East Asian Mathematical Journal
Vol. 26 (2010), No. 2, pp. 267-280

삼각형에서 n제곱 직선의 작도 방법에 대한 연구

김지훈 · 조성훈 · 이동찬 · 안승민 · 이성현 · 한인기*

ABSTRACT. In this paper we study construction methods of n^{th} line in triangle. Russian Mathematician Zetel suggested some construction methods of n^{th} line in triangle 80 years ago. We find Zetel's papers, in detail explain the Zetel's construction methods, and suggest two elementary construction methods. Our results are received in the process of Research and Education program in science high school.

I. 서론

삼각형은 평면기하학에서 연구하는 중요한 도형 중의 하나이며, 삼각형의 성질들이 다각형, 다면체로 확장되는 경우가 많기 때문에, 오래 전부터 평면기하학, 입체기하학의 탐구를 위해 삼각형의 다양한 성질들을 진지하게 연구하여 오고 있다. 이를 통해, 삼각형에 대한 많은 성질들이 밝혀졌으며, 삼각형 기하학이라는 연구 영역이 형성되었다. 국내에서도 삼각형의 성질에 대한 다양한 연구들([1], [2], [3])이 진행되고 있다.

한편 삼각형에 대한 새로운 연구 문제들도 제시되고 있다. 특히 이 문제들은 중등학교 수준의 수학적 개념들, 도구들, 그리고 예리한 수학적 사고 활동을 통해 해결되는 경우가 많기 때문에 창의적인 수학적 활동을 강조하는 수학교육의 측면에서는 의미있는 교수-학습의 자료가 되기도 한다.

본 연구에서는 1800년대 중반에 새롭게 제시된 삼각형의 n제곱 직선에 대한 문제를 과학고등학교 수학 영재학생들과의 탐구활동을 통해 연구할 것이다. Zetel([6])에 의하면, 삼각형에서 n제곱 직선의 개념은 프랑스의 수학자 Poudra가 Nouvelles Annales de Mathematiques에 1856년 게재한 논문에서 처음 소개되었다. 그 이후에 d'Ocagne, Zetel, Delnbash 등의 학자들이 n제곱 직선의 작도, n

2010년 2월 투고, 2010년 2월 심사 완료
Mathematics Subject Classification: 97C30
Key words: n^{th} line, triangle, construction method
* 교신저자

제곱 직선에 관련된 등식들을 연구하였다.

삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 그은 n제곱 직선 AD는 변 BC와 점 D에서 만나며 $\frac{BD}{CD}=\frac{c^n}{b^n}$를 만족시키는 직선이다(단 $AB=c$, $AC=b$). 유사한 방법으로 꼭짓점 B, C를 지나는 n제곱 직선을 생각할 수 있다.

n제곱 직선은 중등학교에서 다루는 각의 이등분선, 중선의 일반화라고 할 수 있다. 꼭짓점 A에서 그은 중선 AM에서 $BM=CM$이므로 $\frac{BM}{CM}=\frac{1}{1}=\frac{c^0}{b^0}$이 되며, $n=0$인 경우의 n제곱 직선이다. 그리고 꼭짓점 A에서 그은 각의 이등분선 AN에서 $\frac{BN}{CN}=\frac{AB}{AC}=\frac{c^1}{b^1}$이므로, $n=1$인 경우의 n제곱 직선이다. 수학적 사고에서 일반화가 중요하게 취급된다는 것을 감안하면, n제곱 직선의 연구는 삼각형의 성질 탐구뿐만 아니라, 수학적 사고의 신장에서도 중요한 역할을 할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 n제곱 직선의 작도에 대한 기존 연구 결과를 소개하고, n제곱 직선을 작도하는 두 가지 새로운 방법을 제시할 것이다. 이를 통해, n제곱 직선의 연구에 대한 정보들을 소개하고, 과학고등학교 수준의 R&E에서 활용할 수 있는 새로운 탐구의 한 영역을 소개할 수 있을 것으로 기대된다.

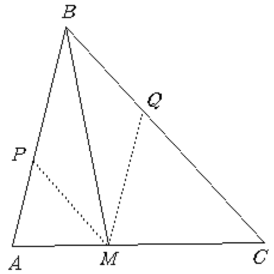
II. n제곱 직선에서 $(n+1)$제곱 직선의 작도

1. Zetel의 방법

러시아의 수학자 Zetel은 n제곱 직선의 작도 방법을 연구하였다. $n=0$인 경우에 n제곱 직선은 중선이며, $n=1$인 경우에는 각의 이등분선이므로, n제곱 직선을 작도하기 위해, Zetel은 1929년 연구([7])에서 평행선과 닮음을 이용하여 n제곱 직선으로부터 $(n+1)$제곱 직선을 작도하는 방법을 제시하였다. Zetel의 연구에 제시된 작도 방법을 자세히 살펴보자.

