입출력 변수에 부가 잡음이 있는 FIR형 시스템 인식을 위한 견실한 추정법에 관한 연구

Error in Variable FIR Typed System Identification Using Combining Total Least Mean Squares Estimation with Least Mean Squares Estimation

임 준 석*
(Jun-Seok Lim*)

*세종대학교 전자공학과
(접수일자: 2009년 12월 14일; 채택일자: 2010년 2월 6일)

일반적으로 시스템 인식 방법은 입출력에 잡음이 없거나, 출력에만 잡음이 있는 경우를 주 대상으로 한다. 본 논문은 입력 및 출력이 모두 잡음으로 오염되었을 뿐만 아니라 입력에 비해서 출력에 같거나 더 많은 양의 잡음이 개입된 환경에 노출된 Finite Impulse Response 형태의 시스템을 인식하는 새로운 방법을 제안한다. 이를 위해서 입출력의 잡음 수준이 같을 때 최적인 완전최소자승 기법과 출력에만 잡음이 있을 때 최적인 최소자승 기법을 서로 볼록 결합 (convex combination) 하여 앞에서 언급한 것과 같은 좀 더 일반화된 잡음 환경에서도 향상된 결과가 나오도록 하였다. 또 제안한 방법이 다양한 잡음 환경에서 응용 가능함을 모의 실험을 통해서 확인하였다.
핵심용어: 잡음 변수를 갖는 FIR 시스템 인식, TLS, LMS
투고분야: 음향 통신기술 분야 (6)

FIR type system identification with noisy input and output data can be solved by a total least squares (TLS) estimation. However, the performance of the TLS estimation is very sensitive to the ratio between the variances of the input and output noises. In this paper, we propose an iterative convex combination algorithm between TLS and least squares (LS). This combined algorithm shows robustness against the noise variance ratio. Consequently, the practical workability of the TLS method with noisy data has been significantly broadened.
Keywords: Noisy FIR System Identification, Total Least Squares, Least Squares, Convex Combination
ASK subject classification: Acoustic Communication (6)

I. 서 론

일반적으로 시스템 인식 방법은 입력과 출력에 잡음이 없거나, 출력에만 잡음이 있는 경우를 주 대상으로 한다. 가장 많이 사용하는 LS (Least Squares)를 바탕으로 하는 인식 방법은 출력만 잡음에 오염된 경우에 적합한 방법이다. 또 입력과 출력이 모두 잡음에 오염된 경우는 TLS (Total Least Squares)를 바탕으로 하는 인식 방법을 사용하여 좋은 결과를 얻고 있다. 그러나 좀 더 정확히 말하면, TLS방법은 입력과 출력에 개입된 잡음의 분산량이 같을 경우에 최적인 방법이고, 이 분산량에 차이가 생기면 결과의 정확도가 열화 된다. 실제 시스템 인식의 경우 출력 신호에 입력 신호보다 더 많은 잡음이 개입되는 경우가 많다. 따라서 이런 경우 TLS를 사용하면 기대하는 좋은 성능을 얻지 못한다 [1][2].

본 논문 입력 신호 및 출력 신호가 모두 잡음으로 오염된 환경에서 FIR (Finite Impulse Response) 형태의 시스템을 인식하는 새로운 방법을 제안한다. 특히 출력 신호에 부가된 잡음의 수준이 입력 신호에 부가된 잡음의 수준에 비해서 같거나 더 많은 경우에 적용 가능한 방법을 제안한다. 이와 비슷한 환경을 가정한 시스템 인식 방법으로, Zheng은 일반화된 TLS를 사용하여 미리 가정된 입력과 출력간 잡음의 분산비를 서로 달리하는 두 경우에

책임저자: 임 준 석 (jslim@sejong.ac.kr)
142-747 서울시 광진구 군자동 98 세종대학교 전자공학과
(전화: 02-3408-3299; 팩스: 02-3408-3329)

대해서 시스템 변수를 추정하고 그 결과를 산술 평균하는 방법을 제안하였다 [3]. 그러나 이 방법은 설정된 구간을 미리 정하기 쉽지 않다.

