

세라믹 재료가 고속 충돌 해석을 위한 operator-splitting 유한 요소해석 기술

초속 수 킬로미터에 달하는 탄자 충돌 해석과 같은 고속 충돌 문제는 매우 짧은 작용시간, 지배적인 과도 응답 상태, 관성효과의 중요성 등을 특징으로 들 수 있다. 이 글에서는 고속 충돌 해석을 위한 삼각형/사면체 요소를 적용한 operator-splitting 유한 요소 해석 기술에 대해 소개하였다.

주병윤 한국기술교육대학교, 교수
황 찬 삼성전자, 박사
정동택 한국기술교육대학교, 교수

e-mail : byungyun@kut.ac.kr
e-mail : chan.hwang@samsung.com
e-mail : dtchung@kut.ac.kr

머리말

초속 수 킬로미터에 달하는 탄자 충돌 해석과 같은 고속 충돌 문제는 매우 짧은 작용시간, 지배적인 과도 응답 상태, 관성효과의 중요성 등을 특징으로 들 수 있다. 고속 충돌 문제를 수치 해석 기법으로 풀기 위해서 수치 해석 코드는, 첫째, 고속 그리고 대변형을 하에서 재료 거동에 대한 견실하고 정확한 해석 능력, 둘째 많은 변형이 발생하는 이종 재료들간의 정확한 접촉 처리 능력, 셋째 새로운 면이 생성되는 취성파괴의 정확한 표현 능력이 필요하다.

이와 같은 고속 충돌 문제는 외연적(explicit) 유한 요소법을 이용해 해석하고 있다. 동적 해석 코드에서는 2차원 경우 4절점 사각형 요소, 3차원 경우 8절점 육면체 요소가 많이 사용된다. 이러한 요소들은 비압축성을 가지는 상태에서 재료의 유동에 의한 대변형을 받을 때 체적 잠금을 피하기 위해 1점 적분 방법을 사용한다. 그러나 1점 적분법은 차원수의 차이로 인해 에너지가 없는 모래시계(hourglass) 모드가 발생하고 전 구역으로 순식간에 전파될 수 있다. 이러한 모래시계 모드를 억제하기 위하여 추가적으로 인위적인 안정화가 필요하다. 그러나 삼각형/사면체 요소에서는 차원

수의 차이가 없어 모래시계 모드가 발생하지 않는다. 그리고 사각형/육면체 요소는 초고속 대 변형 충돌 해석 도중 과도한 변형으로 요소가 뒤집혀 내부 면적값이 음수가 되어 해석에 실패하는 경우가 자주 발생한다. 또한 육면체 요소는 하나의 면을 이루는 4개의 절점이 한 평면 위에 있지 못하기 때문에 요소면에 대한 침투 여부를 결정하기 어렵고 따라서 접촉력 처리에 어려움이 생긴다. 이에 비해 사면체 요소는 3개의 절점이 한 면을 이루기 때문에 요소면을 명확하게 정의할 수 있다. 크랙을 동반한 취성파괴를 표현하기 위하여 인접 요소와 공유하는 선분에 작용하는 힘이 특정 크기와 지속시간에 도달하면 절점을 분리하여 새로운 선분을 만드는 방식을 사용하고 있다. 기존 선분을 따라 크랙이 만들어지므로 사각형/육면체 요소는 삼각형/사면체 요소에 비해 실제 임의방향의 크랙 전파를 표현하기 어렵다. 많은 변형이 진행되어 요소들이 과도하게 찌그러지면 계산을 중지하고 새로운 요소망을 생성하여 이전 계산 값을 새로운 요소로 이전하는 리매핑 기법을 사용하는데 3차원 육면체 요소는 요소망 자동 생성이 어려워 리매핑을 적용하는 데 많은 어려움이 있다. 이러한 이유로 삼각형/사면체를 이용한 해석 코드를 개발하려는 노력이 계속되고 있다.