BM을 주어진 n제곱 직선이라 하면, $\frac{MA}{MC}=\frac{c^n}{a^n}$이다. 이제 변 BC, AB와 평행하도록 선분 MP, MQ를 작도하자(그림 1). 그러면 삼각형 PAM과 BAC가 닮음이므로, $\frac{PA}{BA}=\frac{AM}{AC}$, $\frac{PA}{c}=\frac{AM}{AM+MC}$, $\frac{c}{PA}=\frac{AM+MC}{AM}=1+\frac{MC}{AM}$이다. BM이 n제곱 직선이므로, $\frac{AM}{MC}=\frac{c^n}{a^n}$이다. 즉 $\frac{c}{PA}=1+\frac{MC}{AM}=\frac{a^n+c^n}{c^n}$이다. 이

로부터 $PA = \dfrac{c^{n+1}}{a^n + c^n}$이 된다. 같은 방법으로 $QC = \dfrac{a^{n+1}}{a^n + c^n}$이다. 이들 등식을 연립하면, $\dfrac{PA}{QC} = \dfrac{c^{n+1}}{a^{n+1}}$가 된다. 이제 변 AC를 선분 PA, QC에 비례하도록 분할하면, 구하는 $(n+1)$제곱 직선을 얻을 수 있다.



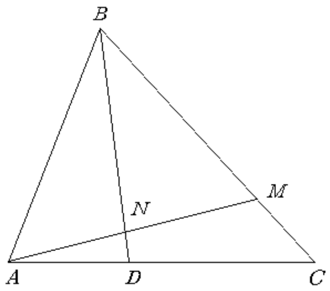
[그림 1]

그러나 Zetel의 연구에서는 변 AC를 선분 PA, QC에 비례하도록 분할하는 방법에 대해서는 기술되어 있지 않다. 실제로 변 AC를 선분 PA, QC에 비례하도록 분할하려면, [그림 1]에서 꼭짓점 A로부터 반직선을 작도하고, 선분 PA, QC와 같은 선분 AS, ST를 각각 작도한다. 이제 점 T를 꼭짓점 C와 연결하고, 점 S를 지나 선분 TC와 평행인 선분을 그어 AC와의 교점을 K라 하면, 닮음인 삼각형 ASK와 ATC를 얻을 수 있다. 삼각형의 닮음으로부터 점 K가 변 AC를 선분 PA, QC에 비례하도록 분할하는 점이라는 것을 알 수 있다.

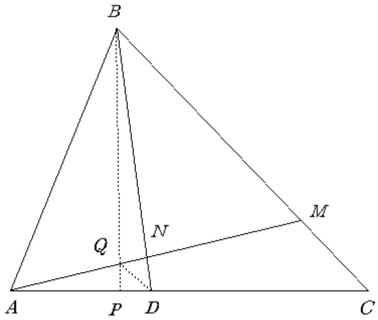
다른 작도 방법으로, Zetel은 1934년의 연구([6])에서 삼각형 ABC의 n제곱 직선 BD에 대해, $\dfrac{\sin ABD}{\sin CBD} = \dfrac{c^{n-1}}{a^{n-1}}$이 성립한다는 것을 이용하여 n제곱 직선으로부터 $(n+1)$제곱 직선을 작도하였다. 이를 자세히 살펴보자.

우선 등식 $\dfrac{\sin ABD}{\sin CBD} = \dfrac{c^{n-1}}{a^{n-1}}$의 증명을 살펴보자. 삼각형 ABD와 CBD의 넓이를 생각하면, 높이가 같으므로 $\dfrac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{c^n}{a^n}$이다. 한편 삼각형 ABD와 CBD의 넓이에 대해, 등식 $\dfrac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \dfrac{AB \cdot BD \cdot \sin ABD}{CB \cdot BD \cdot \sin CBD} = \dfrac{c \sin ABD}{a \sin CBD}$가 성립한다. 이 등식을 $\dfrac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \dfrac{c^n}{a^n}$과 연립하면, $\dfrac{\sin ABD}{\sin CBD} = \dfrac{c^{n-1}}{a^{n-1}}$이 성립함을 알 수 있다.

이제 $AB < BC$인 삼각형 ABC에 n제곱 직선 BD가 주어졌다고 하자. 변 BC에 $AB = BM$인 점 M을 잡아, 선분 AM을 작도하자(그림 2).



