ 은 모드전개에 사용된 진동모드의 갯수이고,  $\{q\}$ 는 모드좌표이다. 또한  $[\Phi_z]$ 와  $[\Phi_\theta]$ 는 각각 노드점에 대한  $z$  및  $\theta$  방향의 노달 매트릭스(nodal matrix)이다. 식 (7)과 식 (8)을 식 (3)-(6)에 대입하여 접촉면 상의 모든 접촉노드(Fig. 4)에 대한 가상일의 합으로 다음과 같이 수식화 할 수 있다.

$$\delta W_{total} = \int_A \delta \left( \Delta W_z^{p1-d1} + \Delta W_z^{l2-r2} + \Delta W_\theta^{p1-d1} + \Delta W_\theta^{l2-r2} \right) dA \quad (9)$$

따라서, 가상모드법(assumed mode method)을 이용하여 디스크 브레이크 시스템의 운동방정식을 라그랑지 방정식(Lagrange equation)으로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] + \frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^N Q_{ij}(q_j) \quad (10)$$

여기서

$$T = \frac{\rho h}{2} \int_V \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dV \quad (11)$$

$$\delta W_{total} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N Q_{ij}(q_j) \delta q_i \quad (12)$$

이때 유한요소 모델의 모드해석(modal analysis) 시 질량에 대한 정규화(normalization)를 통해 다음과 같은  $n \times n$  매트릭스로 운동방정식을 표현할 수 있다.

$$\{\ddot{q}\} + [\omega^2] \{q\} + k_c [A] \{q\} + \mu k_c [B] \{q\} = 0 \quad (13)$$

여기서  $[\omega^2] = \text{diag}(\omega_n^2)$ 으로 디스크와 패드의 단품 고유주파수 매트릭스이고,  $[A]$ 와  $[B]$ 는 각각 접촉강성(contact stiffness) 매트릭스와 마찰연성(friction-coupling) 매트릭스가 된다.<sup>8-10)</sup> 이때  $[A]$ 는 대칭으로 접촉강성에 의한 브레이크 시스템의 고유주파수 변화를 나타내고,  $[B]$ 는 비대칭으로 브레이크 시스템의 동적 불안정성(dynamic instability)에 직접적인 영향을 미친다.

## 2.2 브레이크 시스템 모드형상 수식화

브레이크 디스크와 패드가 접촉한 상태에서의 모드형상을 형상화하기 위해 마찰이 없는 접촉상태(statically coupled system)를 다음과 같이 고려한다.

$$\{\ddot{q}\} + [\omega^2] \{q\} + k_c [A] \{q\} = 0 \quad (14)$$

위 시스템의 해를 하모닉 함수로 가정하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{q(t)\} = e^{i\lambda t} \{u\} \quad (15)$$

$$(-\lambda^2 [I] + [\omega^2] + k_c [A]) \{u\} = \{0\} \quad (16)$$

따라서 식 (14)의 최종해는 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\begin{aligned} \{q(t)\} &= c_1 e^{i\lambda_1 t} \{u_1\} + c_2 e^{i\lambda_2 t} \{u_2\} + \dots + c_N e^{i\lambda_N t} \{u_N\} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1N} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & \dots & u_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\lambda_N t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{Bmatrix} \\ &\equiv [u][A][C] \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $[u]$ 는 모달 매트릭스(modal matrix)이고  $[A]$ 와  $[C]$ 는 각각 고유치 매트릭스(eigenvalue diagonal matrix) 및 임의의 개수 매트릭스이다. 위 식 (17)을 식 (7)에 대입하면 접촉강성으로 연성이 되어 있는 브레이크 시스템의 진동형상을 표현하는 수직 방향의 변위함수를 표현하게 된다. 즉,

$$w(r, \theta, t) = [\Phi_z] [u] [A] [C] \quad (18)$$

이때  $[A][C]$ 는 초기조건(initial condition)에 따

른 시간함수를 나타내고,  $[\Phi_z][u]$ 는 브레이크 시스템의 강성 연성(stiffness coupled)에 따른 시스템 진동 모드형상을 나타내므로 이를 모드형상 매트릭스라고 정의한다.