본 논문에서는 좀 더 일반적인 환경에서 적용을 할 수 있도록 출력에만 잡음이 부가되는 경우, 즉 입력과 출력의 잡음 분산비가 '무한대'인 경우에 사용하기 좋은 LS방법과 입력 신호와 출력 신호에 모두 같은 수준의 분산량을 갖는 잡음이 부가되었을 경우, 즉 입력과 출력의 잡음 분산비가 '1'인 경우에 적합한 TLS방법을 결합하는 방법을 사용한다 [1][2]. 본 논문에서는 제차적인 형식의 알고리즘을 만들기 위해서 제차적인 TLS의 해를 구하는 방법의 하나인 TLMS와제차적인 LS의 해결법이라고 할 수 있는 LMS를 결합하는 방법을 제안한다 [4-7]. 또 제안한 방법이 다양한 잡음 환경에서 응용 가능함을 모의 실험을 통해서 확인한다.

II. Total Least Squares와 Least Squares 방법간 Convex Combination

2.1. 제차 Least Squares 방법과 재차 Total Least Squares 방법

어떤 미지의 FIR 시스템 인식에서, 입력과 출력에 잡음이 부가된 경우는 그림 1과 같이 모델링 할 수 있다.

미지의 시스템은 식 (1)과 같은 계수들로 이뤄진 FIR 시스템을 가정한다.

$$\mathbf{h}=[h_0,h_1,\cdots,h_{N-1}]^H\in C^{N\times 1} \tag{1}$$

여기서 h는 시불변인 것으로 가정한다. 그리고 그림 1의 미지 시스템의 출력은 다음과 같이 모델링 할 수 있다.

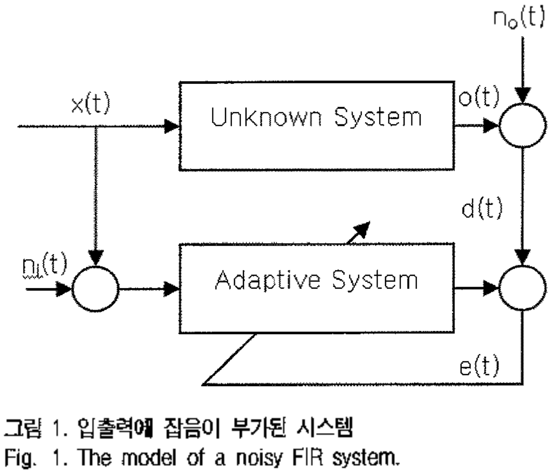

그림 1. 입출력에 잡음이 부가된 시스템
Fig. 1. The model of a noisy FIR system.

$$d(n)=\mathrm{x}^H(n)\mathrm{h}+n_{0(n)} \tag{2}$$

여기서 출력 잡음은 평균이 '0'이고, 분산이 σ_o^2인 정규분포이며, 입력 신호와 서로 독립이다. x(n)은 잡음 없는 입력 신호 벡터이고, 다음과 같은 형식이다.

$$\mathbf{x}(n)=[x(n),x(n-1),\cdots x(n-N+1)]^T \tag{3}$$

그림 1과 같은 입력과 출력에 모두 잡음이 있는 경우 일반적으로 맞는 비용함수는 다음 식과 같다 [1][2].

$$J_{GTLS}(t)=\frac{e_{GTLS}^2(t)}{\gamma+\tilde{\mathbf{w}}_{GTLS}^T(t)\tilde{\mathbf{w}}_{GTLS}(t)} \tag{4}$$

