수신 신호의 위상 추정값에 대한 분산과 성능분석에 의한 페이딩 채널 해석

함영만* · 이강원**

Analysis of System on the Combining Reception and the Variance of the Phase Estimate of a Sinusoidal Signal over Wireless Fading Channels

Young-marn Ham* · Kang-won Lee**

요 약

이동통신 시스템에서 발생하는 큰 문제점 중의 하나는 다중 경로에 의한 신호 진폭의 감쇄 현상인 페이딩을 들 수 있다. 이 때 동기시스템에서 maximum a posteriori 신호 위상 추정값의 분산에 대한 Cramer-Rao bound를 고찰하여 수신신호의 위상을 추정한다. 나카가미 페이딩 채널에서의 위상의 분산값에 대한 Cramer-Rao 하한치를 발견하기 위해서 위상에 대한 확률 밀도 함수를 이용한다. 또한 순서통계량을 이용하여 일반화된 선택 합성기법에 대한 오류 확률식을 유도하여 적절한 다이버시티 가짓수를 분석하였다.

ABSTRACT

In this paper amplitude and phase distortion of the received signal through a fading channel results in a severe performance degradation of the communication system, Therefore we consider the variance of the maximum a posteriori phase estimate of sinusoidal signal by the Cramer-Rao bound in wireless fading channel. To find the Cramer-Rao lower bound for the variance of the phase, We use the derived probability density function(pdf) of the phase in Nakagami fading channel. We analyze the error performance of modulation signals using order statistics on generalized combining reception and find adequate diversity branch number.

키워드

맥시멈 포스테리어리, 카머-라오 경계, 추정값, 변조신호

Key word

maximum a posteriori, Cramer-Rao bound, estimation, modulation signals

* 서울산업대학교 IT정책전문대학원 박사과정

** 서울산업대학교 IT정책전문대학원 산업정보시스템공학과 교수

접수일자 : 2009. 08. 11

심사완료일자 : 2009. 08. 25

Ⅰ. 서 론

비약적인 통신의 발달은 고도의 정보화 사회를 앞당기고 있다. 기존의 유선 통신이 지니고 있는 장소의 제약성을 벗어나고, 아날로그 시스템보다 성능이 월등히 우수한 디지털 이동 통신의 역할이 정보화 사회로의 급격한 변혁의 보급을 촉진시키고 있다. 또한 현대의 통신은 고정통신 개념에서 이동통신개념으로 발전하고 있으므로 이에 대한 연구는 점점 활성화될 전망이다.

그러나 이동통신 시스템에서 발생하는 큰 문제점 중의 하나는 다중 경로에 의한 신호 진폭의 감쇄 현상인 페이딩 현상을 들 수 있다. 이런 페이딩 현상을 모델링하는 데는 Rayleigh, Rice, Nakagami, Lognomal등 여러 가지 모델이 있다. 이 중 Nakagami 페이딩 모델은 가장 일반적인 모델이고, 실험적, 이론적으로 도심 무선 다중경로 채널에 가장 적합한 분포를 갖는 것으로 알려져 있다. 페이딩 현상으로 전송신호는 전파지연을 갖게 되는데 이는 위상을 왜곡시킴으로서 성능에 상당한 영향을 준다. 그러므로 동기시스템에서는 수신신호의 위상을 반드시 추정해야 한다[1]. 왜곡된 위상을 추정하는 방식 중에 MAP(Maximum A Posteriori) 방식은 보내진 송신신호로부터 수신신호의 사후확률을 최대화시킴으로서 페이딩 채널 환경에서 변화하는 위상을 찾기에 적합하다[2].

추정값(estimation)을 파라미터화하는 일반적인 접근은 Bayes의 정리를 사용하는 데, 이 때 랜덤 변수의 추정값은 cost function의 최소화에 근거를 둔다. MAP에 의해 평균 cost의 최소화를 수행하기 위해서 랜덤 변수에 대한 posteriori pdf를 미분한 뒤 0으로 놓음으로써 얻을 수 있다. 여기서 나카가미 페이딩에서 신호의 MAP 위상 추정값 $\hat{\Theta}$을 Cramer-Rao 부등식을 사용하여 구하기로 한다[1].

또한 주파수 비선택적이고 느린 나카가미 페이딩 채널에서 M진 신호의 합성 기법에 대한 심벌 오류 확률을 유도하는데 순서통계량을 이용하여 일반화된 선택성 합성에 대한 성능 분석을 한다. 이 때 우리는 시스템의 복잡성과 비용을 고려하여 적절한 다이버시티 가짓수를 살펴보기로 한다.