$$[\Psi] = [\Phi_z][u] \tag{19}$$

### 3. 해석 및 결과

ANSYS를 통해 Table 1과 2에 나와 있는 시스템 파라미터를 이용하여 모달해석을 수행하였다. 이때 구한 노달매트릭스를 운동방정식(13)에 대입하여 고유치(eigenvalue) 해석을 수행하였다. 이때 고유치는 복소수해로 나오며, 이러한 복소수해 중에서 실수부가 양이면 시스템이 불안정(instability)해지며, 이때 스كيل이 발생한다고 가정한다. Fig. 5는 마찰계수( $\mu$ )가 0에서 0.5까지 변할 때 복소수해를 추적하여 실수부를 한 평면에 표시한 그림이다. 여기서 12000Hz까지 세 개의 대표적인 불안정 모드(unstable mode)가 발생함을 알 수가 있다. 하지만 이러한 불안정 모드를 판별하는데 그치지 않고, 이들의 동적 특성을 자세히 분석할 필요가 있다. 이를 위해서 접촉강성을 파라미터로 취하고 접촉강성의 변화에 따른 불안정 모드의 특성변화를 살펴보기로 한다.

우선 Fig. 5에서 나타난 세 개의 불안정 모드에 대해  $\mu$ 와  $k_c$ 의 변화에 따른 고유치 민감도 해석(eigenvalue sensitivity analysis)를 수행하였다. Fig. 6 (a), (b), (c)는 각각 7000Hz대역, 9000Hz대역, 11000Hz대역에서의 복소수해의 동적 특성을 나타낸다. 특

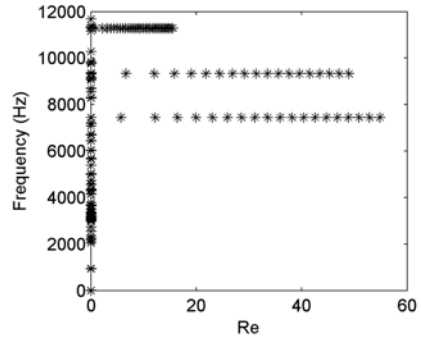
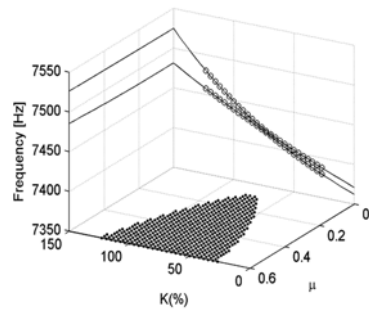
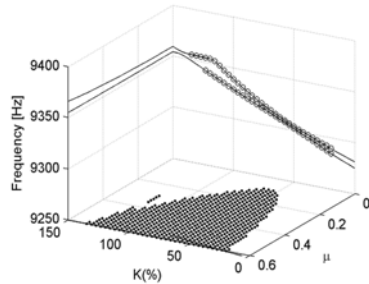


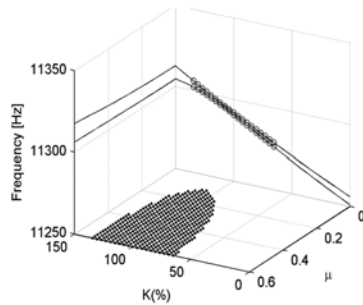
Fig. 5 기준 접촉강성( $k_c = k_{n1}$ ) 및  $\mu = 0 \sim 0.5$ 일 때의 실수부 대 주파수



(a)



(b)



(c)

Fig. 6 불안정 모드에 대한 복소수해 추적 (a) 7000Hz 대역 (b) 9000Hz 대역 (c) 11000Hz 대역, 검정영역 및 물방울 표시가 불안정영역임,  $K(\%) = k_c/k_{n1} \times 100(\%)$

Table 1 브레이크 디스크 파라미터

Parameter	Value
Young's modulus	88.9 GPa
Density	7150 kg/m <sup>3</sup>
Poisson ratio	0.285