여기서 $e_{GLS}(k)=d(k)-\mathrm{w}_{GLS}^T(k)\tilde{\mathrm{x}}(k)$, $\mathrm{w}_{GTLS}(k)=\tilde{\mathrm{w}}_{GTLS(1:N)}(k)/(-\tilde{\mathrm{w}}_{GTLS(N+1)}(k))$ 그리고 $\gamma=\frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}$ 이다. 따라서 TLS를 위한 비용함수는 $\gamma=1$일 때 이고, 출력에만 잡음이 부가되는 LS를 위한 비용함수는 $\gamma=\infty$인 경우라고 할 수 있다. TLS를 위한 제차 형식의 알고리즘은 여러 연구자들에 위해서 연구되었다. Feng이 제안한 TLMS는 전형적인 방법들 중 하나라고 할 수 있다 [4]. LS를 위한 간단한 제차 형식의 방법은 특별히 연구되지 않았으나, Cichoki에 위해서 구해진 식 (4)의 제차 형식 해인 다음 식을 살펴보면, 알 수 있다.

$$e_{TLS}(k)=d(k)-\mathbf{w}_{TLS}^T(k)\mathbf{x}(k) \tag{5.a}$$

$$\mathbf{w}_{TLS}(k+1)=\mathbf{w}_{TLS}(k)+\mu_{TLMS}e_{TLS}(k)[\mathbf{x}(k)-\tilde{e}(k)\mathbf{w}_{TLS}(k)] \tag{5.b}$$

여기서 $\tilde{e}(k)=\frac{e_{TLS}^2(t)}{\gamma+\mathrm{w}_{TLS}^T(t)\mathrm{w}_{TLS}(t)}$ 위 식에서 $\gamma\to\infty$로 접근시키면, $\tilde{e}(k)=\frac{e_{TLS}^2(t)}{\gamma+\mathrm{w}_{TLS}^T(t)w_{TLS}(t)}$가 '0'으로 수렴하고, 위 제차식은 Widrow가 Least Mean Squares 문제를 위해 구한 제차식인 LMS알고리즘과 같아진다 [5]. 따라서 Widrow의 LMS 알고리즘이 원래 출발은 Least Squares의 제차 형식 해를 위한 것이 아니었으나, 위의 기술로부터 LS를 위한 제차식으로 쓸 수 있음을 알 수 있다.

이제 LS방법으로 미지의 시스템을 추정하기 위해 식 (5)로부터 유도한 Widow의 LMS와 같은 제차식 접근법을 사용한다면. 추정 출력과 실제 출력간의 오차는 다음과 같다.

$$e_{LS}(k)=d(k)-\mathbf{w}_{LS}^T(k)\mathbf{x}(k)=d(k)-y_{LS}(k) \quad (6)$$

위 식의 해는 다음 비용함수를 최소화함으로써 얻는다.

$$\min E\{e_{LS}^2(k)\} \quad (7)$$

위 비용함수를 최소화하기 위해, 비용함수의 최소점을 향하는 구배를 구할 때 평균 구배를 구하지 않고, 매 단위 입력마다 구한다면, 그 제차 식의 형태는 다음과 같다.

$$y_{LMS}(k)=\mathbf{w}_{LMS}^T(k)\mathbf{x}(k) \quad (8.a)$$

$$\mathbf{w}_{LMS}(k+1)=\mathbf{w}_{LMS}(k)+\mu_{LMS}(d(k)-y_{LMS}(k))\mathbf{x}(k) \quad (8.b)$$

또 입력에 잡음이 부가된 경우는 아래와 같이 입력 신호를 모델링할 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{x}}(n)=\mathbf{x}(n)+\mathbf{n}_i(n)\in C^{N\times 1} \quad (9)$$

이 때 만약 $\gamma=\frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}=1$ 이라면, TLS 방법을 사용하여 시스템의 최적의 해를 구할 수 있다 [1][2]. Feng은 TLS를 제차적 방법으로 구하는 식 (8)과 유사한 형식의 알고리즘을 제안하였다 [4]. 그 방법을 TLMS (total least mean squares)라고 한다 [4]. 이 알고리즘은 아래와 같은 비용함수를 제차적인 방법으로 최소함을 통해서 구하였다.