Ⅱ. 모 델

신호가 나카가미 페이딩을 받을 경우 위상에 대한 추정값을 고찰하기로 한다.
수신된 신호는

$$r(t)=d\cos\omega_c t+n(t)\ \ (0\le t\le T) \tag{1}$$

여기서 잡음 신호

$$n(t)=2(n_c\cos\omega_c t-n_s\sin\omega_c t) \tag{2}$$

T는 측정 구간이며 n_c, n_s는 평균이 0이고 분산이 σ_n^2이 서로 독립인 가우시안 잡음이다.

그러므로 r(t)는 다음과 같이 표현된다.

$$r(t)=$$

$$[(d+n_c)^2+n_s^2]^{1/2}\cos(\omega_c t+\tan^{-1}\frac{n_s}{d+n_c})$$

$$+n_c\cos\omega_c t-n_s\sin\omega_c t$$

$$=A\cos(\omega_c t+\Theta)+n_c\cos\omega_c t-n_s\sin\omega_c t \tag{3}$$

직교정규 기저함수(orthonormal basis)는 다음과 같이 가정한다[3].

$$\phi_1(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\omega_c t\ \ (0\le t\le T) \tag{4}$$

$$\phi_2(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\sin\omega_c t\ \ (0\le t\le T) \tag{5}$$

그러므로 식 (3)은 새로운 시간함수 $z(t)$를 도입하여 다음과 같이 변형된다[4].

$$z(t)$$

$$=\sqrt{\frac{T}{2}}A\cos\Theta\ \Phi_1(t)-\sqrt{\frac{T}{2}}A\sin\Theta\ \Phi_2(t)$$

$$+\ N_1\Phi_1(t)+\ N_2\Phi_2(t) \tag{6}$$

여기서 잡음신호 $N_i, i=1,2$는 식 (7)과 같다.

$$Ni=\int_0^T\frac{n(t)\ \Phi_i(t)}{2}dt\ \ (i=1,2) \tag{7}$$

따라서, 벡터

$$\begin{aligned} &\mathbf{Z} \\ &\equiv (Z_1, Z_2) \\ &= \left(\sqrt{\frac{T}{2}} A\cos\Theta + N_1,\right. \\ &\qquad \left. -\sqrt{\frac{T}{2}} A\sin\Theta + N_2\right) \end{aligned} \tag{8}$$

이며

$$Z_i = \int_0^T r(t)\Phi_i(t)dt \quad (i=1,2) \tag{9}$$

가 된다.

우도함수 $f_{Z|\Theta}(z_1,z_2 \mid \Theta)$는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &f_{Z|\Theta}(z_1,z_2 \mid \Theta) \\ &= \frac{1}{\pi\sigma_n^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_n^2}\left[\left(z_1-\sqrt{\frac{T}{2}}A\cos\Theta\right)^2\right.\right. \\ &\quad \left.\left.+\left(z_2+\sqrt{\frac{T}{2}}A\sin\Theta\right)^2\right]\right\} \\ &= C\exp\left[2\sqrt{\frac{T}{2}}\frac{A}{\sigma_n^2}\left(z_1\cos\Theta - z_2\sin\Theta\right)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

여기서 계수 C는 Θ에 독립인 모든 인자를 포함한다.

그러므로

$$\begin{aligned} &f(z_1,z_2,\Theta) \\ &= f_{Z|\Theta}(z_1,z_2 \mid \Theta) f(\Theta) \\ &= C\exp\left[2\sqrt{\frac{T}{2}}\frac{A}{\sigma_n^2}\left(z_1\cos\Theta -\right.\right. \\ &\quad \left.\left. z_2\sin\Theta\right)\right] f(\Theta) \end{aligned} \tag{11}$$

이다. 여기서 C는 상수이다.

$\hat{\Theta}$에 대한 MAP 추정값은 식 (10)으로부터 얻어진다.

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial f(\Theta \mid z_1, z_2)}{\partial\Theta}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial\Theta}\left[\frac{f(z_1,z_2 \mid \Theta) f(\Theta)}{f(z_1,z_2)}\right]\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial\Theta}\left[\frac{f(z_1,z_2,\Theta)}{f(z_1,z_2)}\right]\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

식 (12)에 로그함수를 취한 후 Θ의 함수가 아닌 $f(z_1,z_2)$를 무시함으로써 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial \ln f(z_1,z_2,\Theta)}{\partial\Theta}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} \\ &= \left.\frac{\partial \ln f(z_1,z_2 \mid \Theta)}{\partial\Theta}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} + \left.\frac{\partial \ln f(\Theta)}{\partial\Theta}\right|_{\Theta=\hat{\Theta}} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

식 (13)의 첫 번째 항을 0으로 놓으면 루프 여파기를 적분기로 대체한 위상동기 루프와 동일하다. 이런 경우 f(Θ)의 최대값은 0이므로 식 (13)의 두 번째 항은 0이 된다.

