

주식수익률의 VaR와 ES 추정: GARCH 모형과 GPD를 이용한 방법을 중심으로

김지현¹ · 박회영²

¹송실대학교 정보통계보험수리학과, ²송실대학교 정보통계보험수리학과

(2010년 5월 접수, 2010년 6월 채택)

요약

금융 포트폴리오의 두 위험측도인 VaR와 ES에 대한 여러 추정방법을 1일 후와 10일 후의 경우로 나누어 각각 비교하였다. 2008년 미국발 세계 금융위기 기간을 포함한 KOSPI 자료와 해외 5개국의 종합주가지수 자료를 이용하여 실증적으로 비교하였다. 손실 분포의 두터운 꼬리와 조건부 이분산성을 동시에 고려하는 방법을 중심으로 여러 방법을 추가적으로 고려하였고, 국내 자료에 어떤 방법이 적절하며 종합적인 성능은 어떤가를 살펴보았다.

주요용어: VaR, 두터운 꼬리 분포, 일반화 파레토 분포, 조건부 이분산성.

1. 연구의 배경과 필요성

2008년 비우량 주택담보대출로 인한 미국발 세계 금융위기로 각국의 금융기관들이 큰 손실을 입게 되자 금융 위험의 예측 시스템에 대한 문제점이 다시 지적되고 있다. 특히 널리 쓰이고 있는 위험 측도인 VaR(Value-at-Risk)가 시장 위험을 심각하게 과소추정하고 있음이 드러나, 국제결제은행(BIS; Bank for International Settlements)의 바젤위원회(the Basel II Committee on Banking Supervision)는 2009년 7월 9일 수정안을 채택하였는데, 여기에 금융기관은 2010년 말 이전에 부하 VaR(stressed VaR)를 계산해야 한다는 새로운 요구사항이 포함되어 있다. 부하 VaR의 정의는 BIS 웹사이트 문서(<http://www.bis.org/publ/bcbs158.htm>)에 따르면 “심대한 손실(significant loss)이 발생한 1년의 기간을 고려한 VaR”라고 되어 있다. 어떤 1년의 기간을 어떻게 고려해야 하는가에 대한 구체적 지침이 없는 다소 모호한 정의이지만 이러한 정의를 필요로 한다는 사실로부터 기존의 VaR의 과소추정 문제가 공식적으로 인식되고 있음을 알 수 있다.

VaR의 과소추정에 대한 문제는 연구 논문을 통해 이미 오래 전부터 지적되어 왔는데 부하 VaR가 아닌 다른 방식의 접근이 시도되었다. 과소추정의 주요 원인으로 지목되는 금융자료의 첫 번째 특징으로, 전통적인 VaR 계산에서 가정하고 있는 정규분포에 비해 관측된 금융자료의 분포는 그 꼬리가 두텁다는(heavy-tailed distribution) 것을 들 수 있다. 두터운 꼬리 문제를 해결하기 위한 방법들 중에서 McNeil과 Saladin (1997)은 임계값을 넘어가는 자료에 GPD(generalized Pareto distribution)를 적용하는 방법에 대해 잘 정리하였으며, 이러한 방법에 대한 첫 연구는 Rootzen과 Tajvidi (1996)에 의해 이루어졌음을 지적하였다.

¹교신저자: (156-743) 서울시 동작구 상도동 511, 송실대학교 자연대학 정보통계보험수리학과, 교수.
E-mail: jxk61@ssu.ac.kr

주가지수와 같은 금융자료의 또 다른 특징은 한번 변동성이 커지면 그 경향이 당분간 지속된다는 ‘변동성의 군집(volatility clustering)’ 성향이다. 이 성향은 Bollerslev (1986)의 조건부 이분산성(generalized autoregressive conditional heteroscedasticity; GARCH)이라는 시계열모형으로 분석에 반영할 수 있다. Gencay 등 (2003)은 두 가지 방법, 즉 GARCH 모형에 의한 방법과, 시계열 모형을 고려하지 않고 GPD를 이용하는 방법을 주식시장 자료에 각각 적용하여 비교하였다. 한편 McNeil과 Frey (2000, 이하 MF로 부르기로 함)는 이 두 가지 방법을 동시에 적용할 것을 제안하였다. 금융자료에 GARCH 모형을 적용하고 잔차의 분포로 GPD를 이용하면 두터운 꼬리와 변동성의 군집이라는 두 특성에 효과적으로 대처할 수 있음을 실증적으로 보였다.

하지만 MF의 추정방법에 대한 추가적인 연구가 필요하다. MF는 분산에 대한 GARCH 모형과 함께 평균에 대해 AR(auto-regressive) 모형을 고려할 것을 제안하였으나 평균에 관한 모형이 굳이 필요한지에 관한 언급이 없다. 그리고, 적절한 추정방법은 주식시장의 위험 특성에 따라 달라질 수 있으므로 (Seymour과 Polakow, 2003) 한국 주식시장 자료에 가장 적절한 방법은 어떤 방법인지에 대한 실증적 연구도 필요하다. 문성주와 양성국 (2006)은 국내 주식수익률 자료에 대해 두터운 꼬리와 조건부 이분산성을 동시에 고려하는 MF의 추정방법을 적용하였으나 1일 후가 아닌 10일 후의 추정은 다루지 않았다. 10일 후 추정은 바젤위원회에서 요구하는 사항이며 1일 후 추정과 비교했을 때 모형이 다르고 추정 방법 또한 다르다. 본 연구에서는 2008년 미국발 금융위기를 포함한 20년 동안의 국내 종합주가지수 자료를 실증 연구에 포함시켰으며, MF가 제안한 추정방법에서 평균에 관한 모형이 얼마나 도움이 되는가를 살펴보고, 10일 후 추정 문제를 포함시켰으며 MF가 고려하지 않은 다른 방법도 추가적으로 고려하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서 금융위험의 측도인 VaR의 정의와 성질을 설명하고 ES(Expected Shortfall)라는 또 다른 위험 측도의 필요성과 정의에 대해서 정리하였다. 3절에서 1일 후의 VaR와 ES에 대한 여러 가지 추정방법에 대해 정리하고 성능을 비교하였으며, 4절에서는 10일 후의 추정 문제를 다루었다. 마지막 절에서 연구 내용을 요약하고 실증연구를 통해 발견한 사실들을 정리하였다.

2. 손실과 위험측도의 정의

시점 t 의 주가(본 연구에서는 종합주가지수)를 P_t 라고 할 때 시점 t 의 ‘주식수익률’을 흔히 $\log(P_t/P_{t-1})$ 로 정의한다. 주가는 기하적 브라운 운동(geometric Brown motion)으로 모형화 할 수 있다는 경험적 가설을 따를 때 정규분포를 적용하기 위해 주가를 로그변환 하였으며, Taylor 1차 근사에 의해 $\log(P_t/P_{t-1}) \approx (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$ 이므로 수익률로 해석 가능하기 때문에 주식수익률을 이와 같이 정의한 것으로 이해할 수 있다 (Fama, 1965). 손실은 수익의 반대 개념이므로

$$X_t = -\log \frac{P_t}{P_{t-1}} \quad (2.1)$$

을 시점 t 에서의 주식투자의 ‘손실’로 정의하기로 한다.

