East Asian Mathematical Journal
Vol. 26 (2010), No. 2, pp. 151-164

교과서에서 나타난 작도방법의 정당화

강 미 광 · 황 슬 기

ABSTRACT. This study is to provide improved teaching methods on classical geometric construction education by a straightedge and compass in school mathematics. In this paper, justifications of construction methods of Korean textbooks, for perpendicular bisector of an segment and angle bisector are discussed, which can be directly applicable to teaching geometric construction meaningfully. Based on these considerations, several implications for desirable teaching methods concerning geometric construction were suggested.

I. 서론

작도는 학생들의 기하학적 직관을 키우고 논리적 추론 능력을 향상시키기에 좋은 학습제재이며, 조건에 알맞은 도형의 해를 구하는 작도 문제는 학생들에게 문제해결에 대한 탐구 방법을 스스로 연구하고, 이를 통해 학습자들의 사고력을 향상시키는 교육에 효과적이다. 우리나라 수학 교육과정의 기하영역에서는 초등학교에서 중학교 1학년까지는 직관적인 탐구활동을 강조한 직관기하를 다루고 중학교 2학년에서 논증을 지나치게 강조하지 않는 수준에서 연역적인 논증기하를 시작하고 있다(교원인적자원부, 2007).

직관기하에서는 직관과 실험, 실측, 발견과 탐구활동을 중심으로 전개하고 있으며 작도영역은 중학교 1학년에서 눈금 없는 자와 컴퍼스를 사용하여 선분의 수직이등분선과 각의 이등분선, 주어진 각과 크기가 같은 각과 평행선을 작도하는 문제를 다루고 있다. 중학교 2학년과 3학년에서는 형식기하를 학습하기 위한 기초단계로 평면 논증기하를 다루고 있는데 이때 문제를 직관적으로 접근하고 이해 · 해결하는 과정에서 작도는 중요한 역할을 하고 있다. 작도문제는 특성상 분석-작도-증명-탐구의 과정을 거쳐 해결되는데, 이 때 수행한 각 작도 단계가 타

2010년 1월 투고, 2010년 2월 심사 완료
2000 Mathematics Subject Classification: 97C40
Key Words: 작도, 힐베르트 공리군

당한지를 밝히는 것이 증명 단계이다(한인기, 1999). 이처럼 작도는 직관기하와 형식기하를 연결시킬 수 있는 학습제재로서, 작도교육이 제대로 잘 이루어진다면 우리나라 학생들이 가장 어려워하는 증명교육에서의 개선도 기대할 수 있을 것이다.

그러나 대부분의 우리나라 수학 교과서는 작도 과정자체를 순서대로 기술하고 있을 뿐, 작도과정에 대한 정당성과 타당성에 대해서는 아무런 언급이 없다. 우리나라 교육과정은 교수학적 선택 상, 작도방법의 정당성을 삼각형의 합동조건에서 찾을 수 없으므로 엄밀히 전개하지 못하고 있는 것 같다. 결국, 우리나라 작도문제에서는 탐색수행 과정인 '분석'과 다른 해의 존재를 조사하는 '탐구'단계가 대부분 생략되고 작도과정의 타당성을 확인하는 '증명' 단계마저 생략하여 작도 본연의 교육효과를 보지 못하고 있다(한인기, 1999).

본 연구의 목적은 현 교육과정에서 작도교육이 좀 더 효율적이고 실질적으로 이루어질 수 있도록 교사의 작도에 대한 지식에 교수학적 정보를 제공하기 위한 것으로, 현행 중학교 1학년 수학 교과서에서 절차만 제시되어 있는 선분의 수직이등분선과 각의 이등분선, 그리고 주어진 각과 같은 크기의 각의 작도 방법이 정당화를 갖기 위해 필요한 수학적 개념과 지도 방안을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 학교수학에서의 작도교육

2.1 작도의 교육적 가치

수학사의 흐름에서 기원전 5C에 활동한 피타고라스는 모든 대상을 산술화하여 생각했으나 무리수의 발견으로 이러한 관점으로는 한계가 있었다. 유리수가 아닌 수도 선분의 길이에 의해서는 표현할 수 있었으므로 이후 수학은 모든 문제를 기하학적으로 표현하고 해결하려는 기하학적 성향을 띠게 된다(한인기, 2005).

특히, 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 하는 작도문제는 고대 유클리드 기하의 기본으로 오랫동안 많은 기하학자들의 흥미를 끌어왔다. 그 중에서도 각의 삼등분 문제, 정육면체의 배적 문제, 원적 문제와 같은 세 가지 작도불능 문제는 이를 해결하려고 시도하는 과정에서 원추곡선과 초월곡선을 발견하고 대수적인 수와 군론의 발전에 영향을 주는 등, 더 중요한 수학적 발전을 일구어 내었다.

