강도한계 이선형 단자유도 시스템의 비탄성 변위비

Inelastic Displacement Ratio for Strength-limited Bilinear SDF Systems

한상환¹⁾ · 이태 $d^{2)}$ · 석승 $q^{3)}$

Han, Sang Whan · Lee, Tae Sub · Seok, Seung-Wook

국문 요약 >> 본 연구는 철골 모멘트 골조의 이력거동을 잘 나타내는 강도한계 이선형 단자유도 시스템에 대하여 지반조건, 후탄성 기울기, 감쇠비, 항복강도 저감계수, 고유주기 등의 변화가 비탄성변위비에 미치는 영향을 분석하였다. NEHRP의 기준에 따라 B(보통암 지반), C(매우 조밀한 토사지반), D(단단한 토사지반)의 지반조건에 해당하는 총 240개의 지진 가속도에 대하여 비선형 시간이력 해석을 수행하였다. 본 연구에서는 비탄성 거동 하에서 *P*-Δ 효과를 반영할 수 있도록 음강성비를 -0.1 에서 -0.5까지 고려하였다. 비선형 회귀분 석을 통하여 감쇠비 2%, 5%, 10%, 20%에 대한 강도한계 이선형 모델의 비탄성 변위비와 로그표준편차식을 제안하였다.

주요어 강도한계 이선형 모델, 비탄성 변위비, 성능기반 설계, 비선형 회귀분석

ABSTRACT >> This study evaluated the effect of vibration, level of lateral yielding strength, site conditions, ductility factor, strain-hardening ratio, and post-capping ratio of the strength limited bilinear SDF systems on the inelastic displacement ratio. The nonlinear response history analysis was conducted using 240 ground motions which were collected at the sites classified as site classes B, C, and D according to the NEHRP. To account for the P- Δ effects, this study considered negative stiffness ratios ranging from -0.1 to -0.5 of elastic stiffness. Four different damping ratios are used: 2, 5, 10, and 20%. From this study, an equation of inelastic displacement ratio was proposed using nonlinear regression analysis.

Key words Strength-limited SDF system, Inelastic displacement ratios, Performance-based design, Nonlinear regression

1. 서 론

현 내진설계기준⁽¹⁾⁻⁽³⁾에서는 지진에 대한 구조물의 거동 을 예측하기 위해서 탄성해석 방법이 아닌 비탄성 해석방법 을 제시하고 있다. 이는 지진에 의한 구조물의 피해가 탄성 범위를 벗어나 비선형 변위와 뒤틀림을 갖기 때문에 이를 근사적으로 예측하기 위함이다. 하지만 비탄성 해석방법은 구조물의 비선형 동적 해석을 수행하기 때문에 상세한 지식 이 요구되며, 계산과정 또한 오래 걸리므로 현 내진설계 기준 에서는 간단한 분석 방법들(Simplified Analysis Procedures) 이 제안되어 왔다. 특히 탄성해석을 통해 비탄성 변위를 예

¹⁾ 정회원·한양대학교 건축공학과 교수

측하는 비탄성 변위비(Inelastic Displacement Ratio, C_R)는 많은 연구자에 의해 진행되었으며 그 내용은 다음과 같다.

첫 번째 연구는 Veletsos 와 Newmark⁽⁴⁾에 의해 연구된 것으로 단순한 펄스(Simple Pulses) 와 3개의 지진 데이터 들을 이용해 완전 탄소성(Elasto-plastic) 단자유도 시스템의 최대 비탄성 변위와 탄성변위의 관계를 밝혀냈다. 완전 탄 소성 시스템은 시스템이 항복 이후 더 이상 강도가 증가하 지 않고 변위가 발생하도록 이상화된 시스템으로, Veletsos 는 이 연구를 통해 단주기 영역은 비탄성 변위의 값이 탄성 변위보다 크지만 장주기 구간에서는 최대 탄성변위와 비탄 성변위 가 동일한 값을 갖는 것을 밝혀내어, 변위일정법칙 (Equal Displacement Rule) 이론을 제안해 냈다. Ramirez⁽⁵⁾ 등은 감쇠비 30%이하의 이선형 단자유도 감쇠 시스템의 비 탄성 변위비를 비선형 회귀분석을 통해 구했다. Chopra와 Chintanapakdee⁽⁶⁾는 B, C, D 및 near-fault 지반조건(진원 으로부터 15km이내에서 발생 하며, 속도에 대한 시간이력 곡선에서 상대적으로 큰 속도펄스를 갖는 지반조건)에서 비 탄성 변위비에 대한 연구를 하였다. 이들은 T_c (응답스펙트