보편적으로 인정된 금융위험(financial risk)에 대한 정의는 없지만, “조직에 부정적 영향을 미치는 사건”, 또는 “정량화할 수 있는 손실 가능성”으로 위험을 정의할 수 있다 (McNeil 등, 2005). 신뢰수준 α 에서 어떤 포트폴리오의 VaR는 가장 널리 쓰이는 위험척도로서 포트폴리오의 손실을 X 라고 할 때

$$\text{VaR}_\alpha = \inf\{x : P(X > x) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\}$$

로 정의하며, 손실 분포의 α 분위수와 일치한다. VaR의 값이 크면 발생가능한 손실의 크기가 크다는 것을 의미한다.

VaR는 금융 위험에 대한 유용한 측도이지만 한계도 가지고 있다. 우선 VaR는 손실 분포의 극단값 분포에 대한 측도이지만 극단값의 크기에 대한 정보를 제대로 담고 있지 않다는 한계를 가지고 있다. 일례로 두 가지 다른 손실 분포가 있을 때 두 분포의 99% 분위수는 같을지라도 그 분위수를 넘어서는 값들의 크기의 분포는 다를 수 있는데 VaR는 이를 반영하지 못한다. VaR의 또 다른 단점은 부가법성(subadditivity)이 성립하지 않는다는 것이다. 두 가지 서로 다른 금융상품에 대한 손실을 X, Y 라고 하고 VaR와 같은 위험측도를 ρ 라고 할 때 $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ 가 성립하면 위험측도 ρ 는 부가법성을 갖는다고 정의한다. 분산투자는 위험을 감소시킨다는 가설이 있는데 부가법성은 위험측도가 이 가설을 만족시키는지 여부를 나타내는 성질로 이해할 수 있다. VaR와 같이, 부가법성을 만족하지 않는 위험측도는 일관성(coherence)이 없다고 하며 (Artzner 등, 1999), 일관성이 없는 위험측도가 위험 추정에 좋지 않은 이유를 Frey와 McNeil (2002)은 구체적 예를 들어 지적하였다.

이와 같은 VaR의 단점을 보완하기 위한 측도로 ES(Expected Shortfall)를 쓰는데 신뢰수준 α 의 ES에 대한 정의는 다음과 같다:

$$ES_\alpha = E(X|X \geq VaR_\alpha)$$

VaR를 넘어서는 값들의 조건부 평균으로 정의되는 ES는 CTE(Conditional Tail Expectation)라고도 부르는데, VaR를 초과하는 극단값의 크기에 관한 정보를 평균값을 통해 반영하며 부가법성도 만족한다. 따라서 VaR와 함께 보조적인 위험측도로 많이 쓰인다.

두 위험측도를 추정하기 위한 다양한 방법이 있는데 본 연구에서는 어떤 추정방법이 실제 자료에서 정확한 추정값을 제공하는가에 대해 살펴보고자 한다. 특정 포트폴리오에 대해 시점 t 에서 최근 n 개의 관측 손실 자료 $x_{t-n+1}, x_{t-n+2}, \dots, x_t$ 가 주어졌다고 하자. h 시점 후의 손실 $x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+h}$ 의 분포에 대한 VaR와 ES의 추정방법을 비교하고자 할 때 예측 기간 h 에 따라 추정방법이 달라진다. 따라서 위험측도의 문제를 한 시점 후($h = 1$)의 추정문제와 다시점 후($h > 1$)의 추정문제로 나누어 살펴보기로 한다.

3. 한 시점 후의 추정

3.1. 위험측도의 추정방법

위험측도의 다양한 추정방법에 대해 비교하기 전에 먼저 본 연구에서 고려한 방법들에 대해 간략히 설명한다.

역사적 모의실험 (Historical Simulation)

현재 시점 t 를 기준으로 최근 n 개의 자료 $x_{t-n+1}, x_{t-n+2}, \dots, x_t$ 에 근거한 경험적분포함수(empirical cumulative distribution function)로부터 VaR와 ES를 추정하는 방법이다. 자료의 분포에 대해 아무런 가정을 하지 않는다는 장점이 있으나, 경험적분포함수를 이용하여 구하는 표본 분위수는 관측값의 최대값을 벗어날 수 없다는 한계 때문에 자료의 수가 많지 않을 때 과소추정을 하게 되는 단점이 있다. 일례로 약 1년 동안의 자료 300개로부터 99.9% 분위수에 해당하는 $VaR_{0.999}$ 를 추정하고자 할 때, 자료의 수가 많지 않아 오른쪽 꼬리 끝부분에서 충분히 큰 값이 관측되지 않았을 가능성이 크지만 표본 분위수는 관측값의 최대값보다 클 수 없어 결과적으로 $VaR_{0.999}$ 를 과소추정하게 된다. 본 연구에서는 분위수 추정에 R (R Development Core Team, 2008)의 quantile 함수를 이용하였다 (R의 quantile 함수에서 전부 9가지의 표본 분위수 계산 방법을 지정할 수 있는데, 분위수 함수를 $Q(p) = F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\}$ 로 정의할 때 9가지 계산 방법에서 공통적으로 $\hat{Q}(0) = X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$,

$\hat{Q}(1) = X_{(n)}$ 이며, 자동 지정되는 7번째 계산방법에서는 $p_k = (k-1)/(n-1)$, $k = 1, \dots, n$ 일 때 $\hat{Q}(p_k) = X_{(k)}$ 로 정해지며, 나머지 다른 p 에서 $\hat{Q}(p)$ 는 선형보간(linear interpolation)에 의해 정해진다).

분산-공분산 방법 (Variance-Covariance Method)

위험 추정방법을 크게 모수적 모형과 비모수적 모형으로 구분할 수 있는데, 앞에서 설명한 역사적 모의 실험은 손실 x_{t+1} 의 분포 추정을 위해 경험적분포함수를 이용하는 비모수적 모형이다. 모수적 모형을 다시 조건부적인 방법과 무조건부적인 방법으로 구분할 수 있다. 시점 t 까지의 정보를 F_t 로 표시할 때 x_{t+1} 의 분포가 F_t 에 의존하는 방법을 조건부적인 방법이라 하고, 그렇지 않은 방법을 무조건부적인 방법이라고 한다.

무조건부 모수적 모형의 대표적인 방법으로 분산-공분산 방법(variance-covariance method)을 들 수 있다. 이 방법은 손실 x_{t+1} 이 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$ 를 따른다고 가정하고 평균과 분산을 추정하여 다음 VaR와 ES와 같은 위험측도를 추정한다. 이 방법은 암묵적으로 n 개의 자료 $x_{t-n+1}, x_{t-n+2}, \dots, x_t$ 가 iid(independent and identically distributed)임을 가정하고 있으며, μ 와 σ^2 는 시점 t 까지의 정보에 무관하므로 무조건부(unconditional)적인 방법이다. 이 방법을 분산-공분산 방법이라 부르는 이유는, 손실 분포가 평균과 분산만으로 결정되고 평균은 0으로 가정할 수 있는 경우가 많이 있으므로 결국 분산(다변량인 경우 공분산)에 의해 결정되기 때문인 것으로 짐작된다. 본 연구에서 μ 는 $x_{t-n+1}, x_{t-n+2}, \dots, x_t$ 의 표본평균으로, σ^2 는 표본분산으로 각각 추정한다. 이 방법으로 구한 신뢰수준 α 의 VaR와 ES 추정량은 다음과 같다:

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha = \hat{\mu} + \hat{\sigma}\Phi^{-1}(\alpha), \quad (3.1)$$

$$\widehat{\text{ES}}_\alpha = \hat{\mu} + \hat{\sigma} \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}. \quad (3.2)$$

위 식에서 ϕ 와 Φ 는 각각 표준정규분포의 확률밀도함수와 분포함수이다. 식 (3.1)은 분위수의 정의에 의해 자명하며, 식 (3.2)는 McNeil 등 (2005)의 식 (2.26)으로서 ES의 정의와 정규분포로부터 유도할 수 있다.