작도에서 눈금 없는 자와 컴퍼스로 작도 도구를 제한하는 것은 이들만으로 유클리드 원론에서 제시되어진 세 가지 기하 공준을 실행할 수 있고 유클리드 평면기하학에서 기본 요소인 점, 선, 원을 그릴 수 있는 최소한의 도구이기 때문이다(David, 2002; Eves, 1995; 김연식, 1995). 그리고 가장 간단한 도구를 사용하는 것이 정교한 측정도구를 사용했을 때보다 기하의 기본 사실과 관계에 더 주목할 수 있으므로 기하개념을 더 강화시키고 눈금에 의한 근사치가 아니라 이론적으

로 정확한 도형을 그릴 수 있기 때문이다.
한편, 학교수학에서 작도가 가지는 교육적 가치로는 다음과 같은 것을 생각해 볼 수 있다. 첫째, 작도문제에서 작도 방법을 발견하고 수행된 작도의 타당성을 입증해야 하므로 기존의 기하지식을 반성하고 재조직할 기회를 갖게 한다. 또한, 전체적인 구조 하에서 문제를 해결해야 하므로 통찰력을 키우게 한다. 둘째, 작도는 기하의 새로운 개념을 도입하거나 정리를 이해하고 유도할 때 유용한 역할을 한다. 유클리드는 원론에서 어떤 성질을 가지는 도형이 실제로 존재함을 그 도형을 구체적으로 작도해 보임으로서 증명하고 있으며, 우리나라 교육과정에서도 삼각형의 합동조건을 이끌어내는 삼각형의 결정조건을 그 조건에 의해 작도할 수 있음을 보이는 것으로 정당화하고 있다. 이처럼 작도는 추상적 개념의 의미를 분명하고 구체적으로 드러나게 하고 새로운 개념을 도입하는데 효과적으로 이용될 수 있다. 셋째, 작도는 학습자의 활동에 의해 수학적 지식을 습득한다는 활동주의 교육 이론을 실행하기에 좋은 학습제재이다(장혜원, 1999; 권현직, 2008). 일반적으로 수학문제를 푼다는 것은 계산을 통해 답을 내거나 증명을 하는 것으로만 생각하기 때문에 학생들은 수학을 지루하고 재미없다고 생각한다. 이런 학생들에게 자와 컴퍼스로 직접 도형을 그리게 하는 활동은 과학에서 실험교육이 가지는 교육적 가치를 가질 수 있으며, 왜 이 도형이 정삼각형이 되고 평행사변형의 두 대각선이 서로 이등분하는지를 이론적으로 고민하게 한다면 기존 수학적 지식들의 의미를 깨닫게 하고 수학에 대한 흥미도 이끌어낼 수 있을 것이다.

2.2 우리나라 교육과정에서 작도 영역의 체계

우리나라 수학 교육과정에서 작도와 관련된 기하영역의 학습목표는 눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용하여 간단한 도형을 작도할 수 있게 하는 것이다. 이 때, 자는 길이를 측정하는 도구가 아니라 두 점을 지나는 선분을 그리는 도구로 사용되며, 컴퍼스는 원을 그리거나 길이가 같은 선분을 옮기는 도구로 사용된다. 또한 삼각형의 결정조건은 삼각형을 꼭 하나 작도할 수 있는 최소한의 조건임을 이해하게 함으로써 합동이 되는 두 삼각형에 대하여 합동인 이유를 설명할 수 있게 하는 것이다.

작도와 관련된 영역은 중학교 1학년에서는 ‘간단한 작도, 삼각형의 결정조건과 합동조건, 원과 부채꼴, 직선 및 원의 위치관계’ 단원이며 2학년에서는 ‘도형의 성질이나 닮음’ 단원에서 닮음 도형을 그리고 논증기하의 증명하는 과정에서 문제를 직관적으로 이해하고 해결하는 과정에서 작도가 필요하다. 중학교 3학년에서는 원에서 ‘현과 원주각의 성질’이 직접적인 관련이 있다.

<표 1> 7차 개정안 교육과정 기하영역과 작도관련 영역

중학교		
1학년	2학년	3학년
· 점, 선, 면, 각 · 점, 직선, 평면의 위치관계 · 평행선의 성질 **· 간단한 작도** **· 삼각형의 결정조건과 합동조건** · 다각형의 성질, 내각과 외각의 크기 **· 부채꼴의 중심각과 호의 관계** · 부채꼴의 넓이와 호의 길이 **· 원과 직선, 두 원의 위치관계** · 다면체, 회전체의 성질 · 입체도형의 겉넓이와 부피	· 명제의 뜻과 증명의 의미 **· 삼각형과 사각형의 성질 증명** **· 도형의 닮음** · 닮은 도형의 성질 · 삼각형의 닮음조건 · 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비 · 삼각형의 중점연결 정리 · 닮은 도형의 넓이와 부피	· 피타고라스의 정리 · 삼각비 **· 원에서 현, 접선에 대한 성질** **· 원주각의 성질** · 원에 내접하는 사각형의 성질 · 원과 비례에 관한 성질

※ 표에서 굵은 활자는 작도단원의 학습과 관련된 단원이다.

일반적으로 작도단원의 첫 부분에 선분의 수직이등분선이나 각의 이등분선을 직관적 이해를 돕기 위해 활동을 통해 도입하고, 주어진 각의 크기와 같은 각을 작도하는 법을 다루고 있다. 대부분의 교과서들은 이들을 작도하는 절차만을 제시하고 왜 이렇게 작도하는지에 대한 설명은 생략하고 있다. 이는 우리나라 교육과정에서는 이들의 작도를 삼각형의 합동단원 앞에서 다루므로, 삼각형의 합동조건을 이용할 수 없기 때문이다. 또한 작도는 직선과 직선의 교점, 원과 직선과의 교점, 두 원의 교점들에 의해 이루어지는데도 불구하고 직선과 원의 위치관계, 두 원의 위치관계가 작도단원보다 뒷부분에 배치되어 있기 때문으로 생각된다. 작도방법에 대한 근거를 이해시키기 위해서는 이러한 내용이 작도단원보다 선행되어 배치되는 것이 교과과정의 위계성에도 부합되고 작도에 관한 학습이 보다 실질적이고 효과적으로 이루어질 수 있을 것이다.