Ⅲ. 위상 추정값의 분산에 대한 Cramer-Rao 부등식[4]

신호의 진폭 d가 영향을 받는 나카가미 페이딩 채널에서 maximum a posteriori 위상 추정값의 분산에 대한 Cramer-Rao 하한치를 얻기 위해서 Θ에 대한 pdf는 다음과 같다[5].

$$\begin{aligned} f(\Theta) &= \int_0^\infty f(a,\Theta)da \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{m}{m+R}\right)^m \\ &\quad \cdot {}_2F_1\left(1, m; \frac{1}{2}; \frac{R\cos^2\Theta}{m+R}\right) \end{aligned}$$

$$+\frac{2^{-2m}\Gamma(2m)}{\Gamma^2(m)}\sqrt{\frac{R}{m+R}}\cdot\left(\frac{m}{m+R}\right)^m\cos\Theta\cdot\cdot {}_2F_1\left(m+\frac{1}{2},\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{R\cos^2\Theta}{m+R}\right)$$

$(-\pi\le\Theta\le\pi)$ (14)

여기서 R은 신호대 잡음비이고 다음과 같이 표현된다.

$$R=\Omega/2\sigma_n^2 \quad (15)$$

그림 1은 수신 신호의 위상이 0일 때 각각의 SN비에 따라 Θ의 pdf를 보여준다. SN비가 증가함에 따라 f(Θ)가 Θ에 대하여 점점 피이크값을 이루게 된다.

식 (14)은 m=1일 때 레일리 페이딩에서의 위상 pdf가 되며 다음과 같이 표현된다.

$$f(\Theta)=\frac{1}{2\pi(1+R)}{}_2F_1\left(1,1;\frac{1}{2};\frac{R\cos^2\Theta}{1+R}\right)+\frac{\sqrt{R}\cos\Theta}{4(1+R\sin^2\Theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$(-\pi\le\Theta\le\pi)$ (16)

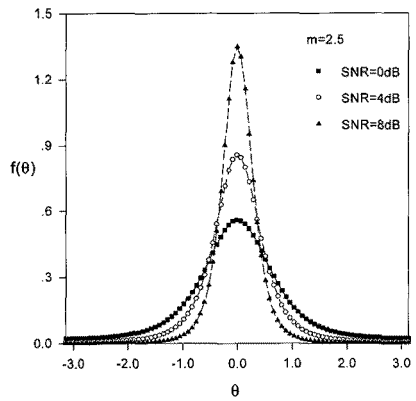

그림 1. 나카가미 페이딩에서의 수신 신호의 위상 분포
Fig. 1 Phase Distribution of Received Signal in Nakagami Fading

여기서

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!} \quad (17)$$

이다.

파라미터가 랜덤 변수일 때 Cramer-Rao 부등식은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_{\hat{\Theta}}^2\ge 1/E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\Theta}\ln f(z_1,z_2,\Theta)\right]^2\right\}=\left\{-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}\ln f(z_1,z_2,\Theta)\right]\right\}^{-1} \quad (18)$$

식 (11)에 로그 함수를 취하면

$$\ln f(z_1,z_2,\Theta)=\ln C+2\sqrt{\frac{T}{2}}\frac{A}{\sigma_n^2}(z_1\cos\Theta-z_2\sin\Theta)+\ln f(\Theta) \quad (19)$$

과 같이 된다.

Cramer-Rao 부등식에 대한 하한값을 구하기 위해서 식 (19)을 Θ에 대하여 미분하면

$$\frac{\partial\ln f(z_1,z_2,\Theta)}{\partial\Theta}=2\sqrt{\frac{T}{2}}\frac{A}{\sigma_n^2}\cdot(z_1\sin\Theta-z_2\cos\Theta)+\frac{f'(\Theta)}{f(\Theta)} \quad (20)$$

으로 표현된다.

식 (20)을 다시 Θ에 대해서 미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2\ln f(z_1,z_2,\Theta)}{\partial\Theta^2}=2\sqrt{\frac{T}{2}}\frac{A}{\sigma_n^2}(-z_1\cos\Theta+z_2\sin\Theta)+\frac{f'(\Theta)f(\Theta)-[f'(\Theta)]^2}{[f(\Theta)]^2} \quad (21)$$

식 (21)을 사용함으로써 위상 추정 값에 대한 분산은

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\hat{\Theta}}^2 \\
&\geq \left\{ -E\left[\frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \ln f(z_1, z_2, \Theta)\right] \right\}^{-1} \\
&= \left\{ E\left[2\sqrt{\frac{T}{2}} \frac{A}{\sigma_n^2} \left(\sqrt{\frac{T}{2}} d\cos^2\Theta + \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. \sqrt{\frac{T}{2}} d\sin^2\Theta - \frac{f'(\Theta)f(\Theta) - [f'(\Theta)]^2}{[f(\Theta)]^2} \right]\right\}^{-1} \\
&= \left\{ E\left[2\frac{T}{2}\frac{A^2}{\sigma_n^2} - \frac{f'(\Theta)f(\Theta) - [f'(\Theta)]^2}{[f(\Theta)]^2}\right]\right\}^{-1} \\
&= \left[RT - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(\Theta)f(\Theta) - [f'(\Theta)]^2}{f(\Theta)} d\Theta \right]^{-1} \qquad (22)
\end{aligned}$$

이며

$$R = E[A^2]/\sigma_n^2 \qquad (23)$$

이다.