²⁾ 한양대학교 대학원 석사과정

⁽교신저자: arch_struct@naver.com)

³⁾ 한양대학교 대학원 석사과정

본 논문에 대한 토의를 2010년 10월 31일까지 학회로 보내 주시면 그 결 과를 게재하겠습니다.

⁽논문접수일 : 2010. 4. 14 / 수정일 1차 : 2010. 5. 7, 2차 : 2010. 5. 14 / 게재확정일 : 2010. 5. 14)

럼에서 가속도 민감부분과 속도 민감부분을 나누는 영역)를 이용하여 주기값을 정규화하여 비탄성 변위비를 계산해 냈 다. 또한 Ruiz-Garcia 와 Miranda⁽⁷⁾는 NEHRP 지반조건 B, C, D에서 측정한 216개의 지진데이터를 이용하여 완전 탄소성 시스템에 대해 R_v (지진의 탄성 강도를 시스템의 항 복강도로 나누어 정규화한 값)및 지진의 규모, 지반 조건이 비탄성 변위비에 미치는 영향을 조사하였다. Ruiz-Garcia의 연구에 따르면 비탄성 변위비는 1초보다 긴 주기에서 지진 의 크기에 영향을 받지 않으며, 비탄성 변위비는 주기와 항 복 강도비의 값에 가장 크게 영향을 받는다고 정의하였다. 하지만 Ibarra 와 Krawinkler⁽⁸⁾는 이전연구에서 사용하였 던 단순한 이선형 모델이 구조물의 이력거동을 묘사하는데 있어 한계가 있음을 지적하였으며, Han 과 Chopra⁽⁹⁾의 연 구에 의하면 강도한계 이선형 모델이 철골 모멘트 골조의 탄성에서 붕괴까지의 이력거동을 가장 잘 모사한다는 연구 결과를 밝혀냈다. 본 연구의 목적은 철골 모멘트골조의 이 력거동을 잘 모사하는 강도한계 이선형 단자유도 시스템을 NEHRP 지반조건 B, C, D를 사용하여 지반조건, 감쇠비, 항복강도 저감계수, 고유주기, 음강성등이 비탄성 변위비에 어떤 영향을 미치는지 평가하고 비선형 회귀분석을 통해 CR 식을 제안하고자 한다.

2. 비탄성 변우비(Inelastic Displacement Ratio, CR)

2.1 강도한계 이선형모델(Strength-limited Bilinear Model)

그림 1은 본 연구에서 다루는 강도한계 이선형 모델의 (a) 포락선(Backbone-curve) 및 (b)이력거동 (Hysteretic Behavior) 의 특성을 나타낸 것이다. 강도한계 이선형 모델은 이선형 모델과 다르게 초기 탄성강성(K_e), 항복 강도(f_y), 변형경화 강성(α_sk_e) 뿐만 아니라 음강성 (α_ck_e), 최대 강도(f_c) 및 최 대 강도시의 변위(u_c), 연성($\mu_c = \mu_c/\mu_y$), 잔류 강도 ($f_r = \lambda f_y$)의 변수들로 이루어져 있다. 강도한계 이선형 모델은 그림 1(a) 에서 보이는 포락선을 따라 그림 1(b)와 같은 이력곡선을 생성하며 '강도한계 (Strength limit)'라는 특징이 있다. 즉 그림 1(b)와 같이 강도한계 때문에 5에서 6'로 이동하지 못 하고 6으로 이력거동이 제한된다. 만약 강도한계라는 특징 이 없다면 이선형 모델과 같이 계속 증가하는 포락선을 가 지게 된다.

