

적합직교분해를 이용한 2차원 실린더 후류 유동장 분석 및 재구성

Analysis and Reconstruction of the 2-D Cylinder Wake Flow Using POD

이 희 남* 김 기 희**
Huinam Rhee Gi Hee Kim

Abstract

Proper Orthogonal Decomposition (POD) is applied to the analysis of 2-dimensional cylinder wake flow. Time histories of flow variables were obtained by the incompressible CFD analysis. By using the method of snapshots the correlation matrix was constructed, and then eigenvalues, POD modes and time coefficients were calculated. Finally the flow field was reconstructed by using a few of the lower POD modes, and compared to the original ones.

Keywords : POD, Proper Orthogonal Decomposition(적합직교분해), Method of Snapshot(스냅샷 방법), CFD(전산유체역학), Eigenvalue(고유치), Mode(고유모드), Reconstruction(재구성)

1. 서론

적합직교분해(POD : Proper Orthogonal Decomposition)는 방대한 양의 난류 유동 측정 데이터 및 전산유체 해석 결과 데이터, 각종설비들의 실시간 진동 진단 데이터 등 수많은 데이터들로 표현되는 고차 현상(high dimensional process)으로부터 핵심적인 역할을 하는 모드들을 파악하여 저차(low dimensional process)로 변환하여 지배적인 물리 현상을 파악하기 위한 유용한 방법이며, Principal Component Analysis, Karhunen-Loève Decomposition, 또는 Single Value Decomposition 등으

로 알려져 있다^[1,2].

Lumley 등^[2]이 난류의 연구에 도입한 후 난류의 고유구조를 분석하기 위한 효과적인 방법으로 인정되었고, 이 방법을 이용하여 복잡한 거동의 유동해석을 위해 적합직교분해를 이용한 많은 연구들이 수행되었다. 한편, 이 방법은 패턴인식 등 화상처리 분야에도 적용이 되었으며^[3] 데이터압축, 해양학 등에서도 활용된다. 토목공학 분야에서는, 장대구조물의 구조건전성 모니터링시 고유진동모드를 파악하기 위하여, 구조물에 가해지는 하중 정보를 구하기 어려우므로 구조물의 진동응답신호만을 이용하여 적합직교분해 방법을 이용하여 구조물의 동특성 변화를 분석하고자 하는 연구가 활발히 진행되고 있는 것으로 파악된다^[4].

본 연구에서는 2차원 실린더 후류 유동장 데이터를 비압축성 전산유체해석을 통하여 구한 후 POD 기법을 적용하여 유동장을 분석하고자 한다. POD 해석을

† 2009년 10월 21일 접수~2010년 1월 8일 게재승인

* 순천대학교 기계우주항공공학부

** 순천대학교 대학원

책임저자 : 이희남(hnrhee@sunchon.ac.kr)

위해서는 직접법에 비해서 보다 간편하게 해석할 수 있는 Sirovich^[1,2]가 제안한 스냅샷방법을 이용하여 고유치, POD 모드 및 시간계수를 구하고 그것들의 물리적 의미를 검토하고자 하며, 몇 개의 주요 저차모드들을 이용하여 유동장을 재구성하여 수 많은 모드들 중에서 단지 몇 개의 주요 저차 모드들이 유동의 거시적 특성을 결정한다는 사실을 확인해보고자 한다.

2. 본 론

가. 적합직교분해

적합직교분해는 다양한 분야의 실험이나 자연현상의 측정을 통해 구한 데이터를 이용하여 물리적 의미를 지닌 모드를 파악하기 위해 필요한 기저함수를 계산할 수 있는 방법을 제공한다. 일반적으로 이러한 데이터들은 시간 및 공간에 따라 매우 복잡하게 변화하는 거동을 보이며 원 데이터를 적절히 가공하지 않은 상태에서는 그 물리적 의미를 파악하기 어렵다.