Ⅳ. 순서통계량에 의한 확률 밀도 함수

서로 다른 L개의 다이버시티 가지로부터 수신되는 신호 중 가장 큰 순간 SNR (Signal-to-Noise Ratio)의 신호 하나만을 선택하는 선택성 합성과 수신되는 신호 중 SNR(Signal-to-Noise Ratio)이 가장 큰 신호 μ개를 택하는 일반화된 선택성 합성의 성능 분석을 위해서는 순서통계량(Order Statistics)의 개념을 빌어 확률 밀도 함수를 유도한다.

순서 통계량이란 임의의 확률분포와 시간 지연을 갖는 L개의 표본값 $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_L$을 크기 순서인 $\gamma_L \geq \gamma_{L-1} \geq \cdots \geq \gamma_1$이 되도록 나열시켰을 때, $\gamma_i \ (i = 1, 2, \cdots L)$를 원래의 표본 $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_L$으로부터의 i 번째 순서 통계량이라고 한다 [6][7].

L개의 진행 경로 중에서 세기가 가장 큰 μ개의 경로들을 선택하여 합성한 것은 페이딩의 영향을 받으면서 채널을 통과한 수신 신호의 SNR이 가장 큰 μ개의 경로들을 선택하여 합성한 통계량의 확률 밀도 함수를 유도하는 것과 동일하다. 수신된 L개의 다이버시티 경로 중에서 신호대 잡음비가 가장 큰 신호 하나만을 택하는 선택성합성의 경우는 인 경우로 다음과 같이 유도할 수 있다[8].

$$\begin{aligned}
f(\gamma) &= \frac{L}{\Gamma(m)} \left(\frac{m}{\gamma_0}\right)^m \gamma^{m-1} \exp\left(-\frac{m}{\gamma_0}\gamma\right) \\
&\cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{m}{\gamma_0}\gamma\right) \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{m}{\gamma_0}\gamma\right)^i \frac{1}{i!}\right]^{L-1}, \gamma \geq 0
\end{aligned} \qquad (24)$$

식 (24)을 γ에 대해 적분이 가능하도록 변형하여야만 나카가미 페이딩 채널에서 평균 오류 확률을 유도할 수 있다. 이항 정리를 이용하여 정리하면 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\left[1 - \exp\left(-\frac{m}{\gamma_0}\gamma\right) \sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{m}{\gamma_0}\gamma\right)^i \frac{1}{i!}\right]^{L-1} \\
&= \sum_{n_0=0}^{L-1} (-1)^{n_0} \binom{L-1}{n_0} \left[\sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{m}{\gamma_0}\gamma\right)^i \frac{1}{i!}\right]^{n_0} \exp\left(-\frac{m}{\gamma_0} n_0 \gamma\right).
\end{aligned} \qquad (25)$$

식 (25)를 변형하기 위해 다음과 같은 관계식을 이용한다.

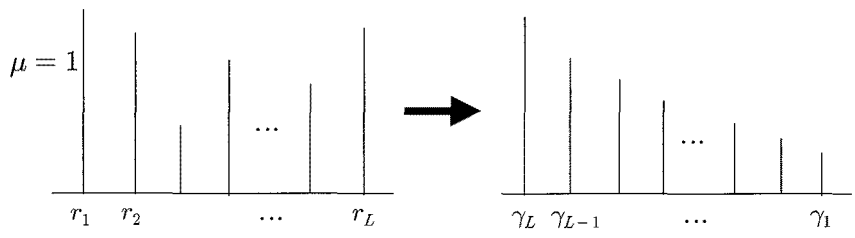

그림 2. 순서통계량
Fig. 2 Order Statistics

$$\left[\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{m}{\gamma_0}\gamma\right)^i\frac{1}{i!}\right]^{n_0}$$

$$=\sum_{n_1=0}^{n_0}\sum_{n_2=0}^{n_1}\cdots\sum_{n_{m-1}=0}^{n_{m-2}}\binom{n_0}{n_1}\binom{n_1}{n_2}\cdots\binom{n_{m-2}}{n_{m-1}}\left(\frac{1}{1!}\right)^{n_1-n_2}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2!}\right)^{n_2-n_3}\cdots\left(\frac{1}{(m-2)!}\right)^{n_{m-2}-n_{m-1}}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{(m-1)!}\right)^{n_{m-1}}\left(\frac{m}{\gamma_0}\gamma\right)^{n_1+n_2+\cdots+n_{m-1}}. \tag{26}$$