2.2 비탄성 변위비(Inelastic Displacement Ratio, CR)

지진이 가했을 경우 시스템이 탄성상태를 유지하여 그림 1(a)의 점선과 같은 선형의 기울기를 가지는 시스템을 대응 선형 시스템이라고 한다. 하지만 항복강도(f_y)가 지진의 강 도(f_o)보다 작게 되면 시스템은 운동방정식 (1)에 의해 비선 형 이력거동을 하게 된다.

$$\ddot{u} + 2\zeta \omega_n \dot{u} + f_n(u, \dot{u}) / m = -\ddot{u}_g(t)$$
⁽¹⁾

운동방정식을 이용하면, 시스템의 최대 비탄성 변위 (um) 를 수치적으로 계산할 수 있으며, CR은 최대 비탄성 변위 (um)와 최대 탄성변위(uo)의 비로써 정의 할 수 있다.

$$C_R = \frac{u_m}{u_o} \tag{2}$$

최대 비탄성 변위 um은 지진강도에 대한 시스템의 항복 강도 비인 항복강도 저감계수(R)따라 계산되며 R은 다음과 같이 정의된다.



$$R = \frac{m \cdot S_a}{F_y} = \frac{f_o}{f_y}$$
(3)

식 (3)에서 m은 시스템의 질량, Sa는 유사가속도를 의미 하며, 시스템의 R이 정해지면 Ca을 통해 비탄성변위를 예측 할 수 있다.

3. *C*_R의 통계적 분석

본 연구는 강도한계 이선형 단자유도 시스템 C_R의 동적 특성을 알기 위해 캘리포니아주에서 측정한 NEHRP 지반 조건의 240개 지반운동 데이터를 사용하였다. 이 지반운동 데이터는 Ruiz-Garcia와 Miranda⁽¹⁰⁾의 연구에서 사용한 것 으로 규모 5.8~7.7의 범위를 가지며, 지반조건에 따라 B, C, D를 각각 80개씩 분류하였다.

강도한계 이선형 시스템의 비탄성 변위는 Ibarra와 Krawinkler⁽⁸⁾ 에 의해 개발된 단자유도 모델을 사용하였다. 변수의 범위 는 표 1과 같이 지정하였으며 3456000번 (20×5×4×3×3× 4×1×240)의 비선형 동적해석을 수행하여 비탄성 변위를 계 산하였다. 붕괴로 인해 비탄성 변위비 매우 커지는 부분은 제외하였으며 시스템의 통계해석은 정렬법(Counting Method) 을 이용하여 16%, 50%, 84%의 값을 구했다.

3.1 지반조건의 영향

많은 구조물이 B, C, D의 지반조건에서 세워지기 때문 에, 지반조건 차이에 따른 비탄성 변위비를 아는 것은 매우 중요하다. 따라서 본 연구에서는 강도한계 이선형 모델의 지반조건에 의한 *C*_R의 영향을 알기 위해 그림 2와 같이 α s=0.1, α_c=-0.1, μ_c=6, ζ=5%인 시스템을 각 지반별 80개의 지진데이터를 통해 얻은 비탄성 변위비 중간값(*C*_{R-median})과 지반효과를 고려하지 않은 *C*_{R-median}의 값을 비교 분석하였다. Miranda⁽⁷⁾에 따르면 완전 탄소성 시스템에서 단주기 로