[그림 2]



[그림 3]

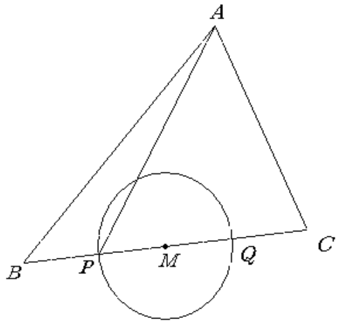
그러면 삼각형 BAM은 이등변삼각형이며, 선분 BD와 AM의 교점 N에 대해 $\frac{S_{ABN}}{S_{MBN}} = \frac{AN}{MN}$이 성립한다. 그리고 $\frac{S_{ABN}}{S_{MBN}} = \frac{AB \cdot BN \cdot \sin ABN}{MB \cdot BN \cdot \sin MBN}$이다. 이때 선분 AB, MB가 같으므로, 이들 등식으로부터 $\frac{AN}{MN} = \frac{\sin ABN}{\sin MBN}$이 성립한다. 그런데 [그림 2]에서 $\frac{\sin ABD}{\sin CBD} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}$이므로, $\frac{AN}{MN} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}$이 된다. 결국 변 AC에서 $\frac{AD}{DC} = \frac{c^n}{a^n}$인 점 D에 대해 선분 BD와 AM의 교점 N을 생각하면 $\frac{AN}{MN} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}$가 된다.

이로부터 선분 AM을 $c^n : a^n$으로 나누는 점 Q를 잡아 직선 BQ와 AC의 교점을 P라 하면(그림 3), $\frac{AP}{PC} = \frac{c^{n+1}}{a^{n+1}}$이 된다는 것을 추측할 수 있다. 실제로 [그림 2]에서 점 D를 지나 변 BC와 평행한 직선을 그어 선분 AD와의 교점을 Q라 하면, 삼각형 ADQ와 ACM의 닮음에 의해 $\frac{AQ}{QM} = \frac{c^n}{a^n}$이 된다. 이제 직선 BQ와 AC의 교점을 P라 하면, $(n+1)$제곱 직선 AP를 얻게 된다.

한편, Zetel은 음수인 n에 대한 n제곱 직선의 작도를 등분할 직선들(isotomic lines)의 개념을 이용하여 제시하였다. 삼각형 ABC의 한 꼭짓점을 지나며 이 꼭짓점의 대변의 중점으로부터 같은 거리만큼 떨어진 두 점을 각각 지나는 두 직선을 삼각형에서 등분할(isotomic) 직선들이라 한다.

등분할 직선들을 작도하려면, 삼각형 ABC의 꼭짓점 A의 대변인 BC의 중점 M을 잡는다. 그리고 선분 BM의 점 P를 잡아, 직선 AP를 작도한다. 이제 중심

M이고 반지름이 MP인 원을 그려 선분 CM과의 교점을 Q라 하면(그림 4), 직선 AP와 AQ는 등분할 직선들이 된다.



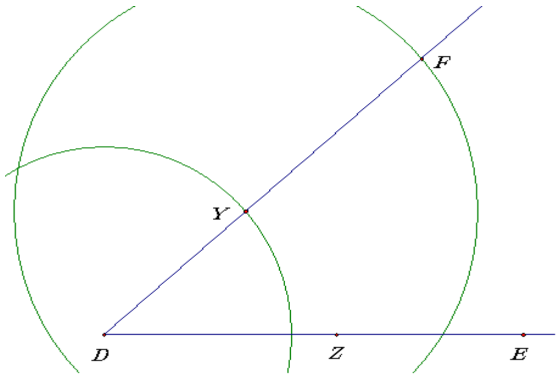
[그림 4]

이제 음수인 경우에 대해 n제곱 직선의 작도를 생각하자. AP를 n제곱 직선이라 하고, AP와 AQ는 등분할 직선들이라 하자. 그러면 $\frac{BP}{CP}=\frac{c^n}{b^n}$이며, 등식 $BP=BM-MP=CM-MQ=CQ$, $CP=CM+MP=BM+MQ=BQ$가 성립한다. 이로부터 $\frac{BP}{CP}=\frac{CQ}{BQ}=\frac{c^n}{b^n}=\frac{b^{-n}}{c^{-n}}$이 성립하며, AQ는 $(-n)$제곱 직선이 된다는 것을 알 수 있다.