분산-공분산 방법은 정규분포를 이용함으로써 위험 추정 문제를 평균과 분산의 추정 문제로 단순화시켰다는 장점이 있으나, 실제 주식수익률(또는 손실)의 분포는 정규분포보다 꼬리가 두텁다는 경험적 증거들이 제시되었다 (Fama, 1965). 정규분포 대신 로그정규분포, t -분포 또는 혼합정규분포를 고려해볼 수 있으나 이러한 모수적 분포는 손실 x_{t+1} 이 가질 수 있는 값의 전체영역에 대한 분포이고 자료의 전부를 이용해 모수를 추정한다. 반면 우리의 관심은 꼬리 부분이고, 꼬리 부분이 아닌 나머지 영역에서 적합의 좋고 나쁨에는 관심이 없다. 그런데 모수적 분포는 모수의 추정을 위해 관심이 없는 부분도 같이 고려하기 때문에 정작 중요한 꼬리 부분에서 분포의 적합도가 떨어질 수 있다는 문제가 있다. 이런 점을 고려한 방법이 일반화 파레토 분포(Generalized Pareto Distribution; GPD)를 이용한 방법이다.

GPD 방법

GPD는 다음과 같은 분포함수(cumulative distribution function)를 갖는 분포로 정의한다:

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right), & \xi = 0. \end{cases}$$

이 때 $\beta > 0$ 이고, 받침(support)은 $\xi \geq 0$ 일 때 $y \geq 0$ 이며, $\xi < 0$ 일 때 $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ 이다. 한편, 임의의 확률변수 X 의 분포함수 F 에 대해 임계값(threshold) u 를 초과하는 값의 조건부 분포(excess distribution)를

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)} \tag{3.3}$$

와 같이 정의하자. Balkema와 de Haan (1974)과 Pickands (1975)는 임계값 u 가 충분히 크면 모든 $y > 0$ 에 대해 $F_u(y)$ 는 $G_{\xi, \beta}(y)$ 에 의해 근사될 수 있다는 것을 다음 식으로 표현하고 증명하였다:

$$\lim_{u \rightarrow x_0} \sup_{y \geq 0} |F_u(y) - G_{\xi, \beta(u)}(y)| = 0. \tag{3.4}$$

이 식에서 x_0 는 F 의 받침의 상한으로서 무한대일 수도 있으며, $\beta(u)$ 는 이 식을 만족시키는 β 값이 u 의 값에 따라 가변적이긴 하지만 존재한다는 의미이다. 식 (3.4)는 거의 모든 연속형 분포함수 F 에 대해 성립하는데 F 에 의해 결정되는 ξ 의 값에 따라 분포의 종류를 크게 세 가지로 분류할 수 있다. 먼저 $\xi > 0$ 에 대응하는 분포는 꼬리가 두터운 분포로서 Pareto, t , Burr, Cauchy 분포 등이 이에 속하며, $\xi < 0$ 에 대응하는 분포는 꼬리가 짧은 분포로서 베타분포, 균일분포 등이 이에 속한다. $\xi = 0$ 에 대응하는 분포로는 정규분포, 로그정규분포를 들 수 있다. $F_u(y)$ 와 $G_{\xi, \beta}(y)$ 의 관계에 관한 자세한 사항은 McNeil과 Saladin (1997)을 참고하면 된다. 식 (3.4)에 함축된 중요한 사실은 금융자료에 대한 우리의 관심이 오른쪽 꼬리 부분에 있을 때, 금융자료의 분포 F 의 종류에 상관없이 (꼬리가 두터운 분포이든 아니든 상관없이) GPD 분포를 가정하면 된다는 사실이다. 다만 임계값 u 가 어느 정도 커야 하는가가 중요하면서도 까다로운 문제인데, MF는 u 를 초과하는 관측값의 수가 50 이상이기만 하면 GPD의 근사 정도가 u 의 값에 그다지 민감하지 않다는 것을 제한된 모의실험을 통해 보였다. 본 연구에서 u 는 0.9 표본분위수(sample quantile)로 지정하였으며, GPD의 모수 ξ, β 는 R의 QRMLib package (McNeil, 2007)를 이용하여 추정하였다.

식 (3.3)으로부터 $x > u$ 일 때

$$F(x) = (1 - F(u))F_u(x - u) + F(u)$$

이며, 따라서 F_n 을 n 개의 관측값에서 구한 경험적분포함수라고 할 때 분포함수 F 는 식 (3.4)에 의해

$$\hat{F}(x) = (1 - F_n(u))G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}(x - u) + F_n(u)$$

으로 추정할 수 있다. 이로부터 $\alpha > F(u)$ 일 때 VaR_α 와 ES_α 의 추정량은 각각

$$\begin{aligned} \widehat{\text{VaR}}_\alpha &= u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1 - \alpha}{N_u/n} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right), \\ \widehat{\text{ES}}_\alpha &= \frac{1}{1 - \hat{\xi}} \left(\widehat{\text{VaR}}_\alpha + \hat{\beta} - \hat{\xi}u \right) \end{aligned}$$

와 같이 유도된다는 것을 보일 수 있다 (McNeil 등 (2005)의 식 (7.18), (7.19) 참조. 위 식에서 N_u 는 n 개의 관측값 중에서 임계값 u 를 초과하는 관측값의 수임).

시계열 모형을 이용하는 방법

Fama (1965)는 주식수익률에 대한 실증적인 연구를 통해 독립성에 관한 흥미있는 사실을 지적하였는데, 현재 시점의 수익률이 다음 시점의 수익률에 대한 부호 또는 방향에 대한 정보는 주지 못하지만 변

동성의 크기에 대한 정보는 준다는 것이 그것이다. 즉 현재 시점에서 양의 수익률을 올렸다는 사실이 다음 시점의 수익률의 방향에 대한 예측을 할 수 있는 데에는 도움을 주지 못하지만, 현재 수익률의 절대값의 크기가 크면 다음 시점에서의 수익률의 절대값의 크기도 커지는 경향이 있다는 것이다. 이러한 발견은, 금융시장에 대한 불안요인이 발생하여 주식시장의 변동성이 커질 때 그러한 경향은 일정 기간 지속된다는 점을 반영하는데, 그 후 수익률에 대한 모형이 조건부 이분산성(conditional heteroscedasticity)을 고려하는 시계열 모형으로 발전하는 데에 기여하였다.

