

고유벡터의 변화량에 의한 비례감쇠구조물의 변경질량 및 그 위치 해석

이정윤*

(논문접수일 2009. 7. 31, 심사완료일 2010. 3. 9)

Analysis of mass and location of proportional damping system using the
change of eigenvectors

Jung Youn Lee*

Abstract

In spite of a large amount of previous research, detail study on modified mass in proportional damping system is not well understood. It is common to predict structural dynamic design parameters due to the change of mass, but to predict the amount of modified mass and the location where the mass is being modified are rarely found in previous literature. Such inverse problem required detail analytical study in order to understand structural modification in proportional damping system. This paper predicts the modified mass and the modified mass location in proportional damping system using sensitivity coefficients and iterative method. The sensitivity coefficients are obtained from the change of eigenvectors due to mass modification. This method is applied to a horizontal beam and three degree of freedoms system. To validate the predicted changing mass and its location, the obtained results are compared to the reanalysis result which shows good agreement.

Key Words : Sensitivity Coefficient(감도 계수), Dynamic Characteristics(동특성), Proportional damping system(비례감쇠계)

1. 서론

최근 컴퓨터 분야의 지속적인 발전으로 복잡한 공작기계 등의 유한요소해석이 가능하게 되었다. 이러한 유한요소 모

델을 이용하면 실험이 어려운 다양한 해석을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 근사적으로 계산할 수 있다.

기계 구조물이 경량화, 다양화, 소형화됨에 따라 구조물의 동특성을 해석하는 것이 중요사항이 되고 동특성을 개선하

* 경기대학교 기계시스템공학과 (jylee@kgu.ac.kr)
주소: 442-760 경기도 수원시 영통구 이의동 산 94-2

고자 많은 연구들이 시도되었다.

이 분야의 연구로 Fox⁽¹⁾등이 구조 변경 후 고유벡터 변화량이 기존의 고유 벡터에 감도계수를 곱한 선형 결합으로 표시될 수 있음을 보인 이후로 Ahmadian⁽²⁾등은 유한요소 모델 보정을 정규화 방법을 사용하였고 Friswell⁽³⁾은 주어진 동특성으로부터 강성변화를 구하고 이로부터 구조물의손상을 예측하였으며 Wei⁽⁴⁾와 Zhang⁽⁵⁾등은 질량변화를 구하여 구조물의 부가 질량을 찾아내는 연구를 하였다.

감쇠 구조물에 대한 연구는 Adhikari⁽⁶⁾가 선형 감쇠 이산계에서의 고유치와 고유벡터의 변화 비율을 시스템의 변수를 고려하여 구하였고 Lee⁽⁷⁾는 대수화적인 방법을 통하여 고유치와 고유벡터를 구하였다. 하지만 많은 연구에도 불구하고 구조물의 감쇠를 정확히 표현하는데 어려움이 많기 때문에 일반적으로 해석을 간단히 하기 위해 비례감쇠를 사용한다. 비례감쇠를 사용하면 감쇠 행렬이 질량 및 강성행렬과 마찬가지로 대각화가 가능하고 고유벡터도 복소모드가 아니라 실수모드가 되기 때문이다.

구조물의 부가된 질량의 위치와 크기를 예측하는 문제는 구조물의 설계파라미터 변경에 의한 동특성 변화의 역처리 문제(inverse problem)이다. 이에 대한 연구는 Zhang⁽⁸⁾이 구조물에 요구되는 고유진동수를 얻기 위해 질량을 어느 곳에 설치해야하는지 조사하였다.

그러나 그 동안 다양한 연구 노력에도 불구하고 비례감쇠 구조물의 동특성 변화로부터 질량 변경 위치와 크기를 정확히 예측하는데 어려움이 있었다. 왜냐하면 지금까지 동특성 변화로부터 질량 변경 위치와 크기를 예측하기 위해서는 고유 벡터의 변화량이 없다고 가정하였기 때문에 변경량이 많으면 예측하는데 오차가 증가하기 때문이다.