2. 삼각형의 닮음을 이용하는 방법

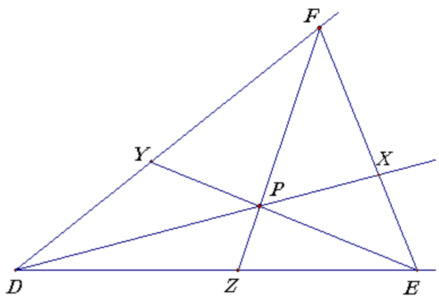
본 연구에서는 삼각형의 닮음, 체바의 정리를 이용하여, n제곱 직선을 작도하는 평이하고 새로운 방법을 찾았다. 이를 살펴보자. $n=1$인 경우는 각의 이등분선의 작도가 되므로, $n=2$인 경우 n제곱 직선의 작도를 살펴보자. 즉 변 AB에 $\frac{AQ}{BQ}=\frac{b^2}{a^2}$인 점 Q를 잡아, CQ를 작도해야 한다.

우선 선분들의 비가 $b^2:a^2$인 두 선분을 작도하자. 어떤 반직선에 $DZ=a$, $ZE=b$가 되도록 D, Z, E를 잡고, 다른 반직선에 $DY=b$, $YF=a$가 되도록 점 Y, F를 잡자(그림 5).



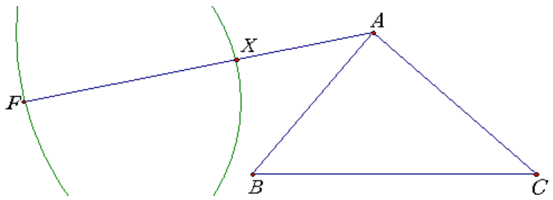
[그림 5]

이제 점 F와 E, F와 Z, Y와 E를 연결하고, 선분 FZ, YE의 교점을 P라 놓으면, 삼각형 PDE를 얻을 수 있다. 그리고 직선 DP을 그어 선분 FE와의 교점을 X라 하자(그림 6). 그러면 체바의 정리를 사용하여등식 $\frac{FY}{DY} \cdot \frac{DZ}{EZ} \cdot \frac{EX}{FX} = 1$을 얻고, $EX : FX = b^2 : a^2$가 된다. 결국 비가 $b^2 : a^2$인 선분 EX, FX를 얻을 수 있다.



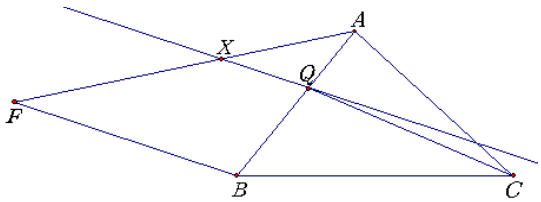
[그림 6]

이제, 삼각형 ABC에서 $n=2$인 n제곱 직선을 작도하자. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A로부터 반직선을 그어 $AF=EF$가 되는 점 F를 잡고, 선분 FX를 작도하자(그림 7).



[그림 7]

이제 점 F와 B를 직선으로 연결하고, 점 X를 지나며 선분 FB와 평행한 선분 XQ를 작도하고 점 C와 Q를 연결하는 직선을 작도하자(그림 8). 그러면 $\frac{AQ}{BQ}=\frac{b^2}{a^2}$가 되며, 직선 CQ는 $n=2$인 경우의 n제곱 직선이 된다.



[그림 8]

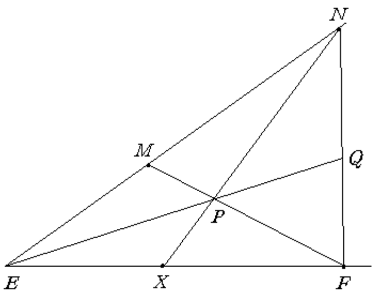
실제로 삼각형 AXQ와 AFB는 닮음이며, $AX:XF=AQ:BQ$가 된다. 한편 $EX:FX=b^2:a^2$이므로, $AQ:BQ=b^2:a^2$가 되며, 직선 CQ는 $n=2$인 경우의 n제곱 직선이다.

$n=2$인 경우의 n제곱 직선 작도 방법을 분석하면, 첫째 삼각형 ABC에 대한 n제곱 직선을 작도하기 위해 보조 삼각형을 생각하여 $a^2:b^2$인 선분을 작도하고, 둘째 얻어진 선분들을 삼각형 ABC의 한 꼭짓점을 지나는 보조선에 작도하여, 삼각형 ABC의 n제곱 직선을 작도하였다.