본 연구에서는 적합직교분해를 위해서 Sirovich^[1,2]가 제안한 스냅샷방법을 사용하였으며, 그 개요는 다음과 같다. 우선, 시공간 함수인 유동장 벡터

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t) = \vec{v}(X, t) \quad (2.1)$$

를 이용하여 2점 공간 상관을 다음과 같이 구성한다.

$$K(X, X') = \langle \vec{v}(X, t) \vec{v}(X', t) \rangle \quad (2.2)$$

식 (2.2)에서 벡터곱은 다이애딕을 의미한다. 괄호기호는 앙상블평균이지만 에르고딕이라 가정하고 시간 평균을 사용하기로 한다.

유동장 벡터는 다음과 같이 경계조건 및 연속방정식 등의 조건들을 만족하는 모드 함수 ψ_n 들의 선형결합으로 표현가능하다.

$$\vec{v} = \sum_n a_n(t) \psi_n(X) \quad (2.3)$$

여기서,

$$\langle a_k a_l \rangle = \lambda_k \delta_{kl} \quad (2.4)$$

모드들은 서로 비상관(직교)이며, 각각의 모드들은

고유구조(coherent structure)를 의미한다고 할 수 있다.

어떤 특정시간에 측정된 유동장을 $\vec{v}^{(n)}$ 이라 하면,

$$\vec{v}^{(n)} = \vec{v}(X, n\tau) \quad (2.5)$$

이며, 여기서 τ 는 측정치로부터 데이터를 추출하는 시간 간격이고 서로 다른 n 값에 대해 유동장 벡터가 서로 비상관이 되도록 충분히 큰 값이다. 식 (2.5)에서의 $\vec{v}^{(n)}$ 은 순간사진 즉, 스냅샷 또는 스트로보의 개념이라 할 수 있다. 에르고딕이라는 가정하에서 2점 상관 (2.2)는 다음과 같이 된다.

$$K(X, X') = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \vec{v}^{(n)}(X) \vec{v}^{(n)}(X') \quad (2.6)$$

다음에, 유한하고 충분한 크기의 M 까지의 합으로 근사화 하면,

$$K(X, X') = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \vec{v}^{(n)}(X) \vec{v}^{(n)}(X') \quad (2.7)$$

식 (2.7)의 커널 K 는 유한항으로 근사화 되었으므로 퇴화된 상황이며 따라서 다음과 같은 고유함수들을 가진다.

$$\psi = \sum_{k=1}^M A_k \vec{v}^{(k)} \quad (2.8)$$

식 (2.6)과 (2.7) 및 다음 (2.9) 식과 같은 고유치식으로부터

$$\int K(X, X') V(X') dX' = \lambda V(X) \quad (2.9)$$

다음과 같은 고유치 문제가 구해진다.

$$CA = \lambda A \quad (2.10)$$

여기서,

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_M) \quad (2.11)$$

$$C_{mn} = \frac{1}{M} (\vec{v}^{(m)}, \vec{v}^{(n)}) \quad (2.12)$$

식 (2.10)의 고유치 문제의 크기는 $M \times M$ 이며, M 의 물리적인 의미는 서로 독립적인 스냅샷의 개수이다. 식 (2.10)을 풀어서 구한 고유치와 고유함수를 이용하여 식 (2.3)에서의 시간계수 $a(t)$ 를 구할 수 있다.

나. 2차원 실린더 후류 유동장에서의 적용

Fig. 1은 2차원 실린더 후류 유동장의 해석 결과이며 수평방향 속도 분포를 보여주고 있다. 해석도구는 상용 CFD 해석코드 SC/Tetra^[5]를 사용하였다. 해석조건은 incompressible air, Re=67,000, 적분 시간 간격은 0.001sec, turbulence model은 MP $k-\epsilon$ 을 사용하였다.