본 연구에서는 질량변경 위치와 크기를 잘 예측할 수 있도록 구조 변경 전, 후의 고유벡터의 변화량을 고려하여 감도계수를 해석한 다음, 이 감도계수와 모드 질량변화량을 반복법을 이용하여 질량 변화량을 해석하는 알고리즘을 개발하였다. 이를 이용하여 비례 감쇠계의 변경된 질량 위치 및 크기를 예측하고 외팔보와 3자유도계에 적용하여 유효성을 검증한다.

2. 이론

2.1 비례감쇠계의 동특성 해석

N자유도 비례 감쇠계에서의 자유진동 운동방정식은 다음과 같이 된다.

$$[m_o]\{\ddot{x}\} + [c_o]\{\dot{x}\} + [k_o]\{x\} = 0 \quad (1)$$

여기서 $[m_o], [c_o]$ 와 $[k_o]$ 는 구조 변경 전 질량, 감쇠 및 강성행렬이 이다.

모드 좌표와의 관계 $\{x\} = [\phi_o]\{q\}$ 을 이용하여 식 (1)을 변환하면 다음과 같이 된다.

$$[\phi_o]^T [m_o] [\phi_o] \{\ddot{q}\} + [\phi_o]^T [c_o] [\phi_o] \{\dot{q}\} + [\phi_o]^T [k_o] [\phi_o] \{q\} = 0 \quad (2)$$

여기서 $[\phi_o]$ 는 비감쇠 정규화된 모드행렬이다. $[c_o]$ 를 대각화하기 위해 다음과 같이 비례감쇠(Rayleigh damping)로 가정한다.

$$[c_o] = \beta [m_o] + \gamma [k_o] \quad (3)$$

여기서 β 와 γ 는 비례감쇠상수이며 식 (3)을 식 (2)에 대입하고 정리하면 다음과 같이 된다.

$$[I] \{\ddot{q}\} + (\beta [I] + \gamma [\lambda]) \{\dot{q}\} + [\lambda] \{q\} = 0 \quad (4)$$

$[I]$ 는 단위행렬로 대각행렬이며 $[\lambda]$ 는 비감쇠 고유치 행렬로 이 역시 대각행렬이다. 따라서 식 (4)로부터 비례감쇠계의 고유진동수를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\omega_{doi} = \omega_{noi} \sqrt{1 - \zeta_{oi}^2} \quad (5)$$

여기서 $\omega_{doi}, \omega_{noi}$ 는 i 차 감쇠 및 비감쇠 고유진동수이며 감쇠비 $\zeta_{oi} = \frac{\beta + \gamma \omega_{oi}^2}{2\omega_{oi}}$ 이다. 따라서 비례감쇠계의 고유모드는 비감쇠계와 일치하고 고유진동수는 비감쇠계의 고유진동수와 비례감쇠상수 β 와 γ 로부터 구할 수 있다.

2.2 동특성 변화로부터 감도계수의 해석

Fox⁽¹⁾는 비감쇠 구조물의 고유 벡터의 변화량을 변경 전 고유벡터의 선형결합으로 표시될 수 있다고 다음과 같이 가정하였다.

$$\{\Delta \phi\}_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \{\phi_o\}_k \quad (6)$$

여기서 $\{\Delta\phi\}_i$ 는 i 차 모드의 고유벡터 변화량이고 α_{ki} 는 k 차 모드에 대한 i 차 모드의 감도계수이며 $\{\phi_o\}_k$ 는 구조 변경 전 k 차 모드의 고유벡터이다. 비례감쇠제도 고유벡터는 비감쇠구조물과 동일하므로 식 (6)을 이용하면 다음 식으로 된다.

$$[\Delta\phi] = [\alpha][\phi_o] \quad (7)$$

$$[\alpha] = [\Delta\phi][\phi_o]^{-1} \quad (8)$$

여기서 $[\Delta\phi]$ 와 $[\alpha], [\phi_o]$ 는 고유벡터 변화량행렬과 감도계수행렬, 구조 변경 전 고유벡터행렬이다. 즉 감도계수행렬은 구조 변경 전 고유벡터행렬과 고유벡터 변화량행렬을 이용하여 구할 수 있다.