삼각형/사면체 요소는 유한 요소 정식화에서 발생하는 체적 잠김을 피하기 위해 압력항을 독립변수로 처리한 속도-압력 혼합 정식화가 사용되지만 정적 상태에서의 해의 안정성에 문제점을 갖고 있다. 이 글에서는 저자에 의해 개발되고 있는 operator-splitting time stepping 기법을 적용한 삼각형/사면체 요소 라그랑지(Lagrangian) 유한 요소 프로그램에 대해 소개하고자 한다. 개발된 코드는 표 1과 같은 장점을 갖는다.

표 1 삼각형/사면체 operator-splitting 유한요소법의 장점

공식화 (Formulation)	표 준(standard)		Operator splitting
	4-절점 사각형 / 8-절점 육면체	3-절점 삼각형 / 4-절점 사면체	3-절점 삼각형 / 4-절점 사면체
체적 잠김 (Volumetric locking)	양호	불량	양호
모래시계 모드 (Hourglass control)	불량	양호	양호
자동 격자재구성 (Automatic remeshing)	불량	양호	양호

$$\rho_0 \Delta v_i^* = \rho_0 \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} = \frac{\partial v_i^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i^n + \Delta v_i^* + \frac{\Delta t}{\rho_0} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial v_i^n}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta v_i^*}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{\rho_0} \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} \quad (4)$$

$$\rho_0 \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - \frac{\partial p^n}{\partial x_i} = \rho_0 \frac{v_i^* - v_i^n}{\Delta t} - \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \quad (5)$$

Operator-splitting 방법에 의한 지배 방정식 나누어서 풀기

밀도 변화가 작고 체적 탄성을 가 일정하다고 가정하고 라그랑지 기술법으로 탄소성 재료의 모멘텀 보존, 질량 보존을 나타내면 식 (1), (2)와 같이 쓸 수 있다.

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

여기서 v_i 는 속도, τ_{ij} 는 편차 응력, p 는 압력이며 c 는 매질에서의 소리 속도로서 $c^2=K/\rho_0$ 이다. 전통적인 속도-압력 혼합 정식화에서는 식 (1), (2)에 대해 유한 요소 이산화 수행하는 반면, operator-splitting 정식화에서는 세 단계로 식 (1), (2)를 나눈 후 유한 요소 이산화를 수행한다. 첫째 단계로, 식 (3)과 같이 속도와 편차응력만을 가지고 식 (1)을 수정하여 중간 속도 v_i^* 를 구한다. 둘째 단계로, 식 (4)와 같이 중간 속도를 이용하여 식 (2)로부터 압력 증분량을 구한다. 셋째 단계로, 식 (5)와 같이 이미 알고 있는 중간속도와 압력을 이용하여 속도를 구한다. 식 (3)과 (5)의 유한 요소 이산화에서 필요한 속도 경계조건은 편차응력에 관여하는 성분과 압력에 관여하는 성분으로 각각 나누어야 한다. 그러나 이를 외연적으로 구하여 나누기 어렵기 때문에 실제 적용에서는 모든 속도 경계조

건은 편차응력에 관여하는 성분이라고 가정한다.

Operator-splitting 방법의 큰 장점은 체적 잠김이 없다는 점이다. 식 (4)의 우변에 두 번째 항은 전통적인 속도-압력 혼합 정식화에서는 없는 항이며 체적 잠김을 방지하는 역할을 한다. 따라서 삼각형/사면체 요소를 사용해도 체적 잠김 현상이 없게 된다. 또한 식 (6)에서 볼 수 있듯이 operator-splitting 방법을 이용하면 정상 상태 ($\Delta \bar{v}=0, \Delta \bar{p}=0$)에 이르렀을 때 속도 \bar{v} 와 압력 \bar{p} 를 구하기 위해 사용되는 행렬의 대각 성분이 0이 아니다. 따라서 정상상태에서의 해의 안정성이 보장된다. 여기서 K, Q, H, f_v, f_p 는 유한요소 이산화 시 발생하는 행렬이며 정의는 생략하기로 한다. 반면 전통적인 속도-압력 혼합 정식화에서는 식 (7)에서 볼 수 있듯이 행렬 대각성분이 0이 되기 때문에 해의 불안정한 거동이 생길 수 있다.