결국 식 (24)은 식 (25)와 식 (26)을 이용하여 다음과 같은 새로운 형태로 나타낼 수 있다 [9].

$$f(\gamma)=\frac{L}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\gamma_0}\right)^m\sum_{n_0=0}^{L-1}(-1)^{n_0}\binom{L-1}{n_0}$$

$$\cdot\sum_{n_1=0}^{n_0}\sum_{n_2=0}^{n_1}\cdots\sum_{n_{m-1}=0}^{n_{m-2}}\left[\prod_{j=1}^{m-1}\binom{n_{j-1}}{n_j}\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{1}{j!}\right)^{n_j-n_{j+1}}\left(\frac{m}{\gamma_0}\right)^{n_j}\right]\exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\gamma\right]\gamma^{n+m-1} \tag{27}$$

여기서

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_{m-1} \tag{28}$$

그리고

$$n_m=0 \tag{29}$$

이며 페이딩 지수 m을 1로 하면 레일리 페이딩 채널에서 선택성 다이버시티의 확률 밀도 함수가 된다.

V. 페이딩 채널 환경에서의 성능분석

BPSK에 대한 복조에서 정보가 반송파의 위상에만 포함되어 있기 때문에 나카가미 페이딩 채널에서 SC (Selective Combining) 다이버시티 수신기를 가진 M진 PSK 신호의 성능을 평가하는 것이 가능하다. 여기서 M진 PSK 방식은 PSK 방식을 사용하여 N개의 비트를 묶어 M개($2^m = M$) 위상 중 하나의 위상을 할당하여 한꺼번에 많은 비트를 전송하는 방식으로 반송파간의 위상차를 $\frac{2\pi}{M}$로 하여 전송한다. 페이딩 채널에서 균일한 심벌 발생 분포의 확률을 갖는 M진 PSK 신호의 선택성 다이버시티를 적용한 평균 심벌 오류 확률 $P_{e,MPSK,SC}$는 페이딩을 받지 않았을 때 신호대 잡음비 γ에 대한 조건부 오류 확률 $P_{e,MPSK}$을 확률 밀도 함수로 평균을 취함으로써 다음과 같이 얻는다.

$$P_{e,MPSK,SC}=\int_0^\infty P_{e,MPSK}\,f(\gamma)\,d\gamma \tag{30}$$

한편, MPSK 신호가 페이딩을 받지 않았을 때 $P_{e,MPSK}$는 다음과 같다 [10].

$$P_{e,MPSK}=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{M}}\exp\left[-\gamma\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\sec^2\Theta\right]d\Theta \tag{31}$$

선택성 합성 다이버시티를 사용한 나카가미 페이딩 채널에서의 오류 확률은 식 (27)과 (31)을 식 (30)에 대입한 후 [11, p. 310, Eq. (3.351)]를 이용하면

$$P_{e,MPSK,SC}=\frac{1}{\pi}\frac{L}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\gamma_0}\right)^m\sum_{n_0=0}^{L-1}(-1)^{n_0}\binom{L-1}{n_0}\sum_{n_1=0}^{n_0}\sum_{n_2=0}^{n_1}\cdots\sum_{n_{m-1}=0}^{n_{m-2}}$$

$$\left[\prod_{j=1}^{m-1}\binom{n_{j-1}}{n_j}\left(\frac{1}{j!}\right)^{n_j-n_{j+1}}\left(\frac{m}{\gamma_0}\right)^{n_j}\right]$$

$$\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{M}}\frac{\Gamma(n+m)}{\left[\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)+\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)\sec^2\Theta\right]^{n+m}}d\Theta \tag{32}$$

$$\frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}}\int_0^{\infty} erfc\left(\sqrt{\frac{\gamma}{c}}\right)\exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\gamma\right]\gamma^{n+m-1}d\gamma = J_1 \qquad (35)$$

로 표현되는데 이는 잘 알려진 Rayleigh 페이딩 채널 (m=1)에서 다이버시티가 없을 때(L=1) MPSK 신호의 오류 확률식과 동일하다 [10, Eq.(1)].

한편, 나카가미 페이딩 채널이 존재할 때 L-가지 선택성 다이버시티를 적용한 M진 QAM 시스템의 성능분석을 한다.

QAM은 한정된 전송 대역 내에서의 고속의 데이터 전송이 진행되는 특징 이외에 신호의 진폭·위상을 나타내는 신호점 배치가 전송로의 잡음에 대해 우수한 특징을 갖는다. 그러므로 위성통신 서비스에 사용하는 것보다 지상 통신 서비스에 사용되는 것이 일반적이다.