2.3 기존의 감도해석 방법

Fox⁽¹⁾는 질량 변경 후 감도계수를 다음과 같이 구하였다.

$$\alpha_{ii} = -\frac{\Delta m_{ii}}{2} \quad (9)$$

$$\alpha_{ij} = \frac{-\Delta m_{ij}\omega_{noj}^2}{\omega_{noi}^2 - \omega_{noj}^2} \quad (10)$$

$$\Delta m_{ij} = \{\phi_o\}_i^T [\Delta m] \{\phi_o\}_j \quad (11)$$

여기서 Δm_{ij} 는 각각 i 차 모드의 j 모드변화에 의한 질량 변화량이며 ω_{noi}^2 와 ω_{noj}^2 는 i 차 및 j 차 비감쇠 고유진동수이다.

식 (11)은 행렬로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\phi_o]^T [\Delta m] [\phi_o] = [\Delta m_{ij}] \quad (12)$$

그러나 위 방법은 구조물에 질량 변경 후에도 고유 벡터의 변화가 없다고 가정하였기 때문에 변경량이 많으면 감도 계수의 오차가 증가하여 실제 구조물의 적용에는 한계가 있다. 이런 문제점을 개선하기 위해서 다음과 같은 방법⁽⁷⁾이 제안되었다.

$$\alpha_{ii} = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 + \Delta m_{ii} + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{ik} \right\} + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{qk}, \quad i = j \quad (13)$$

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = - \left\{ \Delta m_{ij} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{ik} + \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta m_{jk} + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta m_{qk} \right\} - \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj}, \quad i \neq j \quad (14)$$

여기서 식 (13)~(14)는 변경 전 시스템의 동특성과 설계 파라미터 변경량을 가지고 감도계수를 해석하여 변경 후 동특성을 정확히 예측하는데 사용되었다. 이에 반해 이번 연구에서는 역으로 변경 전, 후의 동특성을 가지고 감도계수를 해석하고 이 감도계수를 이용하여 변경된 질량의 크기 및 위치를 예측한다.

2.4 변경된 질량 크기 및 위치 해석

비례감쇠계의 변경된 질량 위치 및 크기를 구하기 위해 다음과 같은 알고리즘을 개발하였다.

- 1) 식 (8)을 사용하여 변경전 고유벡터 행렬과 고유벡터 변화량 행렬로부터 감도계수 행렬을 구한다.
- 2) 앞에서 구한 감도계수 α_{ij} 를 식 (13), (14)에 대입하면 N 개 자유도일 경우 방정식은 $N \times N$ 개가 나오고 미지수인 Δm_{ij} 도 $N \times N$ 개이므로 Δm_{ij} 를 구할 수 있다. 그러나 이렇게 하면 행렬의 크기가 자유도수 N 의 제곱에 비례하여 커져 비효율적이 되므로 다음과 같은 반복법을 사용하여 Δm_{ij} 를 해석하였다.

먼저 초기치를 구하기 위해 감도계수 α_{ij} 와 Δm_{ij} 은 미소량이라고 가정하면 식 (13), (14)에서 2차항은 무시할 수 있고 다음과 같이 된다.

$$\alpha_{ii} = -\frac{1}{2} \Delta m_{ii} \quad i = j \quad (15)$$

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = -\Delta m_{ij}, \quad i \neq j \quad (16)$$

$\Delta m_{ij} = \Delta m_{ji}$ 이므로 식 (15), (16)에서 반복법의 첫 번

재 값을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\Delta m_{ii}^{(1)} = -2\alpha_{ii}, \quad i = j \quad (17)$$

$$\Delta m_{ij}^{(1)} = -(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}), \quad i \neq j \quad (18)$$

한편 식 (13), (14)의 오른쪽 항에 있는 Δm_{ij} 와 Δm_{ji} 를 왼쪽으로 이동하여 정리하면 다음과 같이 반복식의 알고리즘이 유도된다.