MF는 위험 추정을 위해 다음과 같은 시계열모형을 고려하였다. 임의의 시점 t 에서 손실 X_t 에 관해

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t \quad (3.5)$$

를 가정한다. 이 때 Z_t 는 *iid*이며 평균이 0인 백색잡음이다. 시점 t 까지 정보 S_t 가 주어졌을 때 한 시점 후의 손실을 나타내는 $X_{t+1}|S_t$ 의 분포함수를 $F_{X_{t+1}|S_t}$, Z_t 의 분포함수를 F_Z 라고 하면

$$\begin{aligned} F_{X_{t+1}|S_t}(x) &= P(\mu_{t+1} + \sigma_{t+1}Z_{t+1} \leq x|S_t) \\ &= F_Z\left(\frac{x - \mu_{t+1}}{\sigma_{t+1}}\right) \end{aligned}$$

이다. 따라서 $X_{t+1}|S_t$ 의 분포는 μ_{t+1} , σ_{t+1} 그리고 *iid*인 백색잡음 Z_t 의 분포함수인 F_Z 에 의해 결정된다. 예를 들어, 신뢰수준 α 에서 $X_{t+1}|S_t$ 의 VaR와 ES를 각각 VaR_α 와 ES_α 라고 하고, 같은 신뢰수준에서 Z_t 의 VaR와 ES를 각각 VaR_α^Z , ES_α^Z 라고 하면, 위 식에 의해

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha &= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}\text{VaR}_\alpha^Z, \\ \text{ES}_\alpha &= \mu_{t+1} + \sigma_{t+1}\text{ES}_\alpha^Z \end{aligned} \quad (3.6)$$

가 된다. MF는 조건부 평균 $\mu_t (= E(X_t|S_{t-1}))$ 와 $\epsilon_t = X_t - \mu_t$ 에 대한 조건부 분산 σ_t^2 에 대해 다음과 같은 AR(1)-GARCH(1,1) 모형을 가정하였다:

$$\begin{aligned} \mu_t &= \phi X_{t-1}, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

위 식에서 $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\beta > 0$ 이다. n 개의 자료 $(x_{t-n+1}, x_{t-n+2}, \dots, x_t)$ 에 AR(1)을 적용하여 $\hat{\phi}$ 을 얻은 다음, 식 (3.7)으로부터 $(\hat{\mu}_{t-n+1}, \hat{\mu}_{t-n+2}, \dots, \hat{\mu}_t)$ 을 구하고, $(x_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1}, x_{t-n+2} - \hat{\mu}_{t-n+2}, \dots, x_t - \hat{\mu}_t)$ 에 GARCH(1,1)을 적용하여 $(\hat{\sigma}_{t-n+1}, \hat{\sigma}_{t-n+2}, \dots, \hat{\sigma}_t)$ 을 얻는다. 이제, $(z_{t-n+1}, z_{t-n+2}, \dots, z_t) = ((x_{t-n+1} - \hat{\mu}_{t-n+1})/\hat{\sigma}_{t-n+1}, (x_{t-n+2} - \hat{\mu}_{t-n+2})/\hat{\sigma}_{t-n+2}, \dots, (x_t - \hat{\mu}_t)/\hat{\sigma}_t)$ 에 GPD를 적용하여 F_Z 를 추정할 수 있으며, 이로부터 VaR_α^Z 와 ES_α^Z 를 추정할 수 있다. 그리고 최종적으로

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{t+1} &= \hat{\phi} X_t, \\ \hat{\sigma}_{t+1}^2 &= \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \epsilon_t^2 + \hat{\beta} \hat{\sigma}_t^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

과 식 (3.6)로부터 VaR_α 와 ES_α 를 추정할 수 있다.

이 때, AR(1)-GARCH(1,1)이 아닌 다른 시계열모형을 가정할 수도 있으나 MF는 위 모형이 “단순하면서도 효과적(parsimonious but effective)”이라고 주장하고, 실제 자료에서 시계열모형이 아닌 다른 모형보다 더 나은 성능을 가짐을 보였다. 본 연구에서도 이 모형을 적용하였으며 R의 tseries package에 있는 ar(), garch() 함수로 구현하였다.

한편, Fama (1965)는 변동성(volatility)의 이분산성 존재 가능성을 지적하였으나, 평균의 독립성, 즉 한 시점의 수익률의 방향성이 다른 시점의 수익률의 방향성과는 무관함을 주장하였는데, 본 연구에서 이를 반영하여, 평균에 관한 모형은 고려하지 않고 이분산성만 고려하는 GARCH(1,1) 모형을 AR(1)-GARCH(1,1) 모형과 함께 적용하여 그 성능을 비교하였다.

또한, F_Z 를 정규분포로 가정하여 VaR와 ES를 추정할 수도 있는데, 본 연구에서는 이 방법도 적용하여 다른 방법들과 성능을 비교하였다.

3.2. 성능 비교 결과

앞 절에서 설명한 총 7가지의 추정방법들을 정리하면 다음과 같다.

- Historical Simulation: 역사적 모의실험에 의한 추정방법
- AR-GARCH-GPD: 손실 자료에 대해 시계열 모형 AR(1)-GARCH(1,1)을 가정하고, 백색잡음의 꼬리 부분에 대한 근사 분포로 GPD를 적용하는 방법
- AR-GARCH-Normal: 손실 자료에 대해 시계열 모형 AR(1)-GARCH(1,1)을 가정하고, 백색잡음이 정규분포를 따른다고 가정하는 방법
- GARCH-GPD: 이분산성만 고려하는 시계열 모형인 GARCH(1,1)을 가정하고, 백색잡음의 꼬리 부분에 대한 근사 분포로 GPD를 적용하는 방법
- GARCH-Normal: 이분산성만 고려하는 시계열 모형인 GARCH(1,1)을 가정하고, 백색잡음이 정규분포를 따른다고 가정하는 방법
- iid-GPD: 손실 자료가 iid임을 가정하고 꼬리 부분에 대한 근사 분포로 GPD를 적용하는 방법
- iid-Normal: 손실 자료가 iid이면서 정규분포를 따른다고 가정하는 분산-공분산 방법.

실제 자료를 이용해 추정방법들의 성능을 비교하기 위해, 1990년 1월부터 2009년 8월까지의 한국종합주가지수(KOSPI) 자료 외에 QRMLib package에 있는 5개국의 주가지수(미국 Dow Jones 지수 1980.1~2004.3, 영국 FTSE 지수 1990.1~2004.3, 스위스 주식시장 지수 1990.11~2004.3, 중국 Hang Seng 지수 1994.1~2004.3, 일본 Nikkei 지수 1994.1~2004.3)를 이용하였다. 6개국 주식시장의 손실 자료는 그림 3.1과 같다. 한국과 중국 같은 이머징마켓의 변동폭이 선진국 시장의 변동폭보다 큼을 알 수 있다.

먼저, 추정방법들 사이의 차이를 보기 위해 위 7가지의 추정방법 중 차이가 뚜렷한 AR-GARCH-GPD, iid-GPD, iid-Normal 3가지 VaR 추정값을 그림 3.2에 나타내었다. 차이를 명확히 보기 위해, 약 20년 동안의 KOSPI 자료 중 2007년 1월 2일부터 2009년 8월 14일까지 약 1년 8개월의 것만 표시하였다. AR-GARCH-GPD는 손실 자료의 변동 크기에 따라 같이 변하는 것으로 보아 이분산성을 반영하고 있음을 알 수 있다. iid-GPD는 주어진 기간에서 iid-Normal에 비해 큰 추정값을 제공하고 있으며 특히 2008년 미국발 금융위기에 따른 큰 변동 후 그 차이가 더 커짐을 알 수 있다.