$$\begin{bmatrix} K & -Q \\ -Q^T & \Delta t[QM^{-1}Q^T - H] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_v \\ f_p \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} K & -Q \\ -Q^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_v \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

그림 1은 저자에 의해 개발된 삼각형/사면체 요소를 적용한 해석 코드를 이용하여 초속 227m/s 구리 원기둥에 대한 Taylor 붕충격 해석 결과를 보여준다. 원기둥의 초기 형상은 길이 32.4mm, 반경 3.2mm이

고 문헌과의 비교를 위해 탄소성 등방성 가공 경화 재료로 가정하였으며 원기둥 하단의 수직 방향 변위를 고정하여 해석하였다. 해석은 원기둥의 변형이 정지하는 $80\mu s$ 까지 진행되었다. 해석 결과 체적 잠김은 발생하지 않았으며 표 1에서 볼 수 있듯이 변형 후 원기둥의 반경과 길이가 다른 정식화 기법으로 해석된 문헌 결과와 일치함을 볼 수 있다.

개발된 해석 코드의 동적 취성 파괴의 표현

개발된 해석 코드의 동적 취성 파괴 능력을 보여 주기 위해 세 가지 예제를 소개하고자 한다. 첫째 예제는 더블 캔틸레버에서의 크랙 전파 예제이다. 그림 2에서와 같이 알루미늄(AD85) 빔의 초기 크랙 길이는 0.4mm이며 준정적으로 상하 방향으로 당겨 크랙이 성장하기 시작할 때 양쪽의 변위를 고정시키고 크랙이 전파되는 것을 확인하는 예제이다. 탄성 재료 모델을 사용하였으며 빔은 무한한 길이를 가지는 것으로 가정하여 응력파가 반사되지 못하도록 무향(silent) 경계 조건을 주었다. 해석 결과 그림 3에서 크랙 팁 주변에 응력이 집중되면서 크랙이 오른쪽으로 전진하는 것을 확인할 수 있다.

두 번째 예제는 수직 관통 삼차원 해석 예제이다. 수직 관통 해석은 요소 소진(element erosion)과 요소 소진 이후에 변화하는 외곽면에 대한 접촉력 처리 등을 확인할 수 있으며, 탄자가 관통할 때 일어나는 현상 등에 대해 비교적 잘 알려져 있기 때문에 해석 코드를 검토하는 좋은 예제이다. 그림 4(a)에서 볼 수 있듯이 WHA(Tungsten Heavy Alloy) 탄자가 6개의 적층된 연강판 표적을 타격한다. 재료 모델은 Johnson-Cook 모델을 사용했다. 해석에서는 탄자와 표적에 모두 요소 소진 알고리즘을 적용하여 등가 소성 변형률이 200%를 초과하는 요소를 계산에서 제외시켰다. 이 값은 85% 단축 응력 압축에 해당하는 값이며 관통 해석을 통해서 경험적으로 정한 값이다. 요소 소진 기법은 라그랑지안 유한요소 해석에서 일반적으로