$$\Delta m_{ii}^{(i+1)} = -2\alpha_{ii} - \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_{ki}^2 + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{ik}^{(i)} + \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{qk}^{(i)} \right\}, \quad i = j \quad (19)$$

$$\Delta m_{ij}^{(i+1)} = -\alpha_{ij} - \alpha_{ji} - \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \Delta m_{ik}^{(i)} - \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta m_{jk}^{(i)} - \sum_{q=1}^n \alpha_{qi} \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \Delta m_{qk}^{(i)} - \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{kj}, \quad i \neq j \quad (20)$$

여기서 $\Delta m_{ij}^{(i)}$ 와 $\Delta m_{ij}^{(i+1)}$ 는 각각 $i, (i+1)$ 번 반복했을 때 구한 Δm_{ij} 값이다.

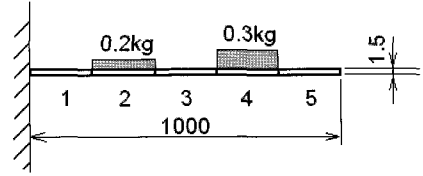
- 3) 위에서 구한 Δm_{ij} 를 모드질량변화량 행렬인 $[\Delta m_{ij}]$ 로 만든다.
- 4) 모드질량변화량 행렬 $[\Delta m_{ij}]$ 와 식 (12)을 이용하면 질량변화량 행렬인 $[\Delta m]$ 을 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$[\Delta m] = \{[\phi_o]^T\}^{-1} [\Delta m_{ij}] [\phi_o]^{-1} \quad (21)$$

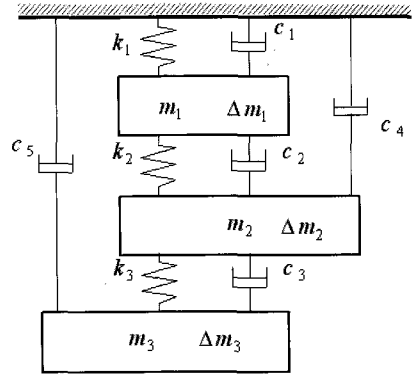
식 (21)으로부터 변경된 질량 크기 및 위치를 해석할 수 있다.

3. 컴퓨터 모사실험

Fig. 1은 위에서 해석한 이론을 적용하기 위해 사용한 외팔보 및 3자유도계의 모델을 나타낸다. 구조 변경 전의 외팔보 길이는 1000mm, 두께 1.5mm, 폭 50mm, 비중은 7.85로 하여 총 질량은 0.588kg이고 종탄성계수는 210GPa, 비례감쇠상수는 $\beta = 0.1$ 와 $\gamma = 0.01$ 로 하였다. 3 자유도계의 구조



(a) cantilever



(b) 3 degree of freedom

Fig. 1 Model of cantilever and 3 degree of freedom system

변경 전 질량은 각각 2kg과 1.5kg, 2.5kg 강성은 2N/m와 1.8N/m, 3N/m로 하였으며 비례감쇠상수는 $\beta = 0.12$ 와 $\gamma = 0.2$ 로 하였다. 3자유도계 변경 전 비례감쇠계의 질량, 감쇠 및 강성행렬은 다음과 같다.

$$[m_o] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{bmatrix} \quad [k_o] = \begin{bmatrix} 3.8 & -1.8 & 0 \\ -1.8 & 4.8 & -3.0 \\ 0 & -3.0 & 3.0 \end{bmatrix}$$

$$[c_o] = \begin{bmatrix} 1.36 & -0.36 & 0 \\ -0.36 & 1.41 & -0.4 \\ 0 & -0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

4. 결과 및 고찰

외팔보의 경우 질량의 변화를 주기 위해서 2번과 4번 요소에 각각 0.2kg, 0.3kg을 추가하였고 3자유도계는 첫 번째 질량에 0.4kg, 세 번째 질량에 0.9kg 부가하여 변경된 고유진동수와 고유벡터를 계산하였다. 그러나 구조물에 부가된 질량의 위치와 크기를 예측할 때에는 변경 전, 후의 고유진동수와 고유벡터만 가지고 해석한다.