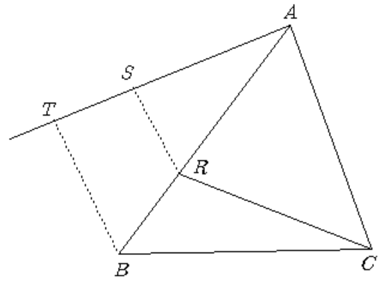
이제 이 방법을 일반화하여, n제곱 직선이 주어진 경우에 $(n+1)$제곱 직선을 작도할 수 있다.

가령 $EX:FX=b^2:a^2$인 선분 EX와 FX가 주어졌다고 가정하자. 이로부터 $n=3$인 경우의 n제곱 직선을 작도하자. 점 E로부터 반직선을 그어 $EM=a$, $MN=b$인 점을 작도하고, 점 M과 F, N과 X, N과 F를 연결하고, 선분 MF와 NX의 교점을 P라 하자(그림 9). 직선 EP와 NF의 교점을 Q라 하면, 체바의 정리에 의해 $\frac{FQ}{QN}=\frac{a^3}{b^3}$이 된다. 이로부터 비가 $a^3:b^3$인 선분 FQ, QN을 얻을

수 있다.



[그림 9]

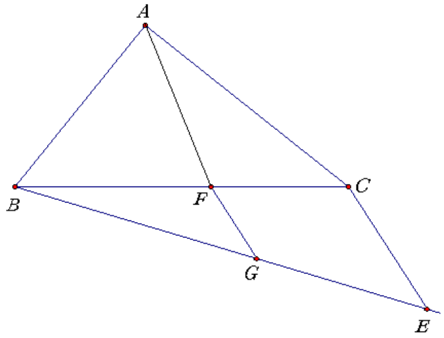


[그림 10]

이제 삼각형 ABC의 꼭짓점 A로부터 보조선을 긋고, 보조선에 $FQ=AS$, $QN=ST$인 점 S, T를 표시하자. 점 T, B를 연결하고, 점 S를 지나 선분 TB에 평행한 선분 SR을 작도하면(그림 10), 닮음인 삼각형 ASR, ATB를 얻게 된다. 이로부터 $\frac{AR}{RB}=\frac{AS}{ST}=\frac{a^3}{b^3}$이 된다. 즉 직선 CR은 $n=3$인 경우의 n제곱 직선이 되며, $n=2$인 경우의 n제곱 직선으로부터 $n=3$인 경우의 n제곱 직선을 얻었다.

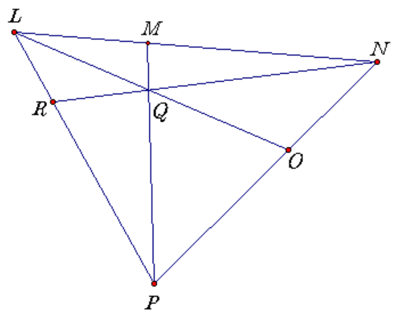
[그림 9, 10]과 유사한 작도와 방법으로, $n=k$인 경우의 n제곱 직선이 주어지면, $n=k+1$인 경우의 n제곱 직선을 작도할 수 있다. 즉 첫째, 꼭짓점 A로부터 k제곱 직선 AS가 주어지면, $\frac{BS}{CS}=\frac{c^k}{b^k}$인 것과 체바의 정리를 이용하여 $\frac{LM}{MN}=\frac{c^{k+1}}{b^{k+1}}$인 선분 LM, MN을 작도하고, 둘째 꼭짓점 B로부터 반직선을 그어 $LM=BS$, $MN=ST$인 점을 잡고, 점 S를 지나며 선분 CT와 평행한 선분 SR를 작도한다. 그러면 AR이 구하는 $(k+1)$제곱 직선이 된다.

이제 $n=-1$인 경우에 n제곱 직선을 작도하자. 삼각형 ABC의 꼭짓점 B로부터 반직선을 그어, 반직선에 $BG=b$, $GE=c$인 선분을 작도하자. 이제 점 E와 C를 연결하고, 점 G를 지나 EC와 평행한 선분 GF를 작도하자(그림 11). 그러면 삼각형 BGF와 BEC는 닮음이므로, $\frac{BF}{FC}=\frac{b}{c}$가 된다. 그런데 $\frac{BF}{FC}=\frac{b}{c}=\frac{\frac{1}{c}}{\frac{1}{b}}=\frac{c^{-1}}{b^{-1}}$이므로, 선분 AF는 $n=-1$인 경우의 n제곱 직선이 된다.