후방검증(backtesting)을 통해 총체적인 성능을 비교하였다. 시점 t 에서 n 개의 손실 자료 $(x_{t-n+1}, x_{t-n+2}, \dots, x_t)$ 로 시점 $t+1$ 의 위험측도를 추정하고 실제 자료인 x_{t+1} 로 그 성능을 측정한다. 즉, VaR_α 의 경우 x_{t+1} 가 시점 $t+1$ 에서의 VaR_α 의 추정값인 $\widehat{\text{VaR}}_\alpha^t$ 을 벗어나는지 여부를 측정하고, ES_α 의 경우 $x_{t+1} - \widehat{\text{ES}}_\alpha^t$ 의 값을 측정한다. 전체 자료의 수를 N 이라고 하면 이 작업을 $t = n, \dots, N-1$ 에 대해 차례로 실시하여 총체적인 성능을 평가한다. 즉, VaR_α 의 경우 x_{t+1} 이 $\widehat{\text{VaR}}_\alpha^t$ 을 벗어나게 되는 비율을 계산하여 명목수준(nominal level) $1 - \alpha$ 에 얼마나 가까운가를 본다. ES_α 의 경우 관측값(x_{t+1})과 평

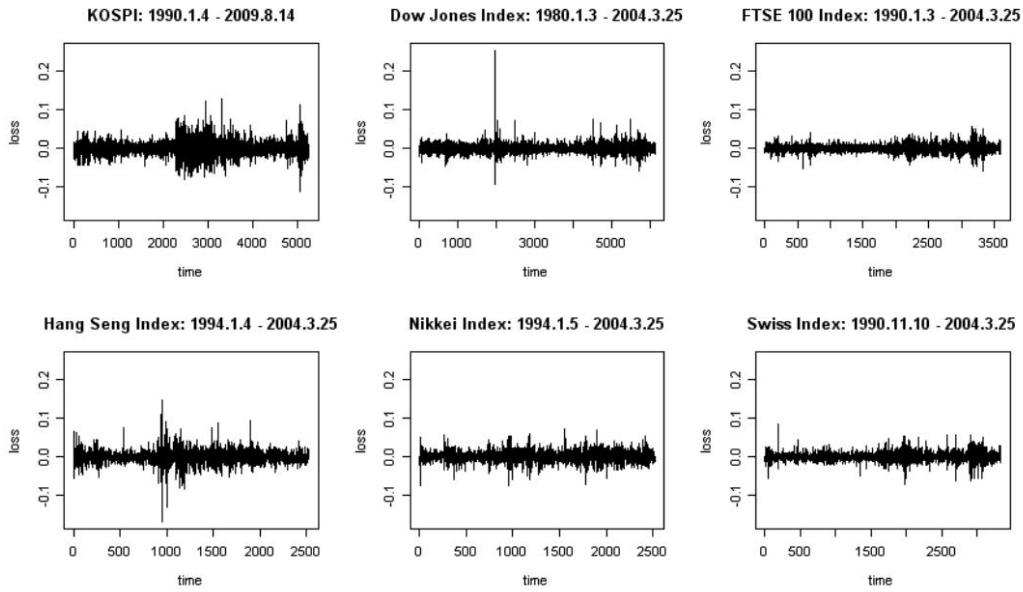


그림 3.1. 6개국 주식시장의 손실 자료

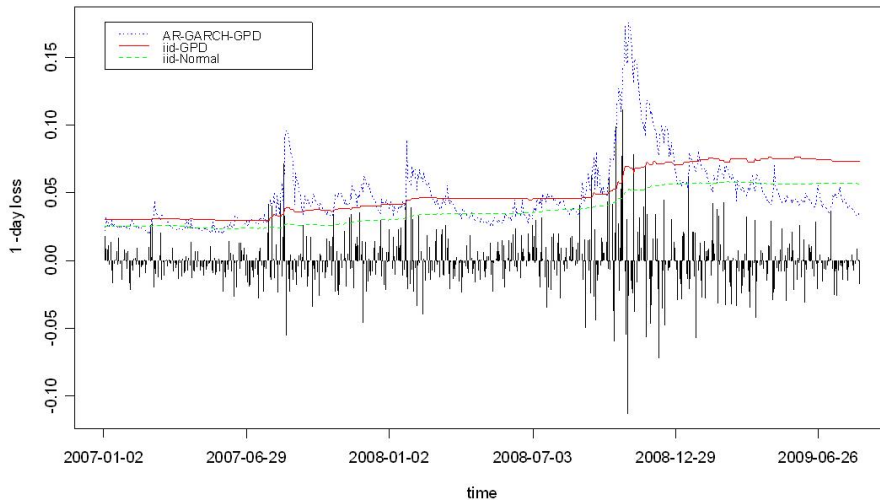


그림 3.2. KOSPI 자료로부터 구한 손실과 3가지 VaR 추정값: 주어진 기간에서 iid-GPD에 의한 추정값이 iid-Normal(분산-공분산) 추정값보다 크고, AR-GARCH-GPD 추정값은 손실의 변동성에 따라 크기가 많이 달라짐을 알 수 있다.

균의 추정값(\widehat{ES}_α^t)의 차가 작을수록 좋은 성능을 갖는다고 할 수 있으므로 다음 식과 같은 값을 계산하고 RMSD (Root Mean Squared Difference)라 부르기로 한다:

$$RMSD = \sqrt{\frac{\sum_{t \in \Gamma} (x_{t+1} - \widehat{ES}_\alpha^t)^2}{n_\Gamma}}$$

표 3.1. $\widehat{\text{VaR}}_\alpha$ 를 벗어나는 점의 수와 유의성

주식시장 자료의 크기(N)		KOSPI	Dow	FTSE	Swiss	HS	Nikkei
95%	Expected	248	291	165	152	111	111
	Historical Simulation	293**	317	186	171	103	121
	AR-GARCH-GPD	293**	334*	189	165	106	118
	AR-GARCH-Normal	262	265	178	161	92	111
	GARCH-GPD	278	323	195*	171	109	117
	GARCH-Normal	277	278	190*	176*	100	106
	iid-GPD	297**	319	192*	173	104	124
	iid-Normal	284*	267	179	169	85*	108
97.5%	Expected	124	145	82	76	56	55
	Historical Simulation	152*	163	107**	104**	61	66
	AR-GARCH-GPD	140	170*	94	91	51	63
	AR-GARCH-Normal	140	165	103*	98*	50	70
	GARCH-GPD	142	166	101*	92	52	64
	GARCH-Normal	146	180**	106**	111**	58	69
	iid-GPD	151*	153	107**	102**	54	67
	iid-Normal	162**	162	111**	115**	55	62
99%	Expected	50	58	33	30	22	22
	Historical Simulation	70**	79**	50**	44*	31	34*
	AR-GARCH-GPD	52	67	43	40	21	25
	AR-GARCH-Normal	67*	83**	49**	52**	32*	36**
	GARCH-GPD	54	64	44	39	20	25
	GARCH-Normal	65*	93**	54**	62**	32*	32*
	iid-GPD	65*	63	47*	41	22	30
	iid-Normal	95**	86**	67**	73**	36**	33*
99.5%	Expected	25	29	16	15	11	11
	Historical Simulation	46**	48**	34**	27**	19*	24**
	AR-GARCH-GPD	30	37	27*	18	12	15
	AR-GARCH-Normal	42**	60**	29**	34**	21**	25**
	GARCH-GPD	30	36	26*	17	9	14
	GARCH-Normal	39**	63**	36**	41**	23**	24**
	iid-GPD	36*	34	24	23	13	19*
	iid-Normal	65**	63**	46**	53**	25**	28**

위 식에서 $\Gamma = \{t|n \leq t \leq N - 1, x_{t+1} \geq \widehat{\text{VaR}}_\alpha^t\}$ 이고, n_Γ 는 집합 Γ 의 크기이다. 이 값은 작을수록 더 나은 성능을 가짐을 의미한다. ES_α 추정의 경우 $\widehat{\text{ES}}_\alpha^t$ 가 비편향 추정량이라면 $x_{t+1} - \widehat{\text{ES}}_\alpha^t$ 의 평균은 0이 되어야 할 것이다. 따라서 RMSD와 함께 비편향성에 대한 성능을 비교하기 위해 $x_{t+1} - \widehat{\text{ES}}_\alpha^t$ 의 평균이 0이라는 가설을 검정하여 유의성을 평가하였다.