〈표 1〉 연구에 사용된 변수의 범위

	범위	개수
T_n	$0.2 \sim 4.0 \ (= 0.2)$	20
α_s	0.03, 0.05, 0.10, 0.20	4
α_c	-0.1, -0.3, -0.5	3
μ_C	2, 4, 6	3
ζ	2, 5, 10, 20 %	4
R	1.5, 2, 4, 6, 8	5
Ground motions	B(80), C(80), D(80)	240

갈수록 지반조건에 의한 *C*^R의 차이는 증가하며 *R*이 증가할 수록 지반의 영향은 더욱 커진다고 하였다. 하지만 강도한 계 이선형 모델에서는 그림 2에서 보는 것과 같이 NEHRP 240개의 지반조건에서 *R* 및 *T*_n의 변화에 따른 B, C, D의 *C*^R 값의 차이는 작았다. 따라서 강도한계 이선형 모델에서 는 지반에 의한 효과는 고려하지 않아도 된다고 판단된다.

3.2 감쇠비의 영향(ζ)

그림 3(a)와 3(b)는 감쇠비가 2, 5, 10, 20%일 때 α_s=0.1, α_c=-0.1, μ_c=6인 시스템의 C_{R-median}을 나타낸 것이다.

Chopra⁽¹¹⁾는 완전 탄소성 시스템이 탄성에서 비탄성으로 넘어갈 때 감쇠에 의한 영향은 작아진다고 밝혔다. 또한 μ=4, 감쇠비 2%인 시스템의 *C*_R은 μ=4, 감쇠비 10%일 때 의 *C*_R에 비해 2배의 큰 값을 갖는다고 밝혔다. 본 연구에서 사용한 강도한계 이선형 모델 또한 그림 3(a) 와 3(b)에 나 타난 것과 같이 감쇠비가 증가할수록 비탄성 변위비는 커 지는 것을 알 수 있다. 또한 *R*=2인 경우에 비해 *R*=6인 경 우 감쇠비의 변화에 따른 *C*_R의 차이가 증가하는 것을 알 수 있다.



〈그림 2〉각 지반별 *C_R-median* (α_s=0.1, α_c=-0.1, μ_c=4, ζ=5%)



〈그림 3〉 ζ 및 T_n의 변화에 따른 비탄성 변위 및 비탄성 변위비의 중간값 (α_s=0.1, α_c=-0.1, μ_c=4, ζ=5%)

3.3 α_s, α_c, μ_c, *R*, *T*_n의 영향

3.3.1 T_n-R에 의한 영향

그림 4는 *T_n*-*R*-*C_R*의 관계를 알기 위해 *α_s*=0.03, *α_c*=-0.1, *μ_c*=6 이고 감쇠비가 2%, 5%인 시스템의 *C_{R-median}*을 나타낸 것이다. 0.8초의 주기를 기준으로 주기가 0.8초보다 클 때는 주기의 증가에 따른 *C_R*의 변화폭은 작았으며, 동일한 주기 에서 *R*이 클수록 *C_R*의 크기는 작아졌다. 하지만 주기가 0.8 초보다 작을 때는 주기가 감소함에따라 *C_R*은 커졌으며 *R*이 증가할수록 *C_R*은 더 큰 값을 갖는 것을 확인 할 수 있다. 이 것은 감쇠비가 변화여도 같은 경향을 나타낸다.

3.3.2 α_c-R에 의한 영향

그림 5는 α_c -*R*-*C*_{*R*}의 관계를 알기 위해 고유주기 0.2, 1.0 초에서 α_s =0.10, μ_c =6이고 감쇠비가 2%, 5%인 시스템에 대해 α_c 과 *R*의 변화에 따른 *C*_{*R*-median}을 나타낸 것이다. *R*이 일정할 때 α_c 변화는 *C*_{*R*}이 무한대가 되는 시스템의 붕괴 (Global Instability, GI)에는 영향을 미치지만, 시스템이 붕 괴되지 않을 경우 *C*_{*R*}에는 영향을 미치지 않는 것을 알 수 있다. 이것은 주기 및 감쇠비가 변하여도 같은 결과를 보인 다. α_c 는 시스템의 붕괴는 중요한 변수로 작용하지만, *C*_{*R*}에 미치는 영향은 미비한 것으로 알 수 있다.