Table 2 브레이크 패드 파라미터

Parameter	Value
Young's modulus	207 GPa
Density	7820 kg/m <sup>3</sup>
Poisson ratio	0.29
contact stiffness ( $k_{n1}$ , nominal $k_c$ )	$0.35 \times 10^{11} \text{ N/m}^3$

히  $k_c$ 대 주파수(Hz) 평면에서 두 불안정 모드의 궤적을 살펴보면 서로 나란히 쫓아가면서 근접하다가 떨어지는 현상을 보게 된다. 이를 모드 비어링(mode-veering)이라고 한다. 이러한 두 모드간 주파수가 모드 비어링(mode-veering)을 하면서 최소 근접거리가 되는 접촉강성 시점에 스킵이 발생할 수 있는 최소 마찰계수가 됨을 알 수 있다. 이를 임계마찰계수(critical friction coefficient)라고 한다. 즉, 두 모드간 발생하는 불안정성은 모드연성(mode-coupling)에 기인한 것이므로,  $k_c$ 가 변하면서 생기는 모드 비어링(mode-veering)에 따라 시스템 모드형상의 변화를 추적해 볼 필요가 있다.

브레이크 시스템의 진동모드형상을 구현하기 위해 식 (18)을 이용하여 변위함수를 구하고, 이를 원형좌표(polar coordinates)에 맵핑(mapping)해주면 시스템 모드가 형상화된다. 이를 통해 Fig. 7에서 보듯이 7000Hz대역에서 발생하는 불안정성은 노달선(nodal line)이 3개인 디스크 쌍모드(double mode)간 모드연성에 의해 발생함을 알 수 있다. 또한 두 모드간 모드 비어링(mode-veering)이 특정 접촉강성에서 강하게 발생함을 알 수 있다. 마찬가지로 Fig. 8에 의하면 노달선이 4개인 디스크 쌍모드간 연성에 의해 불안정성이 나타난다. Fig. 9에서는 노달선이 5개인 디스크모드와 디스크 복합형 모드간 연성에 의해 불안정성이 발생한다. 특히 모드 비어링(mode-veering) 하면서 모드형상은 서로 교환되어 진행됨을 알 수 있다. 따라서, 브레이크 시스템의 스킵모드의 형상은 접촉강성이 변함에 따라 변할 수 있음을 주의하여야 한다.