추정방법별로 x_{t+1} 가 시점 $t + 1$ 에서의 VaR_α 의 추정값인 $\widehat{\text{VaR}}_\alpha^t$ 를 벗어나게 되는 점의 수를 세어 표 3.1에 나타내었다. 손실 자료의 크기를 N 이라고 할 때 후방검증을 총 $N - n$ 번 실행하게 되는데 $\widehat{\text{VaR}}_\alpha^t$ 를 벗어나게 되는 점의 수의 기댓값은 $(N - n)(1 - \alpha)$ 가 되며 이 값을 각 신뢰수준의 첫 번째 행(Expected 행)에 표시하였다. 추정값을 구하기 위한 자료의 크기 n 은 대략 1년 동안의 자료에 해당하는 300으로 정했다. 이 값이 너무 크면 시장의 변화를 제때 반영 못하게 되며, 반대로 너무 작으면 안정된 추정을 못하게 된다. 또한, $\widehat{\text{VaR}}_\alpha^t$ 를 벗어나는 점의 수가 지나치게 많거나 적은가를 판단하기 위해

유의성 검정을 실시하였다. $x_{t+1} - \widehat{\text{VaR}}_\alpha^t$ 가 iid임을 가정할 수 있다면

$$\# \left\{ t | x_{t+1} - \widehat{\text{VaR}}_\alpha^t > 0, t = n, n+1, \dots, N-1 \right\} = \sum_{t=n}^{N-1} I(x_{t+1} - \widehat{\text{VaR}}_\alpha^t > 0)$$

의 분포는 이항분포 $b(N-n, p)$ 를 따르게 된다 ($I(\cdot)$ 는 표시함수(indicator function)이다). 가설 $H_0 : p = 1 - \alpha$ 를 검정하여 그 유의성을 판단해서 표 3.1과 같이 표시하였다. 즉, 실제 신뢰수준(actual confidence level)이 명목 신뢰수준(nominal confidence level)을 만족하는가를 검정하였다. 검정 결과가 유의수준 0.05에서 유의하면 *로, 유의수준 0.01에서 유의하면 **로 표시하였다. 하지만 이 유의성 검정은 대략적인 검정임에 주의해야 한다. 설사 x_{t+1} 이 iid라 하더라도 $\widehat{\text{VaR}}_\alpha^t$ 가 독립이 아니므로 엄밀하게 이항분포를 따른다고 보기는 어렵기 때문이다. 표 3.1을 보면, 99% 이상의 높은 신뢰수준에서의 VaR 추정치의 경우 역사적 모의실험은 충분하지 않은 표본 크기 때문에 적합하지 않은 추정방법이라는 것을 알 수 있다. 또한 정규분포를 가정하는 방법(AR-GARCH-Normal, GARCH-Normal, iid-Normal)은 높은 신뢰수준에서 VaR를 유의하게 과소추정함을 보여준다. KOSPI 자료의 경우 두터운 꼬리는 고려하지만 이분산성을 고려하지 않는 방법인 iid-GPD도 과소추정하게 되는 경향이 있음을 알 수 있다. 따라서 두터운 꼬리와 함께 이분산성을 고려할 필요가 있다는 것을 알 수 있다. 이 사실은 두터운 꼬리와 이분산성을 동시에 고려하는 AR-GARCH-GPD 또는 GARCH-GPD의 성능으로 확인해 볼 수 있는데, 99% 이상의 신뢰수준의 VaR 추정에서 상대적으로 제일 안정된 시장인 영국을 제외하고는 이 두 방법에 의한 추정량의 실제 신뢰수준이 명목 신뢰수준과 유의하게 다르지 않아 더 나은 성능을 가진다고 볼 수 있다. 한편 95%와 같이 그리 높지 않은 신뢰수준에서의 VaR 추정의 경우에는 AR-GARCH-Normal이 iid-Normal이나 AR-GARCH-GPD보다 더 나은 성능을 보이는데, 이로부터 높지 않은 신뢰수준의 경우 이분산성은 여전히 고려할 필요가 있지만 두터운 꼬리는 별도로 고려할 필요 없이 정규분포를 가정해도 됨을 알 수 있다.

ES의 성능비교 결과를 표 3.2에 요약하였다. RMSD의 크기 기준으로 볼 때 다양한 신뢰수준과 시장에서 일관되게 나은 성능을 보이는 방법을 찾기 힘들지만 많은 경우 이분산성과 두터운 꼬리를 동시에 고려하는 AR-GARCH-GPD나 GARCH-GPD의 성능이 이분산성만 고려하는 GARCH-Normal의 성능보다 떨어진다. (RMSD의 성능을 종합적으로 보기 위해 각 신뢰수준과 주식시장에서 RMSD의 크기를 오름차순으로 정렬하여 각 추정방법의 순위를 구한 다음 모든 신뢰수준과 주식시장에서의 평균 순위를 구하였다. 7개 추정방법의 평균 순위는 5.44, 3.04, 3.33, 2.73, 2.06, 5.38, 6.02로서 GARCH-Normal의 성능이 제일 우수하고 GARCH-GPD와 AR-GARCH-GPD가 그 다음이었다.) 하지만 편향(bias)이라는 기준에서 보면 결과가 다르다. RMSD와 함께 $x_{t+1} - \widehat{\text{ES}}_\alpha^t$ 의 평균이 0이라는 가설을 검정하였는데, 추정량의 편향의 유의성을 평가하여 표시하였다. 이 결과를 보면 AR-GARCH-GPD나 GARCH-GPD의 편향은 유의하지 않은 반면 GARCH-Normal의 편향은 대부분 유의해, AR-GARCH-GPD나 GARCH-GPD의 성능이 더 우월하다. 두 가지 기준의 성능 결과가 다른 이유를 다음 식으로 설명해 볼 수 있다:

$$\begin{aligned} \text{RMSD}^2 &\approx E_\Gamma \left(x_{t+1} - \widehat{\text{ES}}_\alpha^t \right)^2 \\ &= V_\Gamma \left(x_{t+1} - \widehat{\text{ES}}_\alpha^t \right) + \left[E_\Gamma \left(x_{t+1} - \widehat{\text{ES}}_\alpha^t \right) \right]^2. \end{aligned}$$

위 식에서 E_Γ 와 V_Γ 는 $x_{t+1} > \widehat{\text{VaR}}_\alpha^t$ 라는 조건하에서 계산한 기댓값과 분산을 각각 의미한다. 첫 번째 식에서 등호가 아닌 이유는 $Y = x_{t+1} - \widehat{\text{ES}}_\alpha^t$ 라고 할 때 좌변 RMSD^2 는 Y^2 의 표본평균이지만 우변은 모평균이기 때문이고, 두 번째 식에서 두 개의 항으로 분리되는 이유는 $E(Y^2) = V(Y) + E^2(Y)$ 이기 때문이다. 위 식에서 알 수 있듯이 편향($E_\Gamma(x_{t+1} - \widehat{\text{ES}}_\alpha^t)$), 엄밀하게는 $E_\Gamma(x_{t+1} - \widehat{\text{ES}}_\alpha^t) = \text{ES}_\alpha^t -$