Ⅲ. 작도의 정당화

유클리드 기하학이란 보통 도형적 직관을 기초로 하여 만들어진 기하학이다. 기원 전 3C에 유클리드는 '원론'에서 수학 전반에 사용되는 사항을 규정하는 공리인 공통 공리와 기하학 그 자체에 대한 공리인 기하 공리를 도입하여, 그것에 근거를 두고 논리적으로 전개하여 유클리드 기하학을 세웠다. 그러나 유클리드의 평행 공준에 대한 검토와 비 유클리드 기하학의 성립으로 직관에 기반을 둔 유클리드 기하학에 대한 논리적인 재검토가 필요하게 되었다. 좀 더 확실한 유클리

드 기하학을 정립하기 위하여, 19세기경부터 공리적으로 접근하는 기하학 기초론에 관한 연구가 진행되어 여러 가지 완전한 공리체계가 완성되었다. 그 중 가장 유명한 것은 힐베르트가 1899년 그의 책 '기하학 기초론(Grundlagen der Geometrie)'에서 발표한 Euclid 공리계이며, 현재 힐베르트의 공리계는 엄밀히 검토된 완전한 공리계로서, 유클리드 기하학에 대한 가장 대표적인 공리계로 되어 있다.

이것은 무정의 용어로 세 개의 다른 집합인 점들의 집합, 선들의 집합, 평면들의 집합과 이들의 관계를 규정짓는 다섯 개의 공리군으로 이루어져 있다. 점, 직선, 평면은 상호간에 적절한 관계를 가지고 있고 이 관계들은 결합 공리군, 순서 공리군, 합동 공리군, 평행선 공리, 연속성 공리군인 다섯 개의 공리군에 의해 명확하고 수학적으로 서술되어져 있다.

이장에서는 제 7차 개정 교육과정내용을 중심으로 중학교 1학년 수학 교과서에서 다루고 있는 선분의 수직이등분선과 각의 이등분선, 주어진 각과 같은 크기의 각의 작도 방법에 대해 정당화를 주기 위한 접근 방법을 모색하고자 한다.

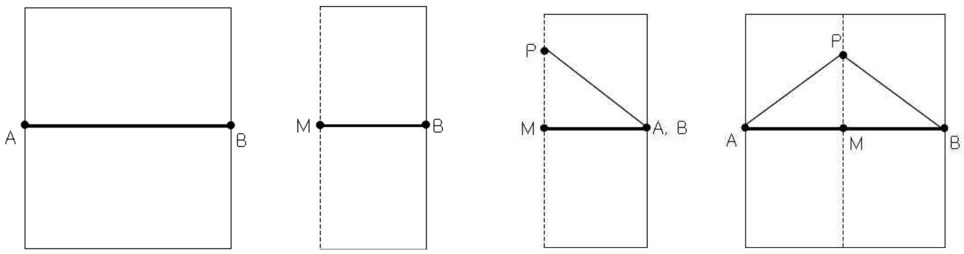
3.1 수직이등분선의 작도

수직이란 한 점에서 한 직선까지의 거리를 측정해야 하는 경우에 생겨난 개념으로, 어떤 직선에 어느 쪽으로도 기울지 않게 내린 직선이 바로 그 직선의 수직선이다. 역사 발생적 원리에 입각하여 쓰여진 최초의 기하교재인 클레로의 기하학 원론도 제일 첫 부분에서 다루고 있을 정도로 수직 개념은 중요하면서도 기본적인 기하개념이다(장혜원, 2005).

선분 AB의 수직이등분선이란 두 점 A, B의 어느 쪽으로도 기울지 않고 균형을 잡아야 하므로 두 점 A, B와 같은 거리에 있다는 개념에 그 바탕을 두고 있다. 역으로 두 점 A, B와 같은 거리에 있는 점은 선분 AB의 수직이등분선상에 있다는 사실은 삼각형의 합동에 의해 쉽게 유도할 수 있으나 우리나라 교육과정에서는 순서상 이를 용할 수 없으므로 다른 방법으로 작도의 타당성을 보이고자 한다.

1) 선분 AB의 수직이등분선의 도입활동

선분의 수직이등분선이란 선분을 선대칭도형으로 만드는 대칭축이므로 다음과 같이 종이를 접는 구체적인 활동을 통해 도입할 수 있다.



① ② ③

<그림 1> 선분 AB의 수직이등분선 도입활동

① 선분 AB가 이등분되는 점을 찾기 위해 A가 B점에 오도록 선분 AB를 반으로 접는다

② 선분 AB를 이등분하는 점을 M이라 두고 접힌 선분 상에서 임의의 점을 잡아 P라 두면 두 선분 AP와 선분 BP, 그리고 두 각 $\angle PMB$와 $\angle PMA$는 서로 겹친다. 그러므로 $\overline{AP}=\overline{BP}$이고 $\angle PMB=\angle PMA$이다.