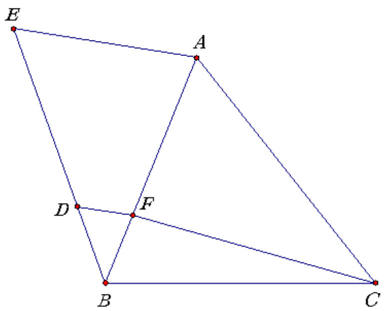


[그림 11]

한편 $n=-2$인 경우에 n제곱 직선의 작도를 살펴보자. 임의의 반직선에 $LM=BC$, $MN=AC$인 점 L, M, N을 잡자. 이제 점 N을 지나는 다른 반직선에 $NO=BC$, $OP=AC$인 점 O, P를 잡자(그림 12). 이제 점 M과 P, L과 O를 연결하여 교점을 Q라 하고, 선분 LP와 직선 NQ의 교점을 R이라 하자. 그러면 삼각형 LNP에서 체바의 정리에 의해 $\dfrac{LR}{RP}=\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{b^{-2}}{a^{-2}}$가 성립한다. 즉 선분 $BC=a$, $AC=b$이 주어졌을 경우에 $\dfrac{LR}{RP}=\dfrac{b^{-2}}{a^{-2}}$인 선분 LR, RP를 얻을 수 있다.



[그림 12]



[그림 13]

이제 삼각형 ABC의 꼭짓점 B로부터 반직선을 긋고, 이 반직선에 $LR=BD$, $RP=DE$인 점 D, E를 잡자. 그러면 닮음인 삼각형 BDF, BEA를 얻게 된다(그림 13). 그러면 $\dfrac{BF}{FA}=\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{a^{-2}}{b^{-2}}$이 된다. 이로부터 직선 CF는 $n=-2$인 경

우에 n제곱 직선임을 알 수 있다.

[그림 13]과 같은 작도를 통해, $n=-k$인 경우의 n제곱 직선이 주어지면, $n=-(k+1)$인 경우의 n제곱 직선을 작도할 수 있다.

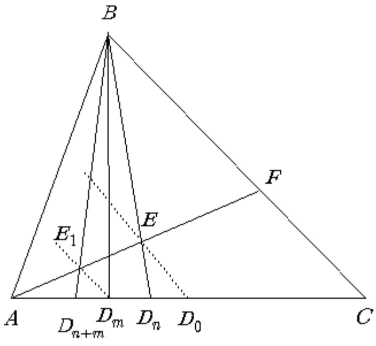
III. n제곱 직선, m제곱 직선에서 $(n+m)$제곱 직선의 작도

n제곱 직선으로부터 $(n+1)$제곱 직선을 작도하는 몇몇 방법들을 살펴보았다. n제곱 직선을 작도하는 다른 접근으로, n제곱 직선과 m제곱 직선이 주어졌을 때에 $(n+m)$제곱 직선을 작도하는 방법을 살펴보자. 즉 1제곱 직선과 1제곱 직선이 주어지면 2제곱 직선을 얻을 수 있고, 1제곱 직선과 2제곱 직선이 주어지면 3제곱 직선이 얻을 수 있는 그러한 방법을 살펴보자.

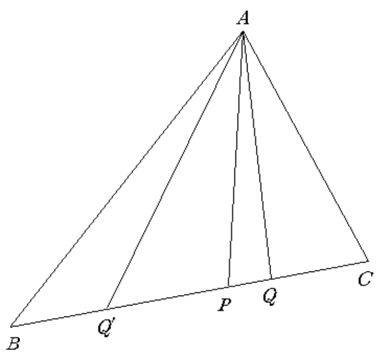
1. 복비를 이용한 Zetel의 방법

Zetel([5])은 복비 개념을 이용하여, n제곱 직선과 m제곱 직선이 주어진 경우에 $(n+m)$제곱 직선을 작도하는 방법을 제시하였다. Zetel의 작도 방법을 자세히 살펴보자.

삼각형 ABC에서 BD_n은 n제곱 직선, BD_m은 m제곱 직선, D_0는 변 AC의 중점이라 하자(그림 14). 점 D_0를 지나며 변 BC와 평행인 직선을 그어 BD_n과의 교점을 E라 하자. 이제 점 A, E를 지나는 직선을 긋고, 점 D_m을 지나 변 BC와 평행인 직선을 긋자. 이들 두 직선의 교점을 E_1이라 하면, BE_1이 구하는 $(n+m)$제곱 직선이 된다.