M진 QAM 신호가 페이딩을 받지 않았을 때 오류확률 $P_{e,MQAM}$은 다음과 같다 [12].

$$P_{e,MQAM} = \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}} erfc\left(\sqrt{\frac{\gamma}{c}}\right) - \frac{(\sqrt{M}-1)^2}{M} erfc^2\left(\sqrt{\frac{\gamma}{c}}\right) \qquad (33)$$

이 때 $c = \frac{2(M-1)}{3\log_2 M}$ 이고 $M = 2^j$ (j: 우수)이다.

페이딩 채널에서 균일한 심벌 발생 분포의 확률을 갖는 MQAM 신호의 선택성 다이버시티를 적용한 평균 심벌 오류 확률 $P_{e,MQAM,SC}$는 페이딩을 받지 않았을 때 신호대 잡음비 γ에 대한 조건부 오류 확률 $P_{e,MQAM}$을 확률 밀도 함수로 평균을 취함으로써 다음과 같이 얻는다.

$$P_{e,MQAM,SC} = \int_0^{\infty} P_{e,MQAM} f(\gamma)\, d\gamma \qquad (34)$$

식 (33) 그리고 (27)을 식 (34)에 대입하면 그리고

$$\frac{(\sqrt{M}-1)^2}{M}\int_0^{\infty} erfc^2\left(\sqrt{\frac{\gamma}{c}}\right) \cdot \exp\left[-\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\gamma\right]\gamma^{n+m-1}d\gamma = J_2 \qquad (36)$$

으로 표현된다.

식 (35)은 [11, p. 649, Eq. (6.286.1)]에 의해

$$J_1 = \frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}}\frac{c^{n+m}}{\sqrt{\pi}(n+m)}\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right) \cdot {}_2F_1\left(n+m, n+m+\frac{1}{2}; n+m+1; -\frac{m(1+n_0)c}{\gamma_0}\right) \qquad (37)$$

으로 주어진다.

변수 변환을 하고 부분 적분을 한 후 식 [11, p.198, Eq. (2.667.4), p. 649, Eq. (6.286.1)]을 적용하면 식 (36)은 다음과 같이 표현된다.

선택성 합성 다이버시티를 사용한 나카가미 페이딩 채널에서의 닫혀진 형태의 오류 확률은

$$J_2 = \frac{(\sqrt{M}-1)^2}{M}\Gamma(m+n)\left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)}\right]^{m+n} - \frac{4(\sqrt{M}-1)^2}{\pi M}\sum_{i=0}^{m+n-1}\Gamma(m+n)c^{n+m-i-1} \cdot \left[\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\right]^{-1-i}\frac{1}{2n+2m-2i-1} \cdot {}_2F_1\left(n+m-i-\frac{1}{2}, n+m-i; n+m-i+\frac{1}{2}; -\frac{\gamma_0+cm(1+n_0)}{\gamma_0}\right) \qquad (38)$$

$$P_{e,MQAM,SC}=\frac{L}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\gamma_0}\right)^m\sum_{n_0=0}^{L-1}(-1)^{n_0}\binom{L-1}{n_0}\sum_{n_1=0}^{n_0}\sum_{n_2=0}^{n_1}\cdots\sum_{n_{m-1}=0}^{n_{m-2}}\left[\prod_{j=1}^{m-1}\binom{n_{j-1}}{n_j}\left(\frac{1}{j!}\right)^{n_j-n_{j+1}}\left(\frac{m}{\gamma_0}\right)^{n_j}\right]$$
$$\cdot\left\{\frac{2(\sqrt{M}-1)}{\sqrt{M}}\frac{c^{n+m}}{\sqrt{\pi}(n+m)}\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right){}_2F_1\left(n+m,n+m+\frac{1}{2};n+m+1;-\frac{m(1+n_0)c}{\gamma_0}\right)\right.$$
$$-\frac{(\sqrt{M}-1)^2}{M}\Gamma(m+n)\left[\frac{\gamma_0}{m(1+n_0)}\right]^{m+n}+\frac{4(\sqrt{M}-1)^2}{\pi M}\sum_{i=0}^{m+n-1}\Gamma(m+n)c^{n+m-i-1}$$
$$\cdot\left[\frac{m}{\gamma_0}(1+n_0)\right]^{-1-i}\frac{1}{2n+2m-2i-1}$$
$$\left.\cdot\ {}_2F_1\left(n+m-i-\frac{1}{2},n+m-i;n+m-i+\frac{1}{2};-\frac{\gamma_0+cm(1+n_0)}{\gamma_0}\right)\right\} \tag{39}$$

으로 표현된다.