③ 종이를 다시 펼치면(<그림 6>의 오른쪽 그림) $\angle AMB$는 평각이고 $\angle AMB = \angle AMP + \angle PMB = 2\angle AMP$이므로 $\angle AMP=90^\circ$이다.
그러므로 직선 PM은 선분 AB를 이등분하면서 $\overline{AB}$와 수직이다.

교과서에서 제시한 수직이등분선의 작도법을 정당화시키기 위해서는 원과 직선의 위치관계와 수직이등분선의 성질에 관한 두 보조정리가 필요하다.

[보조정리 3.1] 중심이 A이고 반지름이 r인 원과 A에서 거리가 d만큼 떨어진 직선 l과의 관계는 다음과 같으며 그 역도 성립한다.

(1) $r<d$이면 원과 직선은 만나지 않는다.

(2) $r=d$이면 원과 직선은 한 점에서 접한다.

(3) $r>d$이면 원과 직선은 두 점에서 만난다.

유클리드는 원론에서 직선과 직선의 교점의 존재성은 평행선 공준으로 언급하였지만 원과 직선, 또는 두 원의 교차의 존재성은 언급하지 않았다. 그러나 교점은 기존의 점들 이외에 새로운 점들이 생기는 것이므로 공리로서 주어져야 하는 것이다. 힐베르트는 이를 연속성 공리(Axioms of continuity)인 선의 완비성(Line completeness) 공리로 주었으며 이는 다음의 Dedekind 공리와 동치이다.

한 직선에 있는 모든 점들을 두 부분으로 갈라서, 첫 번째 부분의 모든 점들이 두 번째 부분의 모든 점들보다 왼쪽에 놓여 있다고 하면 직선의 모든 점들을 이런 방식의 두 부분으로 나누는 점이 단 하나 존재한다.

이를 이용하면 ‘어떤 직선(또는 어떤 원)의 한 점이 특정한 원의 안에 있고 한 점이 특정한 원의 바깥에 놓여있으면, 그 직선(또는 어떤 원)은 특정한 원과 두

점에서 만난다'는 정리를 이끌어낼 수 있다. 이 정리에 의해 중학교 1학년 교과서에 나오는 '원과 직선의 위치관계'와 '두 원의 위치관계'가 증명될 수 있는 것이다.

[보조정리 3.2] $\overline{AB}$의 수직이등분 상의 모든 점은 A, B와 같은 거리에 있다.

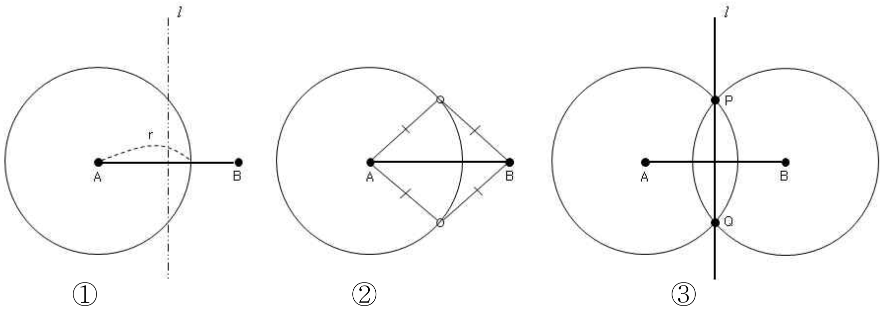
[증명] l을 $\overline{AB}$의 수직이등분선이라 하고 P를 l상의 임의의 점이라 하자. <그림 1>에서처럼 선분 AB를 l에 관해 선대칭 시키면 $\triangle PAM$과 $\triangle PBM$은 겹치므로 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 이다.

2) 교과서에 제시된 선분의 수직이등분선 작도법의 정당화

결합공리(Axioms of Incidence)에 의해 '임의의 두 점을 지나는 직선은 단 하나 존재'하므로 선분의 수직이등분선은 이 직선상에 있는 두 점을 찾아내면 작도할 수 있다. 먼저 [정리 3.1]과 [정리 3.2]를 이용한 선분의 수직이등분선의 작도 방법을 다음과 같이 제시한다.

[선분 AB의 수직이등분선 작도]

① 선분 AB의 수직이등분선을 가상으로 l이라 두고 A를 중심으로 $\overline{AB}$ 길이의 반 보다는 큰 반지름 r을 가지는 원 C_A를 그리면 보조정리 3.1에 의해 원 C_A와 직선 l은 두 점에서 만난다는 사실을 알 수 있다.



<그림 2> $\overline{AB}$의 수직이등분선 작도

② ①에서의 원 C_A와 직선 l의 두 교점을 P, Q라 하면 이들은 원주 C_A상에 있으므로 $\overline{AP}=r=\overline{AQ}$ 이다. 여기서 P, Q는 $\overline{AB}$의 수직이등분선상에 있으므로 보조정리 3.2에 의해 $\overline{AP}=\overline{BP}$, $\overline{AQ}=\overline{BQ}$ 이다.

③ $\overline{BP}=r=\overline{BQ}$ 이므로 중심으로 반지름이 r인 원 C_B를 그리면 P, Q는 이 원주상 위에도 있게 된다. 즉, P, Q는 C_A와 C_B의 교점인 동시에 선분 AB의 수직이등분선 상의 두 점이므로 직선 PQ가 바로 선분 AB의 수직이등분선 l이다.