$$\min\ E\{\tilde{\mathrm{w}}^T\overline{R}\,\tilde{\mathrm{w}}\},\ \|\tilde{\mathbf{w}}\|_2=\alpha \quad \text{그리고}$$
$$\mathbf{w}_{TLS}=\tilde{\mathbf{w}}(1:N)/(-\tilde{\mathbf{w}}(N+1)) \quad (10)$$

여기서 $\overline{\mathbf{x}}(n)=[\tilde{\mathbf{x}}^T(k),d(k)]^T\in C^{N+1\times 1}$ 이고 $\overline{R}=E\{\overline{\mathrm{x}}(k)\overline{\mathrm{x}}^T(k)\}$이다. TLMS 알고리즘은 다음과 같은 정리할 수 있다.

$$y_{TLMS}(k)=\mathbf{w}_{TLMS}^T(k)\mathbf{x}(k) \quad (11.a)$$

$$\tilde{\mathbf{w}}(k+1)=\tilde{\mathbf{w}}(k)+\mu_{TLMS}(\tilde{\mathbf{w}}(k)-\|\tilde{\mathbf{w}}(k)\|_2^2 y_{TLMS}(k)\overline{\mathbf{x}}(k)) \quad (11.b)$$

$$\mathbf{w}_{TLMS}(k+1)=\tilde{\mathbf{w}}_{(1:N)}(k+1)/(-\tilde{\mathbf{w}}_{(N+1)}(k+1)) \quad (11.c)$$

TLS 방법은 앞에서 언급한 것 같이 입력과 출력 신호에 잡음이 부가된 경우에 최적의 결과를 주는 것으로 알려졌지만, 좀 더 엄격하게 말하면, 입력 잡음 분산량과 출력 잡음 분산량의 비가 1인 경우, 즉 $\gamma=\frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}=1$ 인 경우에 최적이다 [1][2]. 이 조건을 벗어나면 그 성능이 열화된다. 여기서 σ_i^2는 입력 잡음의 분산량이다.

2.2. Least Squares 방법과 Total Least Squares 방법의 Convex Combination

그림 1과 같은 입력과 출력에 모두 잡음이 있는 경우 일반적으로 입력은 측정 장비 관련 잡음 경우가 많고 출력의 경우는 측정 장비 관련 잡음과 주변 환경에서 오는 잡음이 동시에 부가되어 출력 잡음의 분산량이 더 큰 경우가 많다. 그러나 양이 얼마인지 알 수가 없는 경우도 일반적이다. 즉, 입력 잡음 분산량과 출력 잡음 분산량의 비, $\gamma=\frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}$ 가 불확정적인 경우가 일반적이다. Zheng은 TLS의 이런 단점을 반회하는 한 방법으로 식 (12)과 같은 일반화된 TLS의 비용함수에서, 두 서로 다른 분산량 비, $\gamma=\frac{\sigma_o^2}{\sigma_i^2}$ 값에 대해서 일반화된 TLS의 해 들을 각각 얻어 이 들의 평균을 구하는 방법을 제안하였다 [3].

$$J_{GTLS}(t)=\frac{e_{GTLS}^2(t)}{\gamma+\tilde{\mathbf{w}}_{GTLS}^T(t)\tilde{\mathbf{w}}_{GTLS}(t)} \quad (12)$$