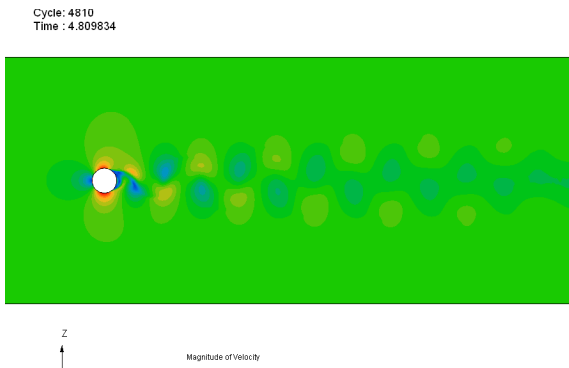


Fig. 1. 실린더 후류 유동해석(유속 분포)

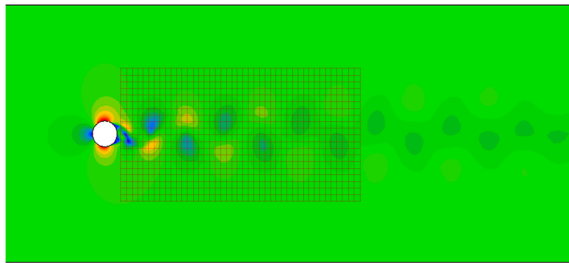


Fig. 2. POD를 위한 데이터 취득 공간위치

Fig. 2에서 보여주는 총 약 1,000개의 공간 위치에서의 유속 데이터를 추출하여 적합직교분해를 수행하였다. Fig. 3은 계산된 고유치 값을 보여주고 있다. 고유치는 각 모드의 에너지를 의미하며 Fig. 3으로 부터 알 수 있는 것은 Fig. 1의 유속정보를 구성하는 많은 모드들 중에서 첫 번째 및 두 번째 모드가 가장 많은 영향력을 차지하고 있다는 것이다. POD 모드 형상은 Fig. 4와 같으며 첫 번째 및 두 번째 모드는 전체적인

유동장과 유사한 모습을 가지고 있다는 것을 알 수 있고 3번째 이상의 모드들의 영향은 미미하다는 것을 파악할 수 있다. Fig. 5는 각 모드들에 해당하는 시간계수들이며, 첫 번째와 두 번째 모드들의 크기가 세 번째 모드 이상의 모드들에 비해 최소 5배 이상 커서 기여도가 매우 크다는 것을 재확인 할 수 있다.

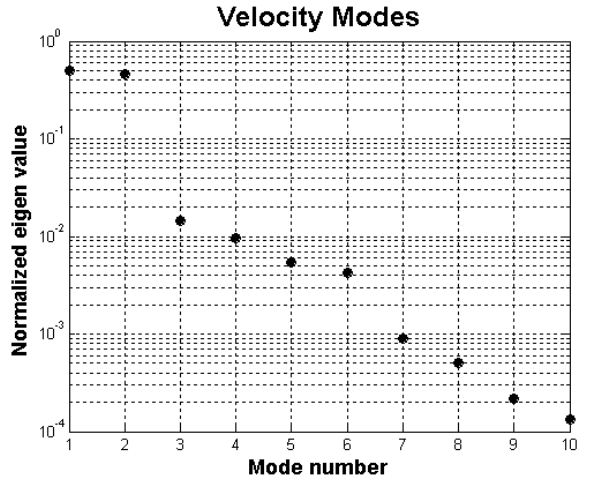


Fig. 3. Eigenvalues(유속)