Table 1 Comparison of natural frequencies before and after modification in proportional damping system

(a) cantilever			
mode	modification (rad/s)		$\frac{\omega_{di} - \omega_{doi}}{\omega_{doi}}$ (%)
	before ω_{doi}	after ω_{di}	
1	0.248	0.231	-6.79
2	1.575	1.488	-5.52
3	4.425	3.946	-10.83
4	8.736	8.184	-6.31
5	14.475	13.450	-7.08
6	23.935	22.423	-6.31
7	34.709	32.514	-6.32
8	49.437	44.766	-9.44
9	67.679	62.982	-6.94
10	90.313	86.916	-3.76

(b) 3 degree of freedom system			
mode	modification (rad/s)		$\frac{\omega_{di} - \omega_{doi}}{\omega_{doi}}$ (%)
	before ω_{doi}	after ω_{di}	
1	0.0342	0.0148	-56.68
2	0.1987	0.1778	-10.49
3	0.3257	0.3147	-3.38

4.1 고유진동수 변화 검토

Table 1(a)는 외팔보의 고유진동수 변화를 나타낸 표로 외팔보의 요소가 5개이므로 10개의 고유진동수가 존재하였다. 질량의 증가로 고유진동수는 변경 전에 비해 최대 10.83% 감소하였다. 3자유도계의 고유진동수 변화를 Table 1(b)에 나타내었다. 고유진동수가 최대 56.68%까지 감소하였다. 이는 질량 변경이 많았기 때문으로 판단된다.

4.2 고유벡터 변화 검토

Table 2에 변경 전, 후 고유벡터를 모드질량을 1로 하여 나타내었다. 외팔보의 경우는 10개의 모드가 3자유도계는 3개의 모드가 존재하였다.

Table 3에 고유벡터 변화량을 변경 전, 후의 고유 벡터 차로 구하여 나타내었다.

Table 2 Comparison of eigenvectors before and after modification

(a) cantilever										
mode	before modification									
	1	-0.1662	-0.0158	-0.5985	-0.0267	-1.2010	-0.0329	-1.8910	-0.0355	-2.6080
2	-0.7854	-0.0606	-1.7830	-0.0264	-1.5380	0.0527	0.1828	0.1119	2.6100	0.1248
3	-1.5870	-0.0819	-1.3820	0.1065	1.2430	0.0996	1.0380	-0.1242	-2.6240	-0.2061
4	-2.0160	-0.0163	0.8362	0.1865	0.8847	-0.1813	-1.7210	0.0467	2.6560	0.2940
5	1.7930	-0.1268	-1.9080	0.0357	1.9050	0.0476	-1.5890	-0.1136	2.5620	0.3695
6	1.0110	-0.3590	-0.4115	0.4206	-0.1987	-0.4321	0.7321	0.3745	-2.6980	-0.5228
7	-0.1316	0.5905	-1.4470	-0.3454	1.6760	-0.2071	-0.4202	0.5646	-2.9270	-0.7308
8	0.7398	0.7314	-1.4570	0.4169	-0.9661	-0.6685	1.3540	-0.5027	2.9900	0.9720
9	-1.0580	-0.6538	-0.2112	-1.1560	0.7884	-0.9291	1.3170	-0.1083	2.8540	1.1730
10	0.2223	0.1134	0.3413	0.3198	0.6063	0.6659	1.2050	1.3170	7.1120	3.5850