3.3.3 *α_s-R*에 의한 영향

그림 6은 α_s - T_n - C_R 의 관계를 알기 위해 α_c =-0.1, μ_c =4, ζ =5%, R이 2, 6일 때 α_s 와 T_n 의 변화에 따른 $C_{R-median}$ 을 나 타낸 것이다. R=2일 때, α_s 및 주기의 변화가 C_R 에 미치는 영향은 작은 것을 알 수 있다. 하지만 R=6인 경우, α_s 와 C_R 의 관계는 주기에 따라 차이가 나타났다. 시스템이 붕괴된 0.2초의 주기를 제외하고 단주기 영역에서 동일한 α_s 에 대 한 C_R 은 1.0초 이후의 주기보다 더 큰 값을 가졌으며 α_s 가 증가함에 따라 C_R 값은 일정구간까지는 감소 후 일정한 값을 나타냈다. 하지만 주기가 1.0초보다 클 때, α_s 및 주기의 변 화에 따른 C_R 에 미치는 영향은 작은 것을 알 수 있다.

3.3.4 μ_c-T_n에 의한 영향

그림 7은 μ_c - T_n - C_R 의 관계를 알기 위해 α_c =-0.1, α_s =0.1, ζ =5%, R이 2, 6일 때 μ_c 와 T_n 의 변화에 따른 $C_{R-median}$ 을 나 타낸 것이다. μ_c - T_n - C_R 의 관계는 그림 6에서 나타난 것과 비 슷한 결과를 나타냈다. R=2인 경우, μ_c - C_R 의 관계에서 주기 가 미치는 영향은 작았지만, R=6인 경우, μ_c - C_R 는 주기에 따라 차이가 나타났다. R=6 일 때 C_R 은 주기가 짧을수록 더 큰 값을 가졌으며, μ_c 가 증가함에 따라 C_R 은 감소 후 일정한 값을 나타냈다. 하지만 주기가 1.0초보다 클 때는 μ_c 가 C_R 에 미치는 영향이 작을 것을 알 수 있다.



〈표 2	$2 $ C_R	식의	계수	값
------	------------	----	----	---

	a_1	a_2	<i>a</i> ₃	a_4	<i>a</i> 5
$T_n \leq 0.8$	2.84	1.69	3.22	1.28	0.65
$T_n \ge 0.8$	4.07	0.34	5.36	3.14	2.15

4. 비탄성 변위비 제안과 평가

4.1 비선형 회귀분석

본 연구에서는 NEHRP 240개의 지진 데이터를 이용하 여 14,000(=20×4×3×3×4×5)개의 다른 시스템에 대해 3,456,000번의 탄성 및 비선형 동적해석을 통해 *C_R* 값을 구 하였다. 앞에서 설명한 바와 같이 비탄성 변위비는 다양한 변수들이 복잡하게 연관되어 있기 때문에 간단하게 계산할 수 없다. 따라서 본 연구에서는 다양한 변수들이 *C_R*에 미치 는 영향을 비선형 회귀분석하여, *C_R*를 다음의 순서로 제안 해 냈다.

 (1) 시스템의 특성을 0.8초를 기준으로 분류하였으며, ζ
 =5%, 50%의 확률분포를 갖는 (C_R,50%)_ζ=5%를 기준 으로 C_R모델을 제안해 냈다.

$$(C_{R,50\%})_{\zeta=5\%} = 0.97^{R} + \frac{R^{a_{1}}}{(T_{n})^{a_{2}} \cdot 10^{a_{3}} \cdot \mu_{c}^{a_{4}} \cdot \alpha_{s}^{a_{5}}}$$
(4)