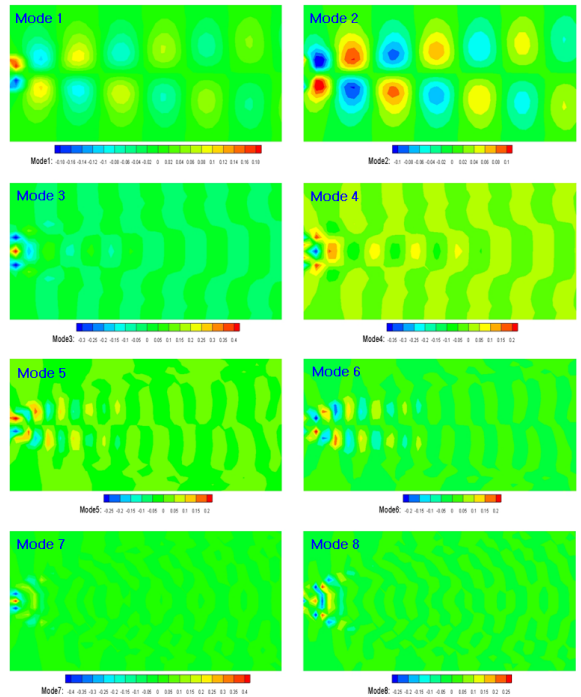


Fig. 4. 유속 POD 모드

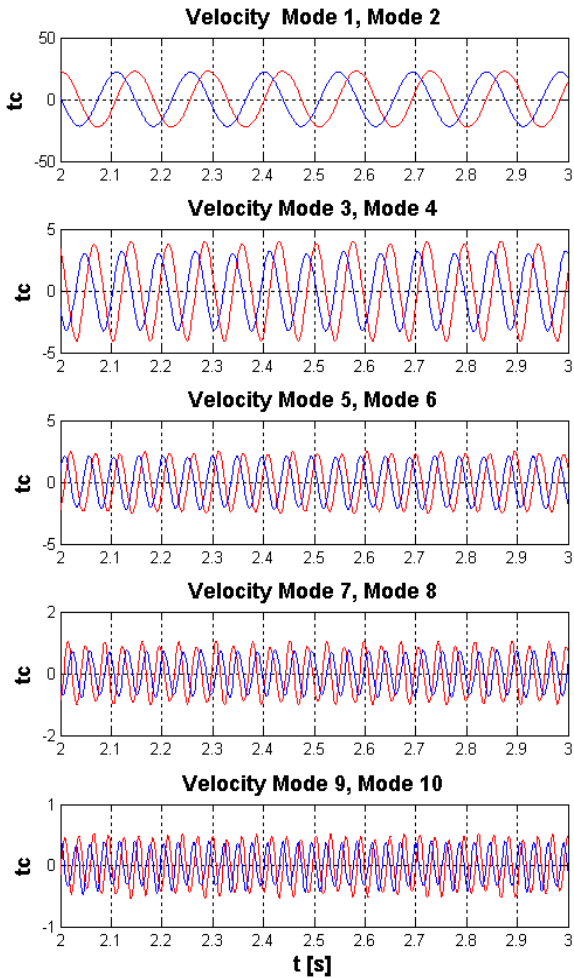


Fig. 5. 유속 POD 모드의 시간계수

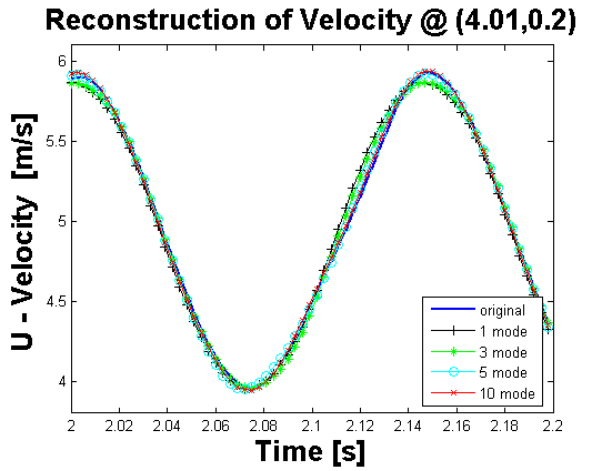
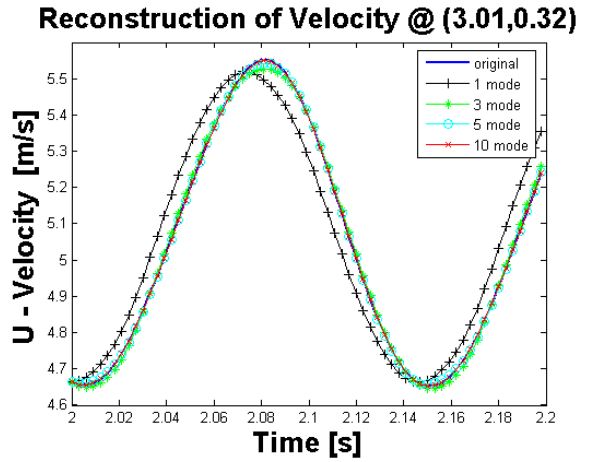
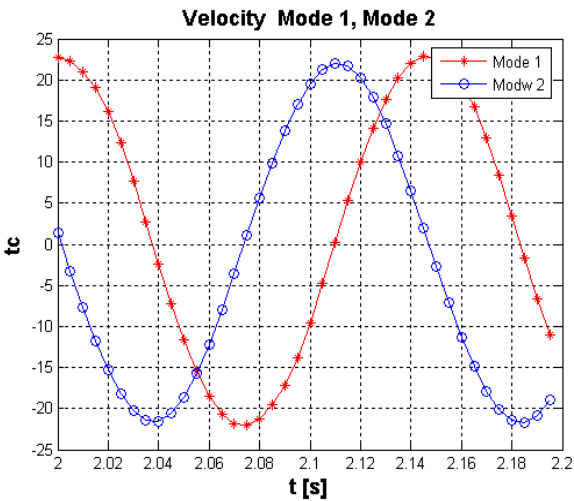