(b) 3 degree of freedom system										
mode	after modification									
	1	-0.1560	-0.0148	-0.5606	-0.0249	-1.1230	-0.0306	-1.7620	-0.0329	-2.4240
2	-0.7386	-0.0566	-1.6450	-0.0221	-1.3600	0.0521	0.3131	0.1079	2.6460	0.1198
3	-1.4010	-0.0738	-1.2390	0.0940	1.0520	0.0850	0.7387	-0.1185	-2.6320	-0.1877
4	-1.8250	-0.0154	0.8987	0.1776	0.9816	-0.1706	-1.4910	0.0474	2.5740	0.2696
5	1.7450	-0.1051	-1.7590	0.0238	1.6750	0.0485	-1.5350	-0.0895	2.4940	0.3433
6	1.1290	-0.3196	-0.2811	0.3974	0.0555	-0.4073	0.9100	0.3313	-2.6520	-0.4941
7	-0.3634	0.5430	-1.3530	-0.3198	1.5550	-0.1510	-0.0914	0.5498	-3.0580	-0.7323
8	0.4221	0.7077	-1.2910	0.3552	-0.5478	-0.6131	0.9057	-0.4779	2.7880	0.8481
9	-0.8076	-0.6029	-0.5308	-1.0940	1.0400	-0.8782	1.0440	-0.1443	2.4960	0.9833
10	0.1563	0.0899	0.3500	0.2637	0.3499	0.5484	1.5540	1.1770	7.3300	3.6320

(b) 3 degree of freedom system

mode	modification					
	before			after		
1	0.2227	0.4230	0.5029	0.1963	0.3744	0.4528
2	0.6233	0.1231	-0.2830	0.5772	0.1346	-0.2258
3	0.2487	-0.6874	0.2588	0.2120	-0.7130	0.1952

4.3 감도계수의 해석

Table 4는 식 (8)을 이용하여 변경 전 고유벡터와 Table 3의 고유벡터 변화량으로부터 감도계수를 해석하여 나타낸 표이다.

4.4 변경된 질량 위치 및 크기의 해석

Table 5는 Table 4의 감도계수와 식 (17)~(20)을 이용하여 모드질량변화량 행렬을 구한 것이다. Fig. 2는 모드질량

Table 3 Delta eigenvectors before and after modification

(a) cantilever

mode	[$\Delta\phi$]									
1	0.0102	0.0010	0.0379	0.0018	0.0780	0.0023	0.1290	0.0027	0.1840	0.0027
2	0.0468	0.0040	0.1380	0.0043	0.1780	-0.0006	0.1303	-0.0040	0.0360	-0.0050
3	0.1860	0.0080	0.1430	-0.0125	-0.1910	-0.0146	-0.2993	0.0057	-0.0080	0.0184
4	0.1910	0.0009	0.0625	-0.0089	0.0969	0.0107	0.2300	0.0007	-0.0820	-0.0244
5	-0.0480	0.0217	0.1490	-0.0119	-0.2300	0.0009	0.0540	0.0242	-0.0680	-0.0262
6	0.1180	0.0394	0.1304	-0.0232	0.2542	0.0248	0.1779	-0.0432	0.0460	0.0287
7	-0.2318	-0.0475	0.0940	0.0256	-0.1210	0.0561	0.3288	-0.0148	-0.1310	-0.0015
8	-0.3177	-0.0237	0.1660	-0.0617	0.4183	0.0554	-0.4483	0.0248	-0.2020	-0.1239
9	0.2504	0.0509	-0.3196	0.0620	0.2516	0.0509	-0.2730	-0.0360	-0.3580	-0.1897
10	-0.0660	-0.0235	0.0087	-0.0561	-0.2566	-0.1175	0.3490	-0.1400	0.2180	0.0470

(b) 3 degree of freedom system

mode	[$\Delta\phi$]		
1	-0.0264	-0.0486	-0.0501
2	-0.0461	0.0115	0.0573
3	-0.0367	-0.0256	-0.0636