표 3.2. \widehat{ES}_α 의 성능(RMSD) 비교

주식시장 자료의 크기(N)		KOSPI	Dow	FTSE	Swiss	HS	Nikkei
95%	Historical Simulation	1.24	1.60	0.60	0.83	1.87	0.98
	AR-GARCH-GPD	1.07	1.39	0.50	0.65	1.27	0.88
	AR-GARCH-Normal	1.11**	1.59**	0.54**	0.69**	1.44**	0.89**
	GARCH-GPD	1.02	1.41	0.50	0.63	1.28	0.88
	GARCH-Normal	1.02**	1.56**	0.52**	0.66**	1.45**	0.87**
	iid-GPD	1.23	1.60	0.59	0.82	1.87	0.98
	iid-Normal	1.33**	1.73**	0.65**	0.92**	2.16**	1.01**
97.5%	Historical Simulation	1.36	2.12	0.55	0.83	2.09	1.04
	AR-GARCH-GPD	1.32	1.75	0.52	0.69	1.55	0.93
	AR-GARCH-Normal	1.28**	1.90**	0.53*	0.69**	1.61**	0.91*
	GARCH-GPD	1.23	1.77	0.51	0.66	1.53	0.94
	GARCH-Normal	1.14**	1.83**	0.52**	0.63**	1.57**	0.88*
	iid-GPD	1.33	2.16	0.55	0.81	2.13	1.05
	iid-Normal	1.46**	2.12**	0.63**	0.92**	2.45**	1.07**
99%	Historical Simulation	1.49	3.25	0.50	0.91	2.77	1.22
	AR-GARCH-GPD	1.60	2.44	0.51	0.79	1.84	0.97
	AR-GARCH-Normal	1.52**	2.51**	0.54**	0.73**	1.69**	0.97*
	GARCH-GPD	1.41	2.50	0.49	0.77	1.93	1.07
	GARCH-Normal	1.38*	2.38**	0.51**	0.63**	1.73**	1.00*
	iid-GPD	1.45	3.06	0.55	0.94	2.48	1.04
	iid-Normal	1.56**	2.77**	0.57**	0.91**	2.73**	1.12**
99.5%	Historical Simulation	1.46**	3.78	0.55	0.92	2.82	1.11
	AR-GARCH-GPD	1.70	3.19	0.42	0.96	1.92*	1.08
	AR-GARCH-Normal	1.68**	2.83**	0.53**	0.77**	1.82**	0.99*
	GARCH-GPD	1.61	3.11	0.43	0.95	2.45**	1.28
	GARCH-Normal	1.54*	2.77**	0.47**	0.66*	1.80**	1.00
	iid-GPD	1.45	4.19	0.67	1.32	2.31*	1.30
	iid-Normal	1.66**	3.15**	0.54**	0.91**	3.04**	1.01**

$E_\Gamma(\widehat{ES}_\alpha^t)$ 이므로 일반적인 정의의 편향과 반대 부호를 가짐)의 절대값의 크기가 작더라도 분산이 크면 RMSD가 더 커질 수 있다. 편향과 분산을 종합한 RMSD의 크기도 중요하지만 편향의 유의성 또한 무시할 수 없다. 표에 나타내지는 않았지만 두터운 꼬리를 고려하지 않는 AR-GARCH-Normal, GARCH-Normal, iid-Normal의 $E_\Gamma(x_{t+1} - \widehat{ES}_\alpha^t)$ 의 부호가 일관되게 양의 값을 갖는 것을 확인할 수 있었는데, 이는 정규분포를 가정하는 추정량에 과소추정이라는 편향의 문제가 있음을 의미한다.

4. 다시점 후의 추정

바젤위원회는 포트폴리오의 10일 후의 VaR를 계산할 것을 요구하고 있다. 일반적으로 h 시점 후의 추정방법은 h 시점 후의 손실인 $x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+h}$ 의 분포에 대한 가정에 따라 달라진다.

4.1. 위험측도의 추정방법

먼저 시계열 모형을 이용하는 방법에 대해 알아보자. AR(1)-GARCH(1,1) 모형 (3.5)와 (3.7)로부터

$F_{X_{t+1}|S_t}$ 에 대한 모형을 유도할 수 있었으나, 이로부터 h 시점 후 손실 분포인 $F_{X_{t+1}+X_{t+2}+\dots+X_{t+h}|S_t}$ 를 해석적으로(analytically) 유도하기는 어렵다. 그래서 MF는 시뮬레이션 기법을 제안하였다. 즉, 미래 손실 값 $x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+h}$ 을 충분히 많이 생성해 이 값들을 이용하여 $F_{X_{t+1}+X_{t+2}+\dots+X_{t+h}|S_t}$ 를 추정할 것을 제안하였다. 미래 손실 값을 생성하기 위해 MF는 먼저 시계열 모형 (3.5)에서 시점에 관계없이 같은 분포를 가지는 백색잡음을 생성하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 붓스트랩(bootstrap)과 GPD를 혼합한 것으로 다음과 같다:

1. n 개의 관측 잔차 $z_{t-n+1}, z_{t-n+2}, \dots, z_t$ 로부터 한 개의 값을 랜덤하게 추출한다;
2. 이 값이 임계값(예를 들어 잔차의 0.9 분위수) 보다 크면 이 값보다 큰 잔차의 값들에 GPD를 적용하여 새로운 잔차의 값을 정하고 (이 때 GPD는 임계값을 초과하는 값에 대한 조건부 분포(excess distribution)라는 점에 주의해야 한다)
3. 이 값이 음의 방향의 임계값(예를 들어 잔차의 0.1 분위수) 보다 작으면 이 값보다 작은 잔차의 값들에 GPD를 적용하여 새로운 잔차의 값을 정한다;
4. 2와 3의 조건이 만족되지 않는 경우에는 (즉, 잔차의 절대값이 크지 않을 때에는) 단계 1에서 추출한 값을 새로운 잔차의 값으로 정한다.

위 1~4단계에 의해 하나의 새로운 잔차가 결정되는데, 이 작업을 h 번 반복하여 미래의 잔차 $z_{t+1}, z_{t+2}, \dots, z_{t+h}$ 를 얻는다. 다음 단계로, 식 (3.8)을 적용하여 $\hat{\mu}_{t+1}$ 과 $\hat{\sigma}_{t+1}$ 을 구하고, 이 값들과 잔차 z_{t+1} 을 식 (3.5)에 적용하여 x_{t+1} 을 생성한다. 생성한 x_{t+1} 을 (3.8)에 다시 적용하여 $\hat{\mu}_{t+2}$ 와 $\hat{\sigma}_{t+2}$ 를 얻고 이미 생성한 잔차 z_{t+2} 를 식 (3.5)에 다시 적용하여 x_{t+2} 를 얻을 수 있다. (이 때 시계열 모형의 모수인 $\phi, \alpha_0, \alpha_1, \beta$ 의 추정값은 새로이 구하지 않는다.) 이와 같은 작업을 h 번 반복하여 생성한 $x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+h}$ 로부터 h 시점 후의 손실 값 $x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+h}$ 를 생성할 수 있는데, 이상의 전체 작업을 충분히 (예를 들어 1000번) 반복하여 $F_{X_{t+1}+X_{t+2}+\dots+X_{t+h}|S_t}$ 를 추정할 수 있다. 이 때 위험 추정의 정확도를 높이기 위해, 생성한 자료에 GPD 방법을 다시 한 번 적용할 것을 MF는 제안하였는데, 본 연구에서도 그렇게 하였다. 이 방법을 Simulated-AR-GARCH-GPD 방법이라 부르기로 한다.