(2) 감쇠비가 5%가 아닌 시스템은 C_ζ을 곱하여 C_R을 구 해낸다.

$$C_{\zeta} = \frac{\left(C_{R,50\%}\right)_{\zeta}}{\left(C_{R,50\%}\right)_{\zeta=5\%}} = 1 + \frac{0.06\ln\left(\zeta\right) + 0.17}{(2 \cdot T_n)^{0.39}} R^{0.42}$$
(5)

(3) CR의 자연로그 편차는 다음을 사용하여 계산해낸다.

$$\sigma_{\ln C_R} = -\ln(1 + \frac{4.60 \cdot (-18.05 + 11.44 \cdot \zeta + \ln(\zeta \cdot T_n))}{10^3 \cdot \mu_c^{0.06}(\alpha_s)^{0.08}} \cdot R^{0.4}) \quad (6)$$

4.2 비탄성 변위비의 평가

4.2.1 비탄성 변위비의 확률적 분포

강도한계 이선형 시스템에서 비탄성 변위비가 NEHRP 240개의 지진데이터에서 로그 정규분포를 따르는지 확인하 기 위해 누적분포함수(Cumulative Distribution Function, CDF)의 개념을 이용하여 $T_n=0.8$, R=4, $\alpha_s=0.1$, $\alpha_c=-0.1$, $\mu=6$, $\zeta=5\%$ 인 시스템의 C_R 을 그림 8에 나타냈다. Miranda⁽¹⁰⁾ 는 완전 탄소성 시스템 (Elastoplastic-system)의 비탄성변 위비를 240 개의 지진데이터를 이용하여 누적분포함수를 나타낸 결과 $T_n=0.5$, R=2인 짧은 주기의 강도가 큰 시스 템 (Short-period Strong System)과 $T_n=1.0$, R=6인 긴주기의 약한 강도를 가지는 시스템 모두에서 로그분포를 따르는 것 을 확인하였다. 그림 8을 보면 강도한계 이선형 시스템의 비 탄성 변위비 또한 로그정규분포를 따르는 것을 확인 할 수 있다. 따라서 식 (6) 및 (7)을 이용하여 강도한계 이선형 시 스템의 16% 및 84%의 확률 분포를 갖는 *C*_R을 계산할 수 있다.

4.2.2 제안식의 평가

제안식의 평가는 240개의 지진데이터를 비선형 동적해석 을 통해 얻은 *C*_R과 제안식 (4)-(7)을 통해 얻은 *C*_R을 확률분 포 및 감쇠비의 변화에 따라 비교 분석하였다.

그림 9는 α_s=0.03, α_c=-0.1, μ=6, ζ=5%인 시스템에 대 해 항복강도저감계수(R)를 달리하여 16% 50% 84%의 확 률분포를 나타낸 것이다. 제안식은 C_R이 무한대가 되는 붕



〈그림 8〉 *C_R*의 누적분포 함수

 $(T_n=0.8, R=4, \alpha_s=0.1, \alpha_c=-0.1, \mu_c=6, \zeta=5\%)$



 $(\alpha_s=0.03, \alpha_c=-0.1, \mu=6, \zeta=5\%)$



 $(\alpha_s=0.05, \alpha_c=-0.1, \mu_c=6)$

괴지점을 제외하고 전 주기구간에서 적절하게 예측하는 것 을 알 수 있다.

그림 10은 α_s=0.05, α_c=-0.1, μ=6인 시스템에 대해 50% 의 확률분포로 2, 5, 10, 20%의 감쇠비에 따라 C_R을 나타낸 것이다. R=1.5 일때 제안식이 실제값을 비교적 정확하게 예 측하였지만, R=6, ζ=2%인 시스템의 경우, 제안식과 실제값 이 최대 10%정도 오차가 발생하였다. 이는 R이 큰 시스템 의 경우 주기 및 감쇠비의 변화에 민감하게 변화하기 때문 에 발생한 것으로 판단된다.