다이버시티 가짓수 L이 1일 때 식 (39)의 결과는 [12, Eq. (3.15)]와 동일함을 알 수 있다.

VI. 수치해석 및 고찰

위상 추정값에 대한 분산인 식 (22)에서의 적분은 닫혀진 형태로 유도될 수 없으며 그림 3에서 나카가미 페이딩 지수가 증가함에 따라 분산값이 줄어든다는 것을 알 수 있다. 즉 레일리 페이딩일 경우 가장 심각하며 페이딩 깊이(fading depth)가 가장 증가된다.

한편, 그림 4에서는 M진 PSK에서의 SC 다이버시티 가짓수에 대한 평균 SNR을 보여주고 있는 데 이 때 오류확률은 10^{-5}으로 가정하였다. 한편 그림 5에서 M진 QAM에서의 동일한 환경에서 성능 비교를 표현하고 있는 데 그림 4와 비교하여 동일한 심볼수 M에 대해 M진 QAM의 순간 SNR이 M진 PSK의 순간 SNR보다 유리함을 알 수 있다. 그러므로 잡음이 많은 이동통신 환경에서 다이버시티 효과는 다이버시티 가짓수가 적을수록 유리함을 알 수 있다.

그러나 다이버시티 가짓수가 많을수록 동일한 성능에 대해 순간 SNR이 많은 영향을 주지 않는다는 것을 알 수 있다. 뿐만 아니라, 레일리 페이딩 환경 또는 페이딩 지수가 클수록, 즉 페이딩 환경이 개선되어도 동일한 심볼수 M에 대해 다이버시티 가짓수가 많을수록 순간 SNR은 서로 근접함을 알 수 있다.

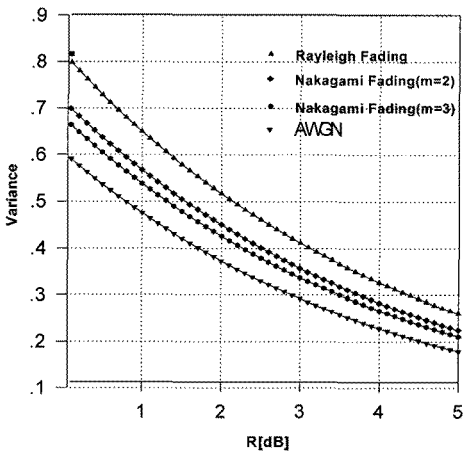

그림 3. SNR에 따른 추정치
Fig. 3 Estimation depending on SNR

이동통신에서 성능 개선은 페이딩 지수에 좌우되며 결국 페이딩 심화에 대한 개선책을 마련할 수 있다는 것을 알 수 있다. 그러나 페이딩 지수에 대한 개선은 심볼수가 증가함에 따라 기대할만한 성능 개선은 제시할 수 없다.

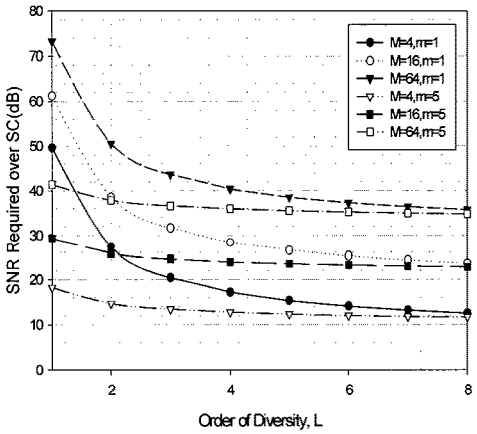

그림 4. M진 PSK에서의 SC 다이버시티 가짓수에 대한 평균 SNR (오류확률 10^{-5})
Fig. 4 Average SNR versus order of diversity for MPSK(error probability 10^{-5})

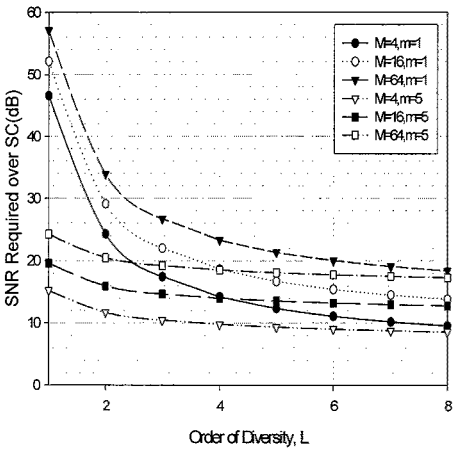

그림 5. M진 QAM에서의 SC 다이버시티 가짓수에 대한 평균 SNR (오류확률 10^{-5})
Fig. 5 Average SNR versus order of diversity for MQAM(error probability 10^{-5})

Ⅶ. 결 론

본 논문에서는 나카가미 페이딩 채널에서 동기 BPSK 시스템의 해석을 확률 변수 변환을 하여 오류위상에 대한 확률밀도함수를 유도한 결과를 수신신호에 대해 MAP 추정기법을 이용하여 위상을 추정하였다. 그리고 위상의 분산에 대한 하한값을 Cramer-Rao bound로 구하고 이를 수치해석적인 방법으로 고찰하였다.