Fig. 6. 유속의 재구성

Fig. 5에서 볼 수 있는 바와 같이 첫 번째 및 두 번째 모드의 시간계수의 주기 또는 주파수는 거의 유사하며, 둘 사이의 위상차를 분석해 보면 한 주기의 약 1/4에 해당하여 두 모드들이 서로 교대로 주기적으로 속도장을 지배한다는 것을 확인할 수 있다. 시간계수들의 주파수는 고차모드로 갈수록 일반적으로 높아지며 진폭이 작아져서 영향이 미미해진다.

또한, 이렇게 구한 POD 모드 정보를 이용하여 원래의 유동장을 재구성(reconstruction) 할 수 있다. Fig. 6은 공간상의 두 위치에서의 유속 시간 이력을 식 (2.3)을 이용하여 재구성 한 결과를 원래의 CFD 해석 데이터와 비교하고 있다. 고유치, 즉, 에너지가 큰 저차의 몇 개 모드만을 선형결합한 것이 원래의 유동장을 잘 근사화 한다는 것을 확인할 수 있다. 따라서 복

잡한 유동장을 몇 개의 모드만으로 저차원으로 모델링이 가능하다는 것을 알 수 있다.

또한, 같은 방법으로 압력장 데이터를 이용하여 POD를 수행하였다. Fig. 7은 특정 시간에서의 전체적인 압력 분포 스냅샷이며 Fig. 8은 각 모드들의 고유치이다. 속도와는 달리 압력의 경우에는 저차 4개의 모드의 에너지가 상당히 크다는 것을 알 수 있다. Fig. 9의 시간계수를 관찰해보면 4차모드까지의 크기가 그 이상의 모드에 비해 최소 5배이상 커서 지배적이라는 것을 재확인 할 수 있으며, 1,2차와 3,4차 모드간의 위상차이로 압력 변동장을 형성하는 특징을 파악할 수 있다.

Fig. 10은 주요 저차 모드들의 형상을 보여주며, Fig. 11은 저차의 모드들만을 합하여 압력장을 재구성한 후 원래 데이터와 비교한 그림이다. 대체적으로 원래의 압력장을 근사화하려면 에너지가 큰 4차 이상의 모드까지 고려할 필요가 있는 것을 확인 할 수 있다.