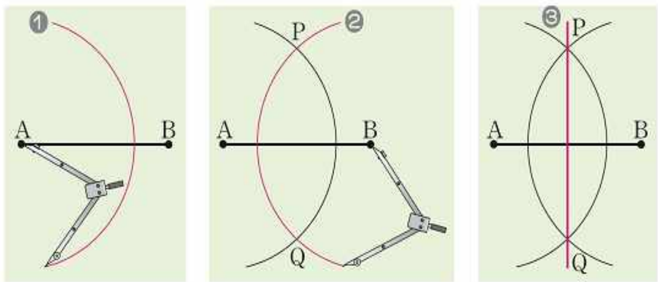
이처럼 원 C_A와 선분 AB의 수직이등분선 l의 교점으로 존재성만 주어진 두 점 P, Q가 반지름이 r이고 중심이 A, B인 두 원 C_A와 C_B의 교차를 통해 교점으로 실체가 드러날 수 있는 것이다. 교과서에서 제시된 수직이등분선의 작도 방법은 실제로는 이러한 과정에 의해 그 정당성을 보장받는 것이지만 중간 절차는 생략한 채, 결과만을 다음과 같이 작도법으로 제시하고 있다(정순영외, 2009).

오른쪽 선분 AB의 수직이등분선을 작도하여라. A——B

[풀이] ❶ 점 A를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 $\overline{AB}$의 길이의 반보다 큰 원을 그린다.

❷ 점 B를 중심으로 하고, ❶과 같은 원을 그려 두 원이 만나는 점을 P, Q 라고 한다.

❸ 두 점 P, Q를 잇는 직선을 그으면 직선 P, Q가 선분 AB의 수직이등분선이다.



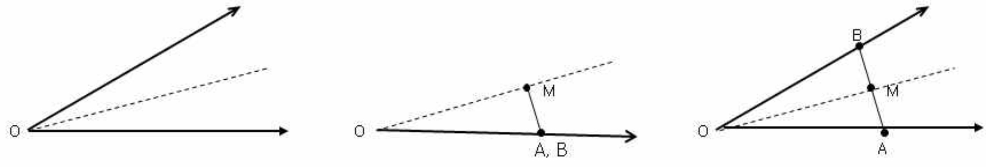
① A를 중심으로 하는 원이 선분 AB의 수직이등분선과 두 점에서 교차할 수 있도록 반지름의 길이를 $\overline{AB}$ 길이의 반 보다 크게 잡는다.
② 선분 AB의 수직이등분선과 ①에서 그린 원의 두 교점을 찾기 위해 이 두 점과 B와의 거리는 A와의 거리와 같다는 사실을 이용한다. 그래서 B를 중심으로 하고 반지름이 ①에서 그린 원의 반지름과 같도록 원을 그린 것이다.
③ 교점 P, Q는 원래 선분 AB의 수직이등분선상에 있는 점이고 결합공리에 의해 P, Q를 지나는 직선은 단 하나 존재하므로 직선 $\overleftrightarrow{PQ}$가 바로 구하고자 하는 선분 AB의 수직이등분선이다.

3.2 각의 이등분선의 작도

1) 각의 수직이등분선의 도입활동

각의 이등분선은 각을 합동인 두 부분으로 나누고 이를 선대칭도형으로 만드는 대칭축의 역할을 하므로 선분의 수직 이등분선의 도입과 같이 접는 활동에

의해 주로 도입된다.



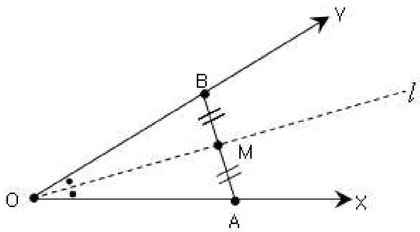
① ②

<그림 3> 각의 이등분선 도입활동

① 각의 양변이 포개지도록 접은 다음, 접은 선 위에 있는 점 M에서 각의 양변에 있는 겹치는 점 A와 B로 선분을 그으면 삼각형 $\triangle OMA$와 $\triangle OMB$는 포개어지므로 서로 합동이다.
② 이를 다시 원래대로 펼치면 선분 OA와 선분 OB는 길이가 같다.

위에서 접은 선이 $\angle AOB$의 이등분선이므로 다음 정리를 이끌어낼 수 있다.

[정리 3.3] 반직선 $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$에 있는 두 점 A, B가 $\overline{OA}=\overline{OB}$이면 $\angle XOY$의 이등분선은 선분 AB의 수직이등분선과 일치한다.



<그림 4> 각의 이등분선의 성질

[증명] $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 O를 중심으로 반지름이 $\overline{OA}$인 원을 그리면 이 원은 B를 지난다. l을 각 $\angle XOY$의 이등분선이라 하고 $\overline{AB}$와의 교점을 M이라 하자. $\triangle OMA$를 l에 선대칭 시키면 반직선 $\overrightarrow{OX}$는 $\overrightarrow{OY}$와 겹치고 선분 OA는 선분 OB와 겹치므로 두 삼각형 $\triangle OMA$와 $\triangle OMB$는 합동이다. $\angle AMO$ + $\angle BMO$ = 180°이고 $\angle AMO$ =$\angle BMO$이므로 $\angle AMO$ = 90°이다. 여기서 M은 $\overline{AB}$의 중점이고 l은 $\overline{AB}$의 수직이등분선이다.