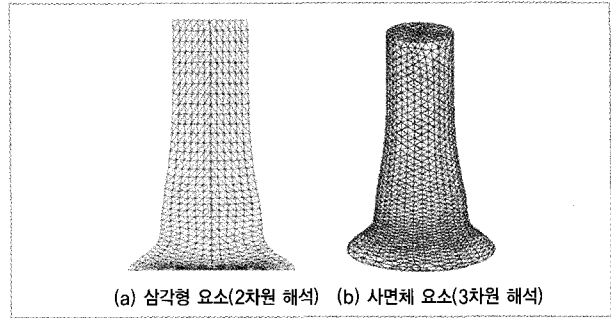


그림 1 Operator-splitting 유한 요소법에 의한 구리 원기둥의 Taylor 붕충격 해석 결과

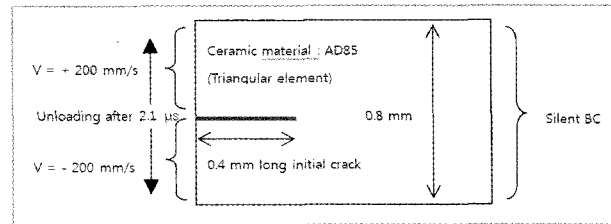


그림 2 이중보(Double cantilever beam) 테스트의 2차원 해석 조건

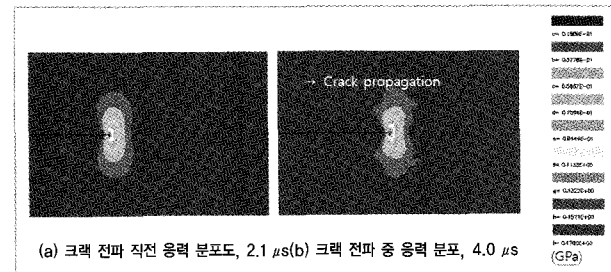


그림 3 이중보(Double cantilever beam) 테스트에서의 세라믹 재료의 크랙 전파 해석 결과

표 2 구리 원기둥의 Taylor 붕충격 해석 결과와 타 문헌과의 비교

	공식화(Formulation)	전장	반경
Bonet	표준 8-절점 육면체 (Standard 8-node hexahedral)		6.99
	평균 4-절점 사면체 (Average 4-node tetrahedral)		6.95
	표준 4-절점 사면체 (Standard 4-node tetrahedral)		5.55
	혼합 8-절점 육면체 (Mixed 8-node hexahedral)	21.48	7.11
Zienkiewicz	혼합 4-절점 사각형 (Mixed 4-node quadrilateral)	21.47	7.10
	Operator-split 4-node tetrahedral	21.94	7.20
Authors	Operator-split 3-node triangular	21.47	7.10
	Operator-split 4-node tetrahedral	21.52	7.07
	Operator-split 3-node triangular	21.49	7.10