여기서 $e_{GLS}(k)=d(k)-\mathbf{w}_{GLS}^T(k)\tilde{\mathbf{x}}(k)$, $\mathbf{w}_{GTLS}(k)=\tilde{\mathbf{w}}_{GTLS(1:N)}(k)/(-\tilde{\mathbf{w}}_{GTLS(N+1)}(k))$. 그러나 이 방법도 여전히 γ의 경계값을 미리 정해야 한다. 본 논문에서는 이런 경계값을 미리 정하지 않아도 되는 방법을 제안하고자 한다. 이를 위해서 $\gamma=1$인 경우의 해와 $\gamma=\infty$ 경우의 해를 기본으로 하고 추정 오차를 바탕으로 서로의 해를 적당히 혼합하는 방법을 제안한다. 이 방법은 Garcia 등이 LMS의 스텝 사이즈에 대한 불확정성을 해소하기 위해서 두 개의 서로 다른 스텝사이즈를 사용하는 두 LMS의 결과를 추정 오차를 바탕으로 혼합하는 방법을 기본으로

한다 [6].

본 논문에서 제안하는 방법이 $\gamma=1$에서 최적인 TLS와 $\gamma\approx\infty$에서 최적인 LMS을 각각 혼합하여 $1\le\gamma<\infty$인 일반적인 경우에 적용함으로써 잡음 분산량의 비에 대한 적용 범위를 넓힐 수 있으리라 기대한다.

제안하는 방법의 핵심인 TLS의 결과와 LMS의 결과를 결합하는 것은 다음과 같다.

$$\mathbf{w}_{comb}(k)=v(k)\mathbf{w}_{TLMS}(k)+(1-v(k))\mathbf{w}_{LMS}(k) \quad (13)$$

여기서 결합 계수 $v(k)$는 $1/(1+e^{-a(k)})$인 함수를 사용하여 0에서 1사이의 값을 갖는다. 위와 같은 결합을 사용하여 출력을 추정할 경우 얻는 결합 추정 오차는 식(14)와 같다.

$$e_{comb}(k)=v(k)e_{TLMS}(k)+(1-v(k))e_{LMS}(k) \quad (14)$$

여기서 $e_{TLMS}(k)=d(k)-\mathbf{w}^T_{TLMS}(k)\mathbf{x}(k)=d(k)-y_{TLMS}(k)$ 이고, $e_{LMS}(k)=d(k)-\mathbf{w}^T_{LMS}(k)\mathbf{x}(k)=d(k)-y_{LMS}(k)$ 이다. 식 (13)의 결합계수는 $a(k)$값에 의해서 조절된다. 따라서 이 계수를 식 (14)의 결합 오차가 최소가 되는 방향으로 조절되도록 한다면 식 (13)의 결합을 통해서 항상 된 정확도의 결과를 예상 할 수 있다. 아래 식은 $a(k)$의 갱신식을 기술하였다.

$$\begin{aligned}a(k+1)&=a(k)-\frac{\mu_a}{2}\frac{\partial e^2_{comb}(k)}{\partial a(k)}\\&=a(k)+\mu e_{comb}(k)(y_{TLMS}(k)-y_{LS}(k))v(k)(1-v(k))\end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $\dfrac{\partial e^2_{comb}(k)}{\partial a(k)}=2e_{comb}\dfrac{\partial v(k)}{\partial a(k)}(e_{TLMS}(k)-e_{LS}(k))$ 이고 $e_{TLMS}(k)-e_{LS}(k)=y_{LS}(k)-y_{TLMS}(k)$ 이다.

III. 모의 실험 및 결과

본 절에서는 앞 절에서 제안한 새로운 알고리즘의 성능을 모의 실험을 통해서 검증하려고 한다. 이를 위해서 Feng이 TLMS의 성능을 검증 할 때와 같은모의 실험 환경을 사용하였다. 즉, 목표 FIR 시스템은 다음과 같은 계수를 갖도록 하고,

$$\mathrm{h}=[-0.3,\ -0.9,\ 0.8, -0.7,\ 0.6]^T \quad (16)$$

참 입력 신호도 평균이 '0'이고 분산이 '1'인 정규 분포를 갖는 불규칙 신호를 사용하였다. 또 추정한 결과의 성능 검증용 인덱스로써 다음의 시스템 인식 오차를 사용하였다.