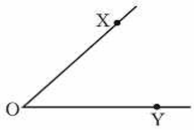
2) 교과서에 제시된 각의 이등분선 작도법의 정당화

선분의 수직이등분선 작도를 다루었으므로 교과서에서 제시된 각의 이등분선 작도법을 정리 3.3을 이용하여 설명하고자 한다. 각의 이등분선을 수직이등분선으로 가지는 선분을 구하려면 $\overline{OA}\equiv\overline{OB}$를 만족하는 두 점 A, B가 필요하게 되는데 이는 O를 중심으로 하는 원에서 구할 수 있다. 다음은 교과서에서 제시

한 각의 이등분선 작도법이다(정순영외, 2009).

예제 3

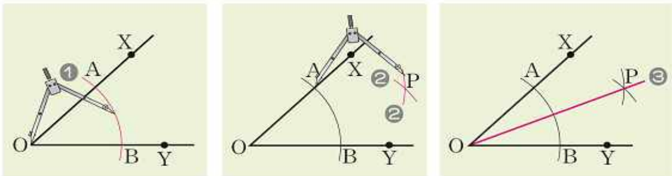
오른쪽 그림에서 ∠XOY의 이등분선을 작도하여라.



[**풀이**] ❶ 점 O를 중심으로 하는 원을 그려 $\overline{OX}$, $\overline{OY}$와 만나는 점을 각각 A, B라고 한다.

❷ 점 A, B를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 같은 두 원을 그려서 만나는 점을 P라고 한다.

❸ 점 O와 P를 잇는 반직선 OP를 그으면 반직선 OP가 ∠XOY의 이등분선이다.



① $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$를 만족하는 두 점 A, B를 찾는 작업으로 O를 중심으로 하는 원과 $\overrightarrow{OX}$와 $\overrightarrow{OY}$의 교점들은 이 성질을 만족한다. 정리 3.3에 의해 $\overline{AB}$의 수직이등분선이 바로 $\angle XOY$의 이등분선이 된다.

② $\overline{AB}$의 수직이등분선은 O를 항상 지나므로 이 직선 위에 있는 한 점만 알면 작도할 수 있다. 보조정리 3.2에 의해 수직이등분선상의 점은 A, B와 같은 거리에 있으므로 그러한 점을 찾기 위해 A, B를 중심으로 하고 반지름이 같은 원을 그려 교점을 구한 것이다.

③ A, B에서 같은 거리에 있는 두 점 O와 P를 지나는 직선 $\overrightarrow{OP}$는 $\overline{AB}$의 수직이등분선이므로 결국 각 $\angle XOY$의 이등분선이다.

교과서에서 제시된 각의 이등분선은 결국 각을 중심각으로 하는 현의 수직이등분선을 작도한 것이다. 교육과정에 의하면 부채꼴의 중심각과 호의 관계는 중학교 1학년에서 다루는 반면 부채꼴의 중심각과 현의 관계는 '원에서 현에 대한 성질'로 중학교 3학년에서 다루고 있다. 예를 들어, 강옥기외 2인의 교과서 수학 9-나의 '원과 현'의 단원에서 다음과 같이 현의 수직이등분선에 대한 성질을 다루고 있다.

1. 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 수직 이등분한다.
2. 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지난다.

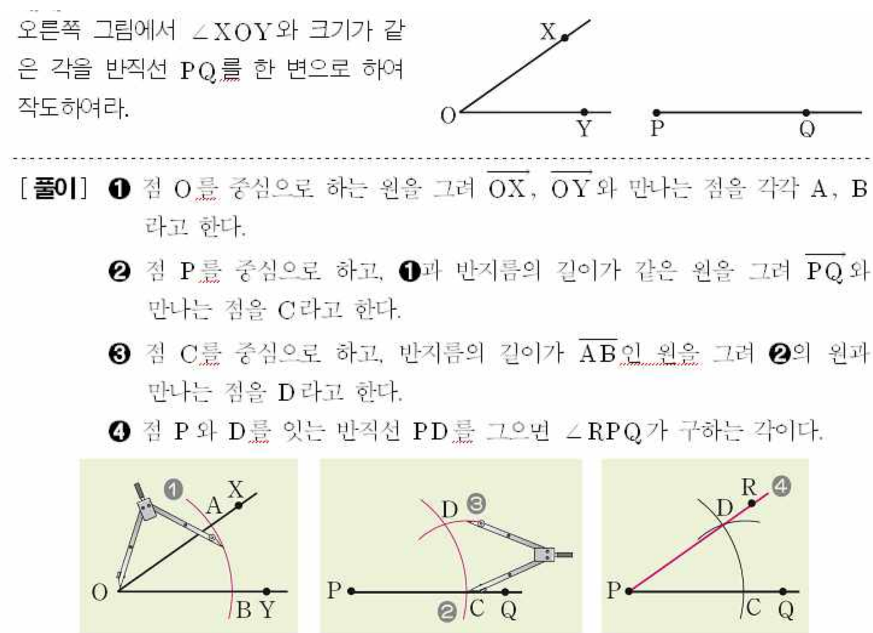
물론 삼각형의 합동조건을 이용해 이를 증명하고 있지만 부채꼴의 중심각과 호의 관계처럼 적절한 형태를 취한다면 중학교 1학년에서도 도입할 수 있을 것이

다. 부채꼴의 중심각과 현의 관계는 각의 이등분선 작도에 직접적으로 영향을 끼칠 뿐 아니라 논증 기하교육의 기초가 되는 이등변 삼각형의 성질과도 깊은 관련이 있으므로 이를 중학교 1학년의 작도 단원 이전에 다루는 것이 바람직하다고 생각한다.