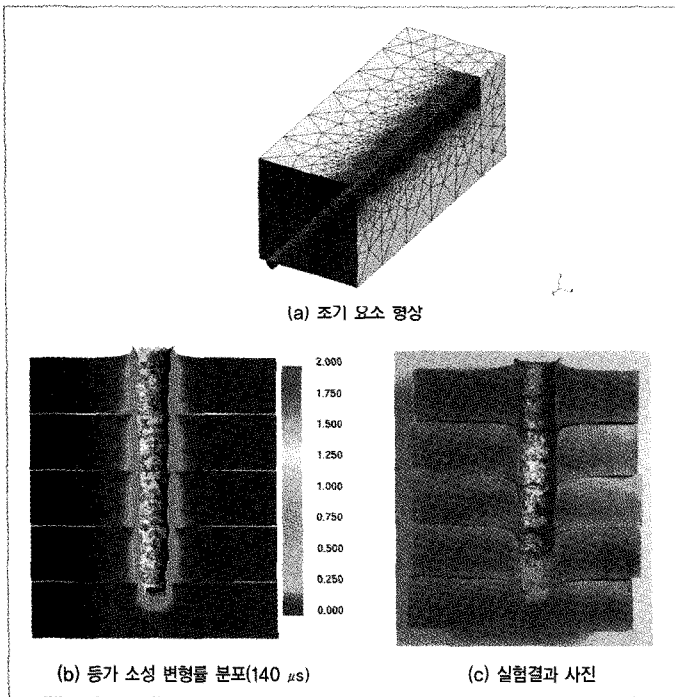


그림 4 WHA 탄자의 수직 관통 해석 결과

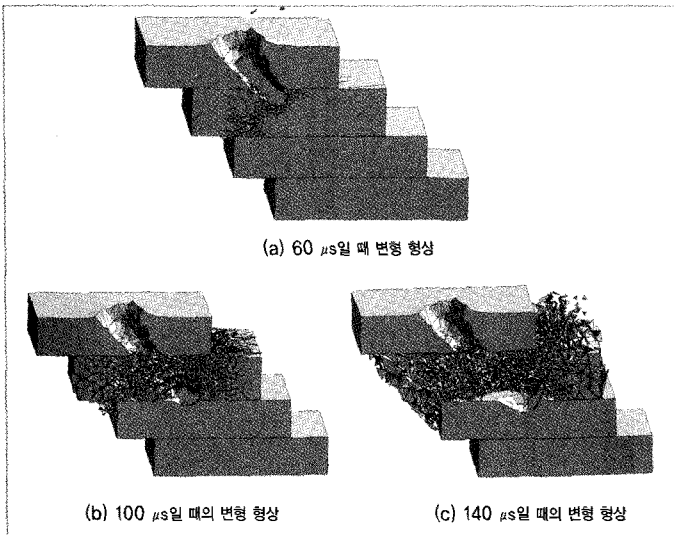


그림 5 세라믹 재료의 경사 관통 해석 결과

쓰이는 기법으로 관통 중 소성변형 에너지에 의한 단열 가열이 발생하며 용융점의 절반 온도에서 유동응력 값이 없어지므로 요소 소진이 가능한 것이다. 접촉력 처리를 위해 modified defense node 알고리즘을 이용하였다. 그림 4(b), (c)에서 볼 수 있듯이 크레이터와 남은 탄자의 형상 등에서 해석 결과와 실험 결과가 유사함을 알 수 있다.

세 번째 예제로서 세라믹 경사 관통 해석 예제이다. 이 예제는 세라믹과 금속재가 복합되어 적층된 표적을 긴 관통자가 관통하는 문제이며 요소 소진, 절점 분리, 자기 접촉 등 동적 취성 해석 코드의 거의 모든 기능을 사용해야 해석이 가능한 문제이다. 그림 5(a)에서 볼 수 있듯이, 연강 판들과 AD85 세라믹 판이 적층된 표적을 45도로 기울어서 관통하는 문제를 해석했다. 해석에서 사용한 세라믹 파괴 모델로서 파괴 시작 모델은 Rajendran-Grove 모델을 사용했으며 파괴 후 모델은 저자에 의해 제안된 파괴 후 모델을 사용하였다. 이는 damage 이론 및 granular material 이론에 근거하여 항복 응력이 파괴되지 않은 재료의 항복 응력에 대해 일정한 비율로 작게 하고 재료의 유동 응력을 압력에 따라 다르게 하는 방법이다. 그림 5(a), (b), (c)에서 볼 수 있듯이, 관통이 진행되면서 초기에는 ring 크랙과 유사한 형태의 방향성을 가지는 크랙이 자라며 시간이 지나면서 파동의 전파와 반사에 의해 거의 대부분의 영역에서 크랙이 발생하여 무수한 조각으로 깨지는 형상을 보인다. 탄자가 세라믹 영역을 관통하고 난 다음에는 크랙의 발달에 의해 생긴 세라믹 조각들이 서로의 접촉에 의해 래디얼 방향으로 팽창함을 볼 수 있다.

맺음말

이 글에서는 고속 충돌 해석을 위한 삼각형/사면체 요소를 적용한 operator-splitting 유한 요소 해석 기술에 대해 소개하였다. 이 기법은 기존 삼각형/사면체 요소의 체적 잠김 현상이 없고 사각형/육면체 요소에 비해 요소 왜곡으로 해석이 중단되지 않고, 정확한 접촉처리가 가능하고, 자동 요소생성을 사용한 리매핑 적용이 용이하다. 따라서 이 방법은 다양한 재료의 고속충돌 및 동적 파괴 해석 기법에서 중요한 위치를 차지할 것으로 기대된다.