Table 4 Sensitivity coefficient in proportional damping system

(a) cantilever

mode	[α_{ij}]									
1	-0.0681	-0.0728	0.0905	-0.0737	0.0057	-0.0788	-0.0440	0.0054	-0.0021	-0.0169
2	0.0019	-0.0554	-0.0296	-0.0393	0.0215	-0.0952	0.0287	-0.0425	-0.0066	0.0081
3	-0.0003	0.0040	-0.1087	-0.0059	-0.0514	0.0180	0.0901	0.0244	0.0344	0.0085
4	0.0001	0.0013	0.0014	-0.0636	-0.0101	-0.0437	-0.0259	0.1091	-0.0158	-0.0371
5	0.0000	-0.0002	0.0047	0.0035	-0.0718	0.0138	-0.0691	0.0295	0.1175	-0.0481
6	0.0000	0.0004	-0.0006	0.0059	-0.0048	-0.0639	-0.0031	-0.0647	-0.0071	-0.0174
7	0.0000	-0.0001	-0.0013	0.0015	0.0113	0.0023	-0.0648	0.0490	0.0367	-0.0673
8	0.0000	0.0000	-0.0002	-0.0032	-0.0027	0.0150	-0.0233	-0.0965	0.0012	0.0768
9	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0002	-0.0047	0.0007	-0.0078	-0.0024	-0.0711	0.0725
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0006	0.0078	-0.0161	-0.0321	-0.0399

(b) 3 degree of freedom system

mode	[α_{ij}]		
1	-0.1056	0.0587	-0.1125
2	-0.0065	-0.0959	-0.0054
3	0.0045	0.0023	-0.0330

변화량 행렬 [Δm_{ij}]을 이용하여 변경된 질량의 크기를 예측한 것으로 반복횟수에 따라 나타낸 그림이다. 외팔보의 경

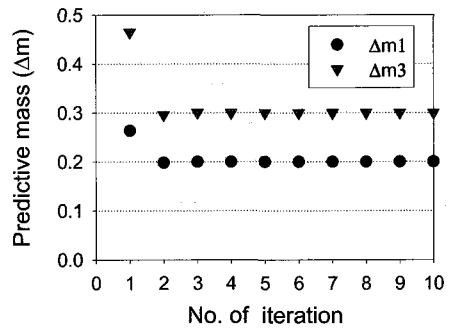
Table 5 Change of modal mass matrix after iteration

(a) cantilever

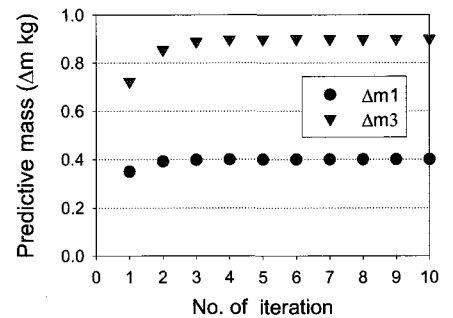
mode	[Δm_{ij}]									
1	0.1510	0.0868	-0.1134	0.0927	-0.0145	0.1124	0.0640	-0.0053	0.0102	0.0296
2	0.0868	0.1268	0.0233	0.0522	-0.0232	0.1230	-0.0309	0.0566	0.0128	-0.0127
3	-0.1134	0.0233	0.2696	-0.0018	0.0654	-0.0311	-0.1231	-0.0301	-0.0510	-0.0131
4	0.0927	0.0522	-0.0018	0.1480	0.0056	0.0616	0.0299	-0.1287	0.0206	0.0575
5	-0.0145	-0.0232	0.0654	0.0056	0.1607	-0.0151	0.0624	-0.0416	-0.1434	0.0750
6	0.1124	0.1230	-0.0311	0.0616	-0.0151	0.1640	0.0087	0.0628	0.0133	0.0175
7	0.0640	-0.0309	-0.1231	0.0299	0.0624	0.0087	0.1591	-0.0335	-0.0349	0.0853
8	-0.0053	0.0566	-0.0301	-0.1287	-0.0416	0.0628	-0.0335	0.2447	0.0025	-0.0885
9	0.0102	0.0128	-0.0510	0.0206	-0.1434	0.0133	-0.0349	0.0025	0.1746	-0.0593
10	0.0296	-0.0127	-0.0131	0.0575	0.0750	0.0175	0.0853	-0.0885	-0.0593	0.1043

(b) 3 degree of freedom system

mode	[Δm_{ij}]		
1	0.2112	-0.0522	0.1080
2	-0.0522	0.1918	0.0031
3	0.1080	0.0031	0.0661