3.3 주어진 각과 합동인 각의 작도

주어진 각과 합동인 각의 작도에서 각의 크기는 컴퍼스를 사용하여 주어진 각을 중심각으로 가지는 현의 길이로 재고 있다. 이 작도에서 핵심적인 역할을 하는 개념은 ‘한 원에서 같은 크기의 두 중심각에 대한 현의 길이는 서로 같으며, 또한 같은 길이의 두 현에 대한 중심각의 크기도 서로 같다’라는 사실이다. 이는 현재 중학교 3학년(강옥기 외, 2002)에서 다루어지고 있으나 삼각형의 결정조건을 이끌어내는 작도에서 중요한 역할을 하므로, 이러한 내용은 교사의 적절한 수업지도에 의해 작도 이전에 다루어지는 것이 바람직하다.

다음은 교과서에서 제시된 주어진 각과 합동인 각을 작도하는 방법이다(정순영 외, 2009).


오른쪽 그림에서 ∠XOY와 크기가 같은 각을 반직선 PQ를 한 변으로 하여 작도하여라.

[풀이] ❶ 점 O를 중심으로 하는 원을 그려 $\overline{OX}$, $\overline{OY}$와 만나는 점을 각각 A, B라고 한다.

❷ 점 P를 중심으로 하고, ❶과 반지름의 길이가 같은 원을 그려 $\overline{PQ}$와 만나는 점을 C라고 한다.

❸ 점 C를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 $\overline{AB}$인 원을 그려 ❷의 원과 만나는 점을 D라고 한다.

❹ 점 P와 D를 잇는 반직선 PD를 그으면 ∠RPQ가 구하는 각이다.

① ‘반지름이 같은 원에서 두 중심각의 크기가 같으면 현의 길이가 같고 두 현의 길이가 같으면 중심각의 크기도 같다’는 사실을 이용하기 위해 $\angle XOY$와 크기가 같은 중심각을 작도하기 위한 것이다. 즉 $\angle AOB \equiv \angle XOY$ 인 중심각

$\angle AOB$를 작도한 것이다. 여기서 A, B는 직선과 원의 교차로 생겨난 점이므로 힐베르트의 연속공리에 의해 존재성을 보장받을 수 있다.
② '반지름이 같은 원에서 두 현의 길이가 같으면 대응하는 중심각의 크기도 서로 같다'는 사실을 이용하기 위해 반지름이 같고 현의 길이가 같은 중심각을 찾고자하였다. 즉, P를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{OB}$인 첫 번째 원을 그리고, 현 $\overline{AB}$ 의 길이와 같은 현을 가지는 중심각을 작도하기 위해 C를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{AB}$ 인 두 번째 원을 그린 것이다. 여기서 점 C는 연속 공리에 의해 존재하고 직선 PQ 상의 특정한 점 C에서 선분 BA가 선분 CD와 합동이 되도록 점 D를 잡을 수 있는 것은 합동 공리 II에 의해 선분을 원하는 곳에 작도할 수 있기 때문이다.
③ ②에서의 두 원의 교점 D라 두면 두 중심각 $\angle DOC$ 와 $\angle AOB$는 같은 길이의 현을 가지므로 중심각의 크기는 서로 같다. 즉 다음이 성립한다.

$$\angle XOY \equiv \angle AOB \equiv \angle DOC \equiv \angle ROP$$

결국 교과서에서 제시된 주어진 각과 합동인 각을 작도하는 방법은 각의 크기가 현의 길이와 일대일 대응하므로 각의 크기를 현의 길이로 표현하고 같은 길이의 현을 옮겨 작도한 다음 다시 크기로 환원시킨 것이다. 실제로 $\angle XOY$와 크기가 같은 각을 작도할 수 있는 이유는 원하는 반직선과 반평면에 주어진 각과 같은 크기의 각을 작도할 수 있음을 힐베르트의 기하공리계에서 합동공리 IV로 주었기 때문이다.

IV. 결론 및 제언

작도 교육은 기하와 증명교육에서 중요한 역할을 하고 있음에도 불구하고 대부분 우리나라의 교과서는 작도방법에 대한 타당한 논리적 근거에 대해서는 언급이 없다. 이는 작도가 삼각형의 합동조건을 유도하는 도구로 사용되는 우리나라의 특유의 교수학적 선택에 의한 것으로 삼각형의 합동조건을 이용하지 않고서는 선분의 수직이등분선과 각의 이등분선, 주어진 각과 같은 각의 작도에 대한 정당성을 밝히기가 까다롭기 때문이다. 그 결과, 우리나라에서는 도형의 성질 탐구에서도 작도문제를 활용하지 못하고 있으며 전반적으로 작도교육이 위축되어 있다고 할 수 있다. 이와는 달리 러시아의 기하교과서는 삼각형의 합동을 먼저 다루고 작도문제를 다루기 때문에 작도방법의 타당성을 엄밀히 증명하고 있다(한인기, 2005).
본 연구에서는 삼각형의 합동조건을 이용하지 않는 현행 교육과정에서 작도지도

를 개선하기 위한 방안으로 교과서에서 나타난 작도법에 대한 정당화의 근거를 제시하였다. 이는 학생들의 학습에 중요한 영향을 끼치는 교사의 내용지식에 보다 폭넓은 교수학적 정보를 제공하기 위한 것으로, 교사들이 작도법에 대한 절차 외에 이론적 근거와 배경 지식을 충분히 갖추고 있으면 작도의 타당성을 묻는 학생들의 질문에도 정확히 답해 줄 수 있고 학생들의 수준에 좀 더 적절한 수업 설계를 제공할 수 있을 것으로 기대되기 때문이다.