$$\rho=10\log_{10}\frac{\left|\mathbf{h}_{true}-\mathbf{h}_{estim}\right|^2}{\left|\mathbf{h}_{true}\right|^2} \quad (17)$$

본 알고리즘이 넓은 범위의 잡음비, $\gamma=\dfrac{\sigma^2_{out}}{\sigma^2_{in}}$, 하에서 사용 가능함을 보이기 위해서 $\gamma=[1,2,\cdots 19,20]$인 잡음비 범위를 설정하였다. $\gamma=1$인 환경을 만들기 위해서 입력 부가 잡음의 분산을 $\sigma^2_{in}=0.1$이고 출력 부가 잡음의 분산을 $\sigma^2_{out}=0.1$로 설정하였다. 그 후에 $\gamma>1$인 경우는 입력 부가 잡음의 분산값을 고정하고 출력 부가 잡음의 분사값을 늘려나가도록 하였다. 이로써 TLS 방법이 최적의 해를 제공하는 $\gamma=1$인 환경으로부터 점점 LMS가 최적의 해를 내는 $\gamma=\infty$ 쪽으로 옮아가도록 하였다. 단 $\gamma=[1,2,\cdots 19,20]$의 범위는 완벽하게 LS에 맞는 환경까지는 도달하지 않고, TLS와 LMS의 중간에 위치하는 환경을 만들어 TLS를 적용할 때 만나기 쉬운 환경을 상정하였다.

알고리즘의 성능을 비교 검증하기 위해서 전형적인 TLS와 전형적인 LMS의 결과들과 서로 비교하였다 [4][5]. 뿐만 아니라, 앞 절에서 예를 들은 Zheng의 평균 TLS 방법을 변형하여 전형적인 TLS와 전형적인 LMS의 결과를 서로 평균을 내어 그를 추정치로 사용하는 방법도 같이 비교하였다 [3]. 다음 그림 2는 $\gamma=[1,2,\cdots 19,20]$에서 각 알고리즘에 의해서 얻은 시스템 인식 오차를 서로 비교하도록 만든 결과이다. 본 결과를 보면 $\gamma=1$에서는 제안한 알고리즘이 전형적인 TLS에 가까운 결과를 내었다. 그리고 $\gamma<16$ 경우는 함께 비교하는 다른 방법에 비해서 우수한 결과를 내었다.그러나 이 범위를 벗어나면 LMS의 결과보다 열화 되는 것을 볼 수 있다. 그러나 이 경우도 LMS의 제외한 다른 두 방법에 비해서 우수한 결과를 제공하고 있다. 따라서 제안한 방법이 입력과 출력에 잡음이 부가되는 경우라는 것만으로 전형적인 TLS를 적용하는 것 보다는 보다 넓은 적용 범위를 제공할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 그림 3은 $\gamma=1$일 때와 $\gamma=20$일 때의 결합 계수의 추이를 보였다. 그림 3의 (a)

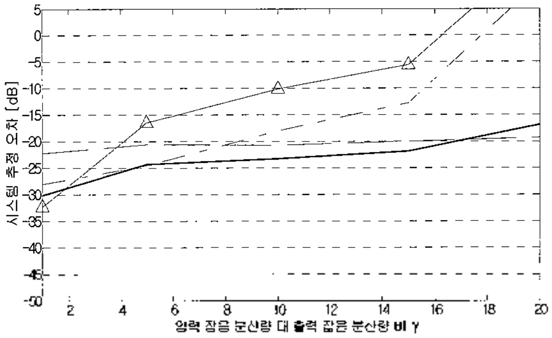

그림 2. 시스템 인식 오차를 사용한 추정 성능 비교 (실선: 제안한 알고리즘, 파선: LMS의 경우, 일점쇄선: Zheng의 평균법을 적용한 경우, 실선과 삼각형: TLMS방법의 경우)