(a) cantilever



(b) 3 degree of freedom system

Fig. 2 Predicted mass according to the No. of iteration

Table 6 Predictive mass in cantilever and 3 d.o.f system

(a) cantilever

Element No.	mass(kg)			ratio $\Delta m_p / \Delta m (\%)$
	original m	additive Δm	predictive Δm_p	
1	0.471	0.00	0.00	100.00
2	0.471	0.20	0.20	100.00
3	0.471	0.00	0.00	100.00
4	0.471	0.30	0.30	100.00
5	0.471	0.00	0.00	100.00

(b) 3 degree of freedom system

Element No.	mass(kg)			ratio $\Delta m_p / \Delta m (\%)$
	original m	additive Δm	predictive Δm_p	
1	2.0	0.40	0.40	100.00
2	1.5	0.00	0.00	100.00
3	2.5	0.90	0.90	100.00

우 1회 반복 시 2번 요소에는 0.263kg, 4번요소에는 0.465kg으로 예측하여 오차가 많이 발생하였으나 4번 반복하였을 때 질량 증가를 정확히 예측하였다. 3 자유도계도 마찬가지로 반복횟수를 4번 하였을 때 1번째 질량에는 0.4kg, 3번째 질량에는 0.9kg 증가하는 것으로 예측하였다.

Table 6은 질량 위치와 크기의 예측한 결과를 나타낸 표로 질량이 많이 변경되었지만 변경된 질량의 위치 및 크기를 잘 예측하여 제안된 알고리즘이 타당함을 알 수 있었다.

5. 결론

비례감쇠계 구조물의 변경 전, 후의 동특성을 이용하여 구조물에 변경된 질량 위치와 크기를 예측하는 알고리즘을 개발하였으며 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 구조 변경 전, 후의 고유벡터 변화량을 이용하여 감도 계수를 해석하는 방안을 제안하였다.
- (2) 감도 계수로부터 반복법을 이용하여 모드질량변화량 행렬을 해석하는 알고리즘을 개발하였다.
- (3) 모드질량변화량 행렬과 유한요소법의 변경 전 질량 행렬과 비교하여 구조물의 질량 변경 위치 및 크기 해석하는

방안을 제안하였다.

- (4) 본 방법을 구조 변경한 외팔보와 3자유도계에 적용한 결과 구조물 변경 후 질량의 변경 위치 및 크기를 잘 예측하므로 제안된 방법이 타당함을 알 수 있었다.

후 기

본 연구는 2007학년도 경기대학교 학술연구비(일반연구 과제) 지원에 의하여 수행되었음

참 고 문 헌

- (1) Fox, R. L. and Kapoor. M. P., 1968. "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors." *AIAA Journal*, Vol. 6, No. 12 pp. 2426~2429.
- (2) Ahmadian, H., Mottershead, J. E., and Friswell M. I., 1998, "Regularization Methods for Finite Element Model Updating," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 12, No. 1, pp. 47~64.
- (3) Friswell, M. I., Penny, J. E. T., and Wilson, D. A. L., 1994, "Using Vibration Data and Statistical Measures to Locate Damage in Structures," *Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 9, No. 4, pp. 239~254.
- (4) Wei, F. S. and Zhang, D. W., 1989, "Mass Matrix Modification Using Element Correction Method," *AIAA Journal*, Vol. 27, No. 1, pp. 119~121.
- (5) Zhang, Q., Wang, W., Allemang, R. J., and Brown, D. L., 1989, "Prediction of Mass Modification for Desired Natural Frequencies," *Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 4, No. 2, pp. 39~44.
- (6) Adhikari S., 2000, "Calculation of Derivative of Complex Modes using Classical Normal Modes", *Computer & Structures*, Vol. 77 No. 2, pp. 625~633.
- (7) Lee, J. Y., 2002, "A Structural Eigenderivative Analysis by Modification of Design Parameter," *Transactions of KSME A*, Vol. 26, No. 4, pp. 739~744.
- (8) Zhang, Q. and Kim, K. K., 1993, "A review of Mass Matrixes for Eigenproblems," *Journal of Computer and Structures*, Vol. 46, pp. 1041~1048.