현행 교육과정에서 작도교육이 보다 실질적이고 효과적으로 이루어지기 위해서 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 앞에서 언급했듯이 작도단원과 이와 직접적인 연관이 있으면서도 작도단원 뒤에 배치되어 있는 단원들을 앞쪽으로 재배치하자는 것이다.

삼각형의 합동조건과 작도의 순서상의 문제 외에도 작도는 직선과 원들의 교점 에 의해 이루어지는데도 '직선과 원의 위치관계, 두 원의 위치관계'는 작도단원보다 뒷부분에 배치되어 있다. 또한 부채꼴의 중심각과 호의 관계는 중학교 1학년에서 다루는 반면, 부채꼴의 중심각과 현의 관계는 중학교 3학년에서 다루고 있다. 각의 이등분선은 각을 중심각으로 하는 현의 수직이등분선을 작도한 것이고 주어진 각과 합동인 각의 작도에서는 각의 크기를 현의 길이로 재고 있기 때문에 작도에서는 부채꼴의 중심각과 현의 관계에 대한 개념 이해가 필수적이다. 부채꼴의 중심각과 현의 관계는 작도뿐만 아니라 논증 기하교육의 기초가 되는 이등변 삼각형의 성질과도 깊은 관련이 있으므로 중학교 1학년에서 보다 비중 있게 다루어져야 할 것이다.

둘째, 작도로 삼각형의 결정조건을 정당화하기 위해서는 주어진 각과 같은 각의 작도와 세 변이 주어진 삼각형의 작도만이 필요하므로 수직이등분선과 각의 이등분선의 작도법은 삼각형의 합동조건보다 뒤에 배치하자는 것이다. 그러면 삼각형의 합동조건을 이용하여 이들 작도법을 쉽고 엄밀하게 증명할 수 있을 것이기 때문이다.

셋째, 교사가 유클리드의 기하학의 작도영역에 대한 정확한 지식을 알고 있어야 한다. 예를 들어, 우리나라 작도 영역의 목표 중 하나는 '삼각형의 결정조건은 삼각형을 꼭 하나 작도할 수 있는 최소한의 조건임을 이해하게 하는 것'이다. 교과서에서는 삼각형의 결정조건이 삼각형의 모양과 크기를 결정한다는 사실을, 이 조건만으로 작도한 삼각형들은 서로 합동이 된다는 실험적인 방법에 의해 정당화시키고 있지만 실제로 이것의 정당화는 힐베르트가 제시한 합동공리군 때문이다. 중학교에서 다루는 도형에 관한 성질이나 작도는 대부분 유클리드 원론의 1권에서 제시된 내용이지만 이들의 정당화는 완벽한 힐베르트의 공리체계에서 찾아야 하므로 교사는 이 두 가지 체계에 대한 기하지식을 정확히 갖추고 있어야 한다.

참고 문헌

[1] 강신덕 외 6인(2008). 중학교 수학 1, 서울 : (주)교학사
[2] 강옥기 외 2인(2006). 중학교 수학 9-나, 서울 : (주)두산
[3] 강행고 외 8인(2002). 중학교 수학 8-나, 서울 : (주)중앙교육진흥연구소
[4] 교육인적자원부(2007). 수학과 교육과정 해설, 2007-79호
[5] 권현직(2008). 자와 컴퍼스로 배우는 수학, 수학사랑
[6] 김연식, 김흥기(1995). 중학교 수학 1 서울 : 동아출판사
[7] 유클리드·토마스 히드 지음, 이무현 옮김(1998). 기하학 원론 -평면기하-, 교우사
[8] 장혜원(1997). 중학교 기하 영역 중 작도 단원에 대한 고찰, 대한수학교육학회논문집, 7권 2호, pp.327-336
[9] 정순영 외 5인(2009). 중학교 수학1, 서울 : (주)두산
[10] 한인기(1999). 작도 문제의 해결 방법, 수학교육논문집, 9집, pp.153-164
[11] 한인기(2005). 교사를 위한 수학사, 교우사
[12] 한인기(2005). 한국과 러시아의 수학교과서에 제시된 '삼각형의 합동'에 관련된 학습내용의 비교 연구, 한국학교수학회논문집, 8권 1호, pp.89-100
[13] 홍승표(2005). 유클리드 기하 개론 3판, 경문사
[14] Alexis Claude Clairaut, 장혜원 옮김(2006), 클레로의 기하학 원론, 경문사
[15] Howard Eves 지음, 이우영 · 신항균 옮김(1995) 수학사, 경문사
[16] Tom Davis(2002), Classical Geometric Construction, http://www.geometer.org

Kang, Mee Kwang
Department of mathematics
Dongeui University
Busan 614-714, Korea
E-mail address: mee@deu.ac.kr

Hwang Seurgi Gi
Department of mathematics
Dongeui University
Busan 614-714, Korea
E-mail address: suergi@hanmail.net