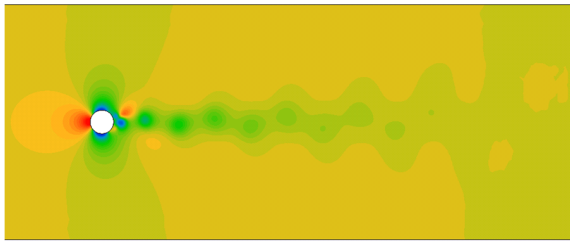


Fig. 7. 실린더 후류 유동해석(압력 분포)

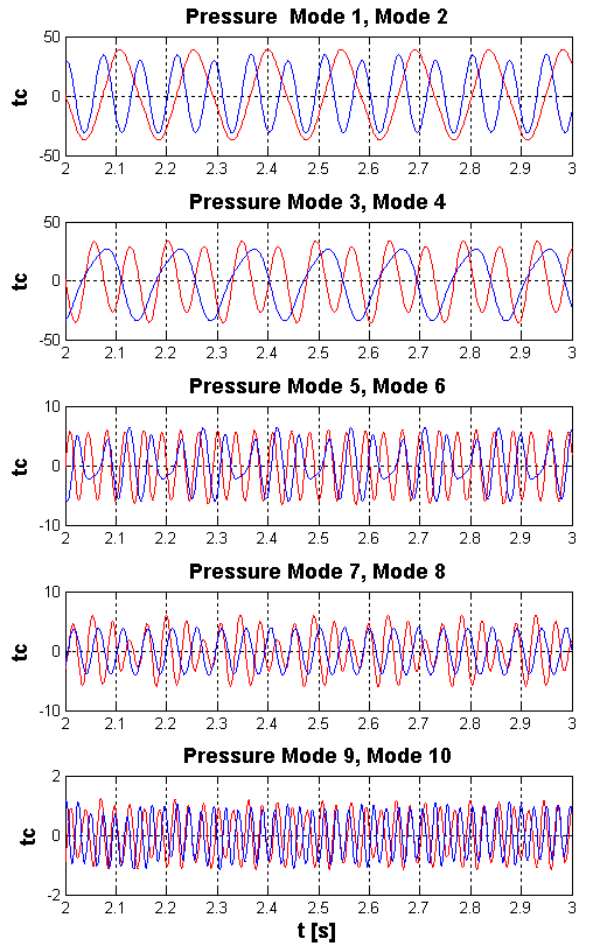


Fig. 9. 시간계수(압력)

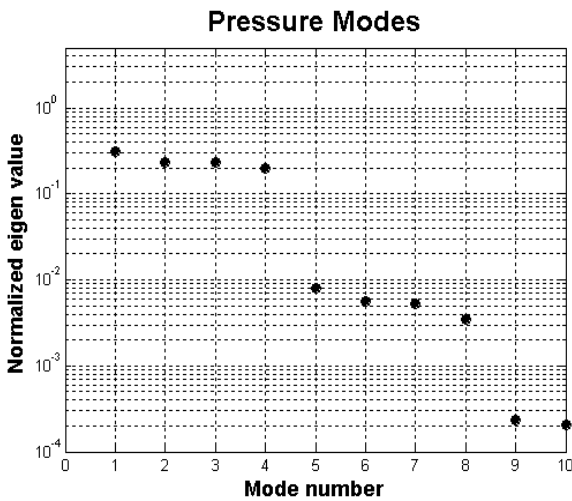
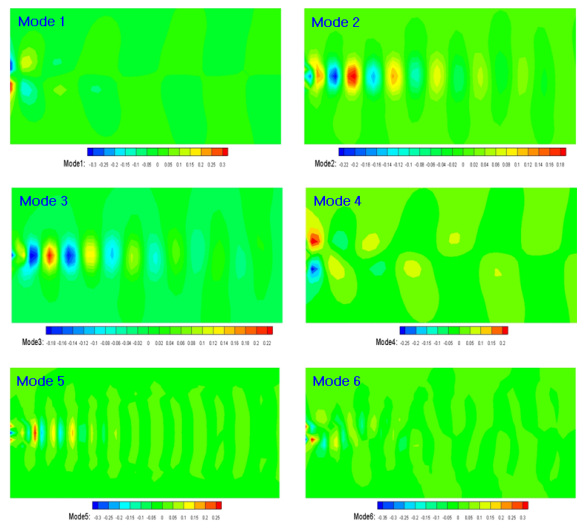


Fig. 8. Eigenvalues(압력)