앞으로 MAP추정에 의해 최적의 검파기를 설계할 수 있으며 디지털 이동통신이 더욱 발달함에 따라 다양한 변조방식 및 채널환경에 대한 현상들에 충분히 대처할 수 있도록 여러 확률밀도함수에 대한 위상의 분산 및 오류확률에 대한 연구가 필요한 것으로 보며 Cramer-Rao 부등식은 계속하여 추정값을 구하는 데 사용할 것이다.

또한 나카가미 페이딩 채널의 환경을 받고 있는 SC 다이버시티 시스템에서 M진 PSK 그리고 M진 QAM 신호에 대한 성능을 분석했다. 다이버시티 가짓수가 증가할수록 성능 개선은 충분히 실현할 수 있지만 $L=4$이상에서는 높은 성능 개선을 도출하지 못하였다.

페이딩이 심화되는 이동통신의 경우 변조방식의 선택은 성능 개선에 상당한 영향을 주므로 이에 대한 고려는 필수적이다. 그러므로 지상통신에서는 오류율 측면에서 볼 때 전력 효율에 유리한 M진 QAM의 선택은 고려할만 하다. 그러나 전력 효율적인 측면에서 볼 때 일반적으로 M진 PSK가 유리하다는 것을 성상도뿐만 아니라 수치해석에서도 투명한 결과가 도출되었다.

참고문헌

[1] J.G.Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, Inc., 2008.

[2] H.L.Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*, Part 1, John Wiley & Sons,Inc.2007.

[3] R.E.Ziemer & R.L.Peterson, *Digital Communications and Spread Spectrum Systems*, Macmillian Publishing Company., 2008.

[4] R. E. Ziemer & W. H. Tranter, *Principles of Communications/Systems, Modulation, and Noise*, second, Houghton Mifflin, 2005.

[5] 김치환, "Nakagami 페이딩 채널에서 BPSK시스템의 해석과 PSK 신호의 변조분류," 한양대학교 석사논문, 1995.

[6] A. M. Mood, F. A. Graybill, and D. C. Boes, *Introduction to the Theory of Statistics,* McGraw-Hill, 2007.

[7] P. Z. Peebles, Jr., *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles,* McGraw-Hill, 2008.

[8] A. Annamalai, "Analysis of Selection Diversity on Nakagami Fading Channel," *Electron. Lett.,* vol. 33, No. 7, pp. 548-549, 1997.

[9] C.H.Kim, S.Y.Choi, and Y.Y.Han, "New results on selective diversity using order statistics for reception of *M*-ary DPSK and PSK signals on Nakagami fading channels," IEICE Trans. Fundamentals, vol. E84-A, no. 4, pp. 1085-1089, April 2001.

[10] J. Sun and I. S. Reed, "Performance of MDPSK, MPSK, and Noncoherent MFSK in Wireless Rician Fading Channels," *IEEE Trans. Commun.,* vol. 47, No. 6, pp. 813-816, June 1999.

[11] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integral, Series and Products,* New York: Academic Press, Inc., 1980.

[12] K. K. Cho, "Analysis of MRC Diversity for *M*-ary QAM Signals in Nakagami Fading Channels," M. Sc. thesis, Dep. Elec. Com. Eng., Hanyang Univ., Korea, Dec. 1996.

저자소개

함영만(Young-marn Ham)

1994년 2월 : 서울산업대학교 전자공학과(공학사)
1996년 8월 : 한양대학교 공학대학원 전자통신공학과 (공학석사)
2010년 현재 : 서울산업대학교 IT정책전문대학원 박사과정(산업정보시스템전공)
2010년 현재 : 영인 IT 기술사 사무소 대표, 정보통신기술사, 전자응용기술사, 전자기기기능장, 대한민국 무선통신 명장
※관심분야 : 무선통신, 방송통신, 정보통신

이강원(Kang-won Lee)

1980년 : 서울대학교 공과대학 산업공학과(공학사)
1982년 : 서울대학교 대학원 산업공학과(공학석사)
1985년 : Kansas State Univ. U. S. A 산업공학(공학박사)
2010년 현재 : 서울산업대학교 IT정책전문대학원 산업정보시스템공학과 교수, IEEE Transaction paper referee, 한국경영과학회 이사(학술부장), 대한산업공학회 편집위원장
※관심분야 : 정보통신, 품질 및 신뢰성, O.R.