[그림 14]



[그림 15]

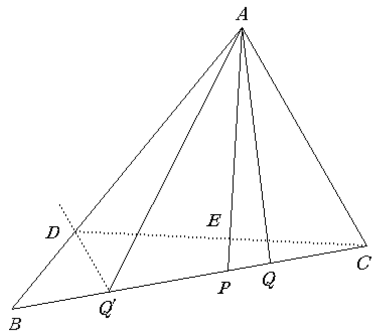
실제로 복비의 정의에 의해 $(ACD_nD_0)=\dfrac{AD_n \cdot CD_0}{AD_0 \cdot CD_n}=\dfrac{AD_n \cdot CD_0}{CD_0 \cdot CD_n}=\dfrac{AD_n}{CD_n}=\dfrac{c^n}{a^n}$, $(ACD_mD_0)=\dfrac{c^m}{a^m}$이 성립하며, $(AFE_1E)=(ACD_mD_0)=\dfrac{c^m}{a^m}$, $(AFE_1E)=(ACD_{m+n}D_n)=\dfrac{c^m}{a^m}$이다. 그리고 $\dfrac{AD_{m+n}}{CD_{m+n}}:\dfrac{AD_n}{CD_n}=\dfrac{c^m}{a^m}$이고 $\dfrac{AD_{m+n}}{D_{m+n}C}=\dfrac{c^{m+n}}{a^{m+n}}$이 성립한다. 이로부터 BD_{m+n}이 $(m+n)$제곱 직선이 된다는 것을 알 수 있다.

복비 개념은 기하학에서 중요한 개념이지만, 현재 중등학교에서는 교육과정이나 심화학습의 수준에서 다루어지고 있지는 않다. 본 연구에서는 중등학교 수준에서 접근이 가능한 작도 방법을 탐구하였다.

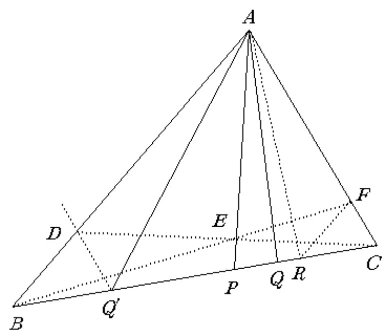
2. 닮음을 이용하는 방법

본 연구에서는 등분할 직선들, 체바의 정리, 닮음을 이용하여 n제곱 직선과 m제곱 직선이 주어진 경우에 $(n+m)$제곱 직선을 작도하는 새로운 방법을 찾았다. 이를 살펴보자.

삼각형 ABC에서 m제곱 직선 AQ와 n제곱 직선 AP를 작도하자. 그리고 AQ의 등분할 직선 AQ'을 작도하자(그림 15).



[그림 16]



[그림 17]

이제 점 Q'으로부터 변 AC와 평행한 선분을 그어, 변 AB와의 교점을 D라 하고 선분 CD를 작도한다. 그리고 선분 CD와 AP의 교점을 E라 하자(그림 16). 한편 직선 BE와 변 AC의 교점을 F라 하고, F를 지나며 변 AB와 평행인 선분 FR을 작도하자(그림 17). 그러면 AR이 구하는 $(n+m)$제곱 직선이 된다.

실제로 직선 AP, AQ가 각각 n제곱 직선, m제곱 직선이므로, 등식

$\frac{BP}{CP}=\frac{c^n}{b^n}$, $\frac{BQ}{CQ}=\frac{c^m}{b^m}$이 성립한다. 한편 직선 AQ'은 직선 AQ의 등분할 직선이므로, $\frac{BQ'}{CQ'}=\frac{b^m}{c^m}$이다. [그림 17]에서 삼각형 $BQ'D$와 BCA는 닮음이므로, $\frac{BQ'}{CQ'}=\frac{BD}{DA}=\frac{b^m}{c^m}$가 성립한다.

이제 삼각형 ABC의 선분 AP, BF, CD에 대해 체바의 정리를 사용하자. 그러면 $\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$이며 $\frac{BD}{DA}=\frac{b^m}{c^m}$, $\frac{AD}{DB}=\frac{c^m}{b^m}$이며, $\frac{BP}{CP}=\frac{c^n}{b^n}$이므로, 등식 $\frac{CF}{FA}=\frac{b^{m+n}}{c^{m+n}}$이 성립한다. 한편 삼각형 CFR과 CAB가 닮음이므로, $\frac{CF}{FA}=\frac{CR}{BR}$이다. 결국 $\frac{CR}{BR}=\frac{b^{m+n}}{c^{m+n}}$이 되며, 직선 AR은 $(n+m)$제곱 직선이 된다는 것을 알 수 있다.