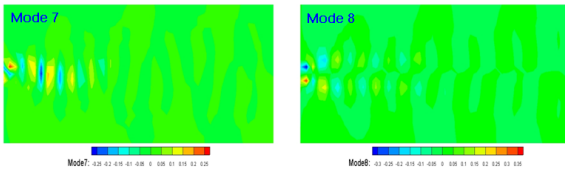
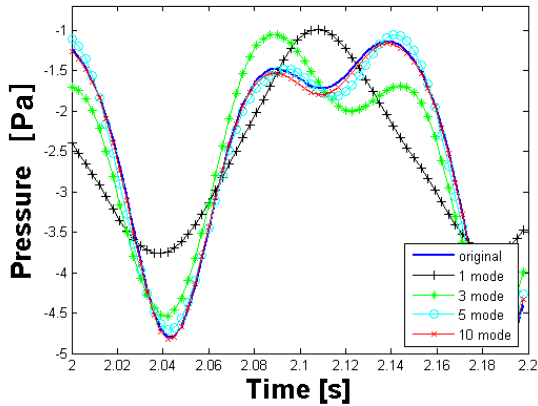


Fig. 10. 압력 POD 모드

Reconstruction of Pressure @ (3.51,0.12)



Reconstruction of Pressure @ (3.51,0.32)

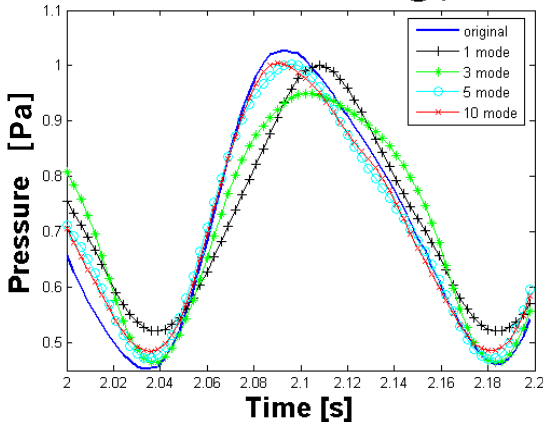


Fig. 11. 압력의 재구성

3. 결론

적합직교분해(proper orthogonal decomposition) 방법을 2차원 실린더 후류 유동장 CFD 해석 데이터(압력 및 속도)에 적용하여 고유치, POD 모드 형상, 시간계수들을 계산하고 물리적 의미들을 분석하였으며, 저차모드들의 선형결합을 통해 압력 및 속도장을 재구성하여 원래의 유동장과 비교하여 잘 수렴함을 확인하였다. 이를 통해 고차원의 유동장을 저차모드로 모델링 할 수 있음을 확인하였다. POD는 복잡한 유동장의 본질을 좀 더 잘 이해할 수 있는 통찰력을 제공한다.

본 연구에서 수행한 방법은 보다 복잡한 3차원 유동장, 난류 유동장 해석 및 구조 진동, 유동유발진동 해석, 패턴 인식 등 매우 다양한 분야에 응용가능하다.

후 기

본 연구는 지식경제부의 지원에 의하여 기초전력연구원(과제관리번호 2009T100100644) 주관으로 수행된 과제이며 이에 감사드립니다. 또한, CFD 전산코드 SC/TETRA를 지원하여 주신 (주)세딕에 감사드립니다.

References

- [1] L. Sirovich., "Turbulence and The Dynamics of Coherent Structures PART I : Coherent Structures", Quarterly of Applied Mathematics, Vol. XLV, No. 3, pp. 561~571, 1987.
- [2] R. Holmes, J. Lumley, C. Buckwalter, "Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry", Cambridge University Press, 1999.
- [3] L. Sirovich and M. Kirby, "Low-dimensional Procedure for Characterization of Human Faces", J. Opt. Soc., Vol. 4, No. 3, pp. 519~524, 1987.
- [4] 함희정, 김대곤, "POD 기법을 이용한 철골뼈대구조의 모드인자 파악", 대한건축학회논문집 구조계 제23권 제9호, pp. 23~30, 2007.
- [5] CFD code SC/TETRA user's manual, <http://www.cedic.biz>