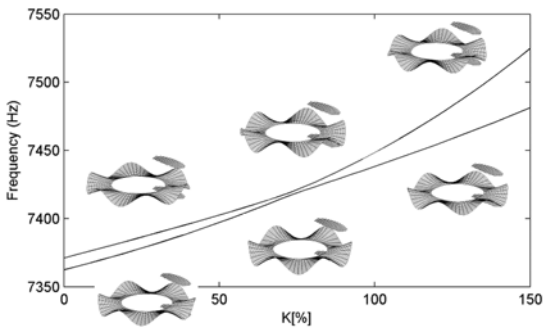


Fig. 7 접촉강성 변화에 따른 모드형상 변화, 7000Hz 대역 불안정 모드

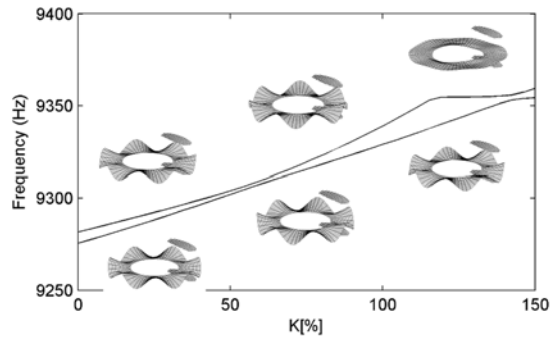


Fig. 8 접촉강성 변화에 따른 모드형상 변화, 9000Hz 대역 불안정 모드

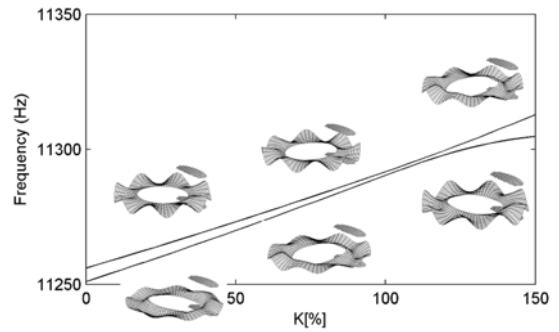


Fig. 9 접촉강성 변화에 따른 모드형상 변화, 11000Hz 대역 불안정 모드

#### 4. 결론

유한요소 모델 기반의 이론적 모델을 통해 디스크 브레이크의 불안정성 특성을 살펴보았다. 특히 시스템 파라미터에 대한 고유치 민감도 해석(eigenvalue sensitivity analysis)이 가능하도록 운동방정식을 유도하였고, 모드형상을 형상화 할 수 있도록 모드 형상 방정식을 제시하였다. 이를 바탕으로 다음과 같은 결론을 낼 수 있다.

첫째, 불안정한 브레이크 스킵모드는 두 모드간 연성에 의해 발생되고, 이는 접촉강성 변화에 따른 모드 비어링(mode-veering)으로 특성화할 수 있다.

둘째, 모드 비어링(mode-veering) 하는 두 모드간 불안정성은 두 주파수가 가장 가까울 때 최대가 된다. 마지막으로 불안정성을 나타내는 두 모드의 진동형상을 형상화하여 이를 확인할 수 있다.

본 연구에서는 확인된 불안정 모드에 대한 설계 개선 방향은 제외하였다. 하지만 향후 연구에서는

불안정 모드형상을 바탕으로 한 설계 개선 파라미터를 확인하고 불안정성을 효과적으로 제거할 수 있는 방법론을 지속적으로 연구해 나갈 예정이다.

### References

- 1) N. M. Kinkaid, O. M. O'Reilly and P. Papadopoulos, "Automotive Disc Brake Squeal," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.267, pp.105-166, 2003.
- 2) H. Ouyang, W. Nack, Y. Yuan and F. Chen, "Numerical Analysis of Automotive Disc Brake Squeal: A Review," *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, Vol.1, pp.207-231, 2005.
- 3) J. H. Lim, S. J. Cho, Y. S. Choi, S. J. Choi and G. J. Choi, "Brake Squeal Noise due to Disk Run-out," *Transactions of KSAE*, Vol.13, No.3, pp.41-47, 2005.
- 4) W. Nack, "Brake Squeal Analysis by Finite Elements," *International Journal of Vehicle Design*, Vol.23, pp.263-275, 2000.
- 5) J. Flint and J. Hulten, "Lining-deformation-induced Modal Coupling as Squeal Generator in a Distributed Parameter Disc Brake Model," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.254, pp.1-21, 2002.
- 6) J. Huang, C. M. Krousgrill and A. Bajaj, "Modeling of Automotive Drum Brake for Squeal and Parameter Sensitivity Analysis," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.289, pp.245-263, 2006.
- 7) J. Huang, C. M. Krousgrill and A. Bajaj, "An Effective Approach to Estimate Critical Value of Friction Coefficient in Brake Squeal Analysis," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.74, pp.534-541, 2007.
- 8) J. Kang, C. M. Krousgrill and F. Sadeghi, "Dynamic Instability of a Thin Circular Plate with Friction Interface and Its Application to Disc Brake Squeal," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.316, pp.164-179, 2008.
- 9) J. Kang, C. M. Krousgrill and F. Sadeghi, "Analytical Formulation of Mode-coupling Instability in Disc-pad Coupled System," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 51, pp.52-63, 2009.
- 10) J. Kang, C. M. Krousgrill and F. Sadeghi, "Comprehensive Stability Analysis of Disc Brake Vibrations Including Gyroscopic, Negative Friction Slope and Mode-coupling Mechanisms," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.324, pp.387-407, 2009.
- 11) J. Kang, C. M. Krousgrill and F. Sadeghi, "Wave Pattern Motion and Stick-slip Limit Cycle Oscillation of a Disc Brake," *Journal of Sound and Vibration*, Vol.325, pp.552-564, 2009.
- 12) J. Kang, "Squeal Analysis of Gyroscopic Disc Brake System Based on Finite Element Method," *International Journal of Mechanical Science*, Vol.51, pp.284-294, 2009.