삼각형의 n제곱 직선을 작도하는 다양한 방법들을 살펴보았다. 후속연구로는 n제곱 직선에 대한 다양한 대수적 성질을 탐구할 수 있을 것이다. 특히 Delibash의 연구([4]) 등에서 n제곱 직선의 길이에 대한 대수적 성질이 연구되기는 하였지만, 아직 n제곱 직선에 대한 대수적 성질들이 많이 밝혀지지 않았다.

IV. 결론

삼각형은 평면기하학에서 연구하는 중요한 도형 중의 하나이며, 삼각형의 성질들은 다양한 확장이 가능한 경우가 많으므로, 오래 전부터 다양하게 연구되어 왔다. 그리고 삼각형에 대한 문제들은 중등학교 수준의 수학적 개념들, 도구들, 예리한 수학적 사고 활동을 통해 해결되는 경우가 많기 때문에, 창의적인 수학적 활동이라는 측면에서 흥미로운 교수-학습 자료가 되기도 한다. 본 연구에서는 1800년대 중반에 소개된 삼각형의 n제곱 직선에 대한 문제들 중에서 n제곱 직선의 작도 문제를 과학고등학교 수학 영재학생들과의 탐구활동을 통해 연구하였다.

러시아의 수학자 Zetel은 n제곱 직선의 작도 방법을 연구하였는데, 첫 번째 방법은 평행선과 닮음을 이용하여 n제곱 직선으로부터 $(n+1)$제곱 직선을 작도하는 방법이며, 두 번째 방법은 삼각형 ABC의 n제곱 직선 BD에 대해, $\frac{\sin ABD}{\sin CBD}=\frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}$이 성립한다는 것을 이용하여 n제곱 직선으로부터 $(n+1)$제곱

직선을 작도하는 방법이며, 세 번째 방법은 복비 개념을 이용하여, n제곱 직선과 m제곱 직선이 주어진 경우에 $(n+m)$제곱 직선을 작도하는 방법이다. 본 연구에서는 Zetel의 작도 방법 및 특징을 자세히 소개하였다.

한편 본 연구에서는 n제곱 직선을 작도하는 두 가지 새로운 방법을 제시하였는데, 첫 번째 방법은 삼각형의 닮음을 이용하여 n제곱 직선으로부터 $(n+1)$제곱 직선을 작도하는 방법이며, 두 번째 방법은 등분할 직선들, 체바의 정리, 닮음을 이용하여 n제곱 직선과 m제곱 직선이 주어진 경우에 $(n+m)$제곱 직선을 작도하는 방법이다. 본 연구에서 발견한 방법들은 Zetel의 방법에서처럼 삼각함수나 복비를 사용하지 않고, 삼각형의 닮음, 체바의 정리를 사용하여 얻어진 평이한 방법들이다.

본 연구를 통해, n제곱 직선의 연구에 대한 정보들을 소개하고, 과학고등학교 수준의 R&E에서 활용할 수 있는 새로운 탐구의 한 영역을 소개할 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] 도종훈, 평면도형 탐구의 기본 요소로서 삼각형의 재조명, <u>수학교육</u> 46권 4호 (2007), pp.493-502.

[2] 유익승, 한인기, 신현용, 삼각형의 높이와 방접원의 개념유추에 대한 연구, <u>수학교육논문집</u> 20권 1호 (2006), pp.9-18.

[3] 한인기, 오성주, 삼각형 방심의 계량적 성질에 대한 연구, <u>수학교육논문집</u> 23권 4호 (2009), pp.1059-1078.

[4] Delibash D.A., O vychislenii dliny pryamoi n, *Matematicheskoe Prosveshenie* №11 (1937), pp.5-8.

[5] Zetel S. O., delenii storon treugolika proportsionalno nth stetenyam prilezashih storon, *Matematicheskoe Prosveshenie* №6 (1936), pp.5-8.

[6] Zetel S. O., delenii storon treugolika proportsionalno nth stetenyam prilezashih storon, *Matematicheskoe Prosveshenie* №1(1934), pp.6-9.

[7] Zetel S. O., postroenii i svoistvah nekotoryh Tsevian, *Matematicheskoe Obrazovanie* №2-3 (1929), pp.66-70.

Kim Ji Hoon, Cho Seong Hun, Lee Dong Chan,
An Seung Min & Lee Seong Hyun
Ulsan Science High School
689-821, Korea
E-mail addresses: whitekimchi@hanmail.net, acarlos93@naver.com,
josh203@hanmail.net, asm7615@naver.com & mathlsh@use.go.kr

Han Inki*
Gyeongsang National University
660-701, Korea
E-mail address: inkiski@gnu.ac.kr

* correspondent author