Fig. 2. The estimation error against the ratio between input and output noise variances (solid line: the proposed method, dashed line: LMS, dash and dotted line: Zheng' s method [3], solid line with triangles: TLMS [6])

는 $\gamma=1$일 때의 결합 계수인데, 그림에서 알 수 있듯이 결합 계수가 1에 가깝게 수렴하여 TLS에 더 가중치를 두는 모습을 볼 수 있고, 그림 3의 (b)는 $\gamma=20$일 때의 결합 계수인데, 그림에서 알 수 있듯이 결합 계수가 0에 가깝게 수렴하여 LS에 더 가중치를 두는 모습을 볼 수 있다.

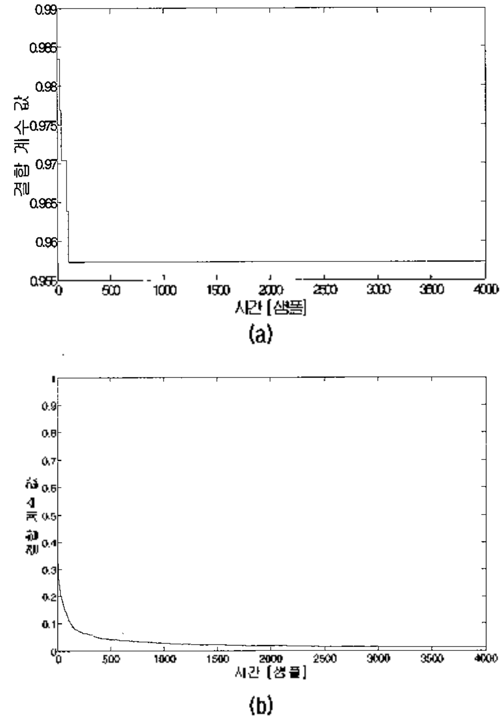

그림 3. 결합 계수 비교: (a) $\gamma=1$일 때, (b) $\gamma=20$일 때

Fig. 3. Combination Coefficient Comparison: (a) When $\gamma=1$, (b) When $\gamma=20$

IV. 결론

본 논문에서 입력과 출력에 잡음이 부가되는 환경에서 FIR 타입의 시스템을 인식하는 좀 더 견실한 방법을 제안하였다. 본 방법을 입력과 출력의 부가잡음비가 전형적인 TLS를 적용하기 부적당한 경우에도 상당히 넓은 범위에 걸쳐 우수한 정확도의 시스템 인식 결과를 제공하였다.

참 고 문 헌

1. A. Cichocki and S. Amari, *Adaptive blind signal and image processing : learning algorithms and applications*, Wiley, pp. 68-79, 2002.
2. C. E. Davila, "An efficient recursive total least squares alogrithm for FIR adaptive filtering", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 2, pp. 268 - 280, Feb., 1994.
3. W. X. Zheng, "On Noisy FIR Filtering via Total Least Squares Estimation", *Proceedings of ISCAS '04*, vol 3, pp. III23 - III26, 2004.
4. D. Z. Feng, Z. Bao and L. C. Jiao, "Total least mean squares algorithm", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 46, no. 8, pp. 2122 - 2130, 1998.
5. S. Haykin, *Adaptive Filter Theory, 4th ed.* Prentice Hall, pp.440, 1996.
6. J. Arenas-Garcia, V. Gomez-Verdejo, and A. R. Figueiras-Vidal, "New algorithms for improved adaptive convex combination of LMS transversal filters", *IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement*, vol.54, no. 6, pp. 2239 - 2249, 2005.
7. 임준석, "잡음 신호에 의한 시스템 인식을 위한 향상된 최소자승 평균 알고리즘," 한국음향학회 제26회 음성통신 및 신호처리 학술대회 논문집, 26권, 1호, 209~212쪽, 2009.

저자 약력

●임 준 석 (Jun-Seok Lim)
한국음향학회지, 제28권, 제7호 참조.