5. 결 론

본 연구는 철골 모멘트 골조의 이력특성을 잘 모사하는 강도한계 이선형 단자유도 시스템의 비탄성 변위비에 관하 여 연구하였다. 비탄성 변위비에 미치는 영향과 특성을 파 악하기 위해 NEHRP 240개의 지진데이터를 이용, 강도한 계 이선형 단자유도 시스템을 이루고 있는 연성, 항복강도, 주기, 강성 경화기울기, 음강성 기울기, 감쇠비에 변화를 주 어 비탄성 변위비에 미치는 영향을 조사하였다. 지반 조건 은 비탄성 변위비에 큰 영향을 미치지 않았으며 감쇠비가 증가할수록 비탄성 변위비는 증가하였고, 음강성기울기는 시스템의 붕괴에는 중요한 변수로 작용하지만 비탄성 변위 비에는 영향을 주지 못하였다. 연성 및 후탄성 기울기는 단 주기 및 항복강도가 큰 시스템에서 비탄성변위비에 영향을 주었지만, 주기가 1.0초 이후이거나 항복강도가 작을때는 비탄성 변위비에 영향을 미치지 못했다. 이와 같은 경향을 반영할 수 있도록 비선형 회귀분석을 통하여 비탄성 변위비 제안식을 만들었으며, 이 식은 2~20%의 감쇠비 및 확률분 포에 따라 비탄성변위를 적절히 예측하고 있었다. 본 연구 의 제안식을 사용하여 간단한 탄성해석만으로 강도한계 이 선형 시스템의 비탄성 변위를 예측할 수 있다.

감사의 글

본 논문은 교육과학기술부(MEST) 우수연구센터 육성사 업인 한양대 친환경건축센터 (R11-2005 -056-040020-0)의 지원과 한국연구재단(2009-0086384)의 지원으로 수행된 것으로 이에 감사를 드립니다.

참고 문 헌

- Federal Emergency Management Agency.(FEMA), Prestandard and Commentary for the Seismic Rehabilitation of Buildings, Report FEMA-356, 2000.
- Applied Technology Council, Seismic evaluation and retrofit of concrete buildings, Report ATC-40, Redwood City, Calif, 1996.
- Federal Emergency Management Agency.(FEMA), Assessment of Improved Nonlinear Static seismic analysis procedures, Report FEMA-440, Washington, D.C. 2005.
- Veletsos AS, Newmark NM, "Effect of inelastic behavior on the response of simple systems to earthquake motions," *Proceedings of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering, Japan*, Vol. 2, 895-912, 1960.
- Oscar M.Ramirez et al, "Elastic and inelastic seismic response of buildings with damping systems," *Earthquake Spectra*, 18(3): 531-547, 2002.
- Chopra, A.K., and Chintanapakdee, C., "Inelastic deformation ratios for design and evaluation of structures : single degree of freedom bilinear systems," *Report No. EERC 2003-09*, Earthquake Engrg. Res. Ctr., Univ. of Calif. at Berkeley, CA, 2003.
- Ruiz-Garcia, J., and Miranda, E, "Inelastic displacement ratios for evaluation of existing structures," *Earthauake Engineering and Structural Dynamics*, 32(8): 1237-1258, 2003.
- Ibarra, L. F., and Krawinkler, H., "Global collapse of frame structures under seismic excitations," *Report TR-152*, The John A. Blume Earthquake Engineering Center, Stanford University, CA, 2005.
- Han, S.W., Chopra A.K., "Approximate incremental dynamic analysis using the modal pushover analysis procedure," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*; 135:1853-1873, 2006.
- Ruiz-Garcia, J., and Miranda, E, "Probabilis tic estimation of maximum inelastic displacement demands for performacebased design," *Earthquake Engng Struct. Dyn*,;36:1235-1254, 2007.
- Chopra A.K. Dynamics of Structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, 3rd Edition, Prentice-Hall: New Jersey, 2007.