MF는 미래 손실을 생성하는 단계에서 AR(1)-GARCH(1,1) 모형을 적용하였으나, 본 연구에서는 한 시점 이후의 추정 문제에서 밝힌 바와 같은 이유로 평균에 관한 모형은 고려하지 않고 이분산성만 고려하는 GARCH(1,1) 모형도 같이 적용하여 성능을 비교하여 보았는데, 이 방법을 Simulated-GARCH-GPD라고 부르기로 한다.

한편, MF는 Simulated-AR-GARCH-GPD 방법과 함께 \sqrt{h} 기법이라고 불리는 방법을 적용하여 비교하였다. 이 방법은 신뢰수준 α 에서 한 시점 후의 VaR와 ES 추정을 위한 식 (3.6)에서 표준편차 σ 대신 $\sqrt{h}\sigma$ 를 써서

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha &= \mu_{t+1} + \sqrt{h}\sigma_{t+1}\text{VaR}_\alpha^Z \\ \text{ES}_\alpha &= \mu_{t+1} + \sqrt{h}\sigma_{t+1}\text{ES}_\alpha^Z \end{aligned}$$

식에 의해 추정하는 방법으로서 미래 손실값을 생성할 필요가 없다. 만약 $x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+h}$ 가 iid라면 $x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+h}$ 의 표준편차가 x_{t+1} 의 표준편차의 \sqrt{h} 배가 되겠지만, 시계열 모형을 가정하고 있으므로 MF가 지적한 대로 이 방법의 이론적 타당성은 없다. 이 방법을 \sqrt{h} -AR-GARCH-GPD로 부르기로 한다.

이와 함께 (3.1), (3.2) 식에서 $\hat{\sigma}$ 대신에 $\sqrt{h}\hat{\sigma}$ 를 대입한 방법도 같이 고려하였는데, 이 방법을 \sqrt{h} -iid-Normal로 부르기로 한다.

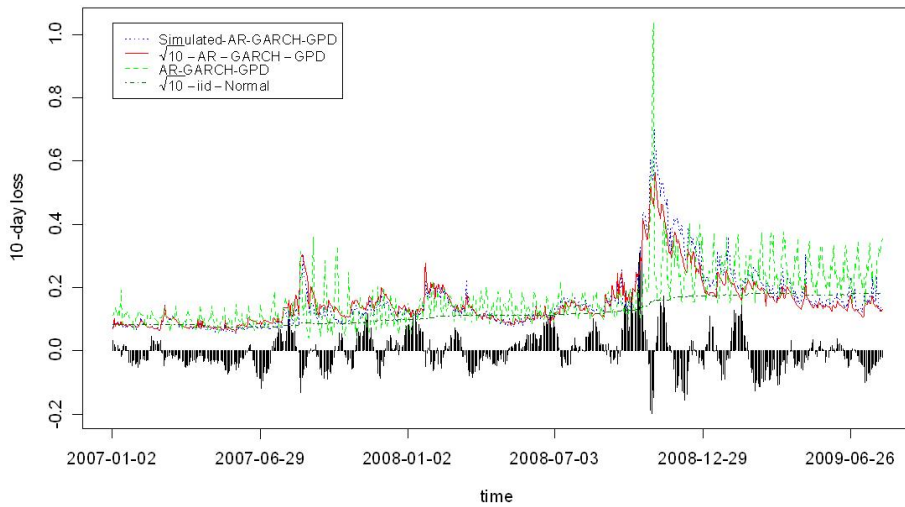


그림 4.1. 10일 후 손실과 99% 신뢰수준에서의 VaR 추정값: 이분산성과 두터운 꼬리를 고려하지 않는 $\sqrt{10}$ -iid-Normal은 추정값의 크기가 작고 변동도 적다. 10일 단위로 묶어 변환한 자료에 적용하는 AR-GARCH-GPD는 10일 단위의 주기성이라는 나쁜 특성을 보인다. Simulated-AR-GARCH-GPD는 $\sqrt{10}$ -AR-GARCH-GPD 보다 관측값의 변동에 더 민감하게 반응한다.

또한, 주어진 자료를 다음과 같이 다시점 자료로 변형하여 적용하는 방법도 고려하였다. 시점 t 에서 주어진 n 개의 자료 $x_{t-n+1}, x_{t-n+2}, \dots, x_t$ 를 h 개씩 묶어 $y_1, y_2, \dots, y_{n/h}$ 로 변형한다 (n 은 h 의 배수로 가정). 즉 $y_i = x_{t-n+(i-1)h+1} + \dots + x_{t-n+ih}$ 이다. 그러면 변형된 자료에서 한 시점 후의 자료는 $y_{(n/h)+1} = x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+h}$ 로서 원래 자료에서 h 시점 후의 손실이 된다. 따라서 변형된 자료 $y_1, y_2, \dots, y_{n/h}$ 에 대해 3절의 7가지 방법들을 적용해볼 수 있다. 이 방법들은 다시점 후의 추정 문제를 보다 단순한 한 시점 후의 추정 문제로 바꾸어 생각할 수 있다는 장점은 있으나 가용 자료의 수가 n 개에서 n/h 개로 줄어든다는 단점이 있다. 변환된 자료에 대해 앞 절의 7가지 방법을 모두 적용해 보았으나 이 중 AR-GARCH-GPD의 결과만 보고하기로 한다. 왜냐하면 변환된 자료에 적용하는 방법도 원래 자료에 적용하는 방법보다 성능이 좋지 않았기 때문이다.

4.2. 성능 비교 결과

앞 절에서 설명한 5가지 방법을 종합적으로 비교하기 전에 KOSPI 자료를 이용해서 그 특성을 먼저 살펴 보았다. 그림 4.1은 2007년 1월 2일부터 8월 3일까지 표현한 것이다. 가로축의 각 시점에서 세로축 값은 10일 후의 손실 $x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+10}$ 의 관측값과 $VaR_{0.99}$ 추정값을 나타낸다. 이웃하는 두 시점에서의 손실의 관측값은 겹치는 기간이 있으므로 그림 3.2와 달리 랜덤하지 않다. Simulated-GARCH-GPD에 의한 추정값은 Simulated-AR-GARCH-GPD와 비슷해서 그래프의 복잡함을 피하기 위해 생략하였다.

그림 4.1에서 $\sqrt{10}$ -iid-Normal은 이분산성과 두터운 꼬리를 고려하지 않으므로 다른 방법들에 비해 변동성이 낮고 작은 추정값을 보인다. 한편, 1일 단위에서 10일 단위로 변환한 자료에 적용하는 AR-GARCH-GPD는 다른 방법들에 비해 주기성을 보이는데, 그 이유는 10일을 주기로 추정에 쓰이는 자료가 거의 일치하기 때문이다. $n = 300$ 일 때 시점 t 에서 추정에 쓰이는 30개의 자료를 y_1, y_2, \dots, y_{30} 라고 하면 시점 $t + 10$ 에서 추정에 쓰이는 30개의 자료는 y_2, y_3, \dots, y_{30} 에 새로운 하나의 자료 $x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+10}$ 가 추가되므로 30개 중에서 29개의 자료가 일치하게 된다. 따라서 시점 t 에서의 추

표 4.1. $\widehat{\text{VaR}}_\alpha$ 를 벗어나는 점의 수

주식시장 자료의 크기(N)		KOSPI	Dow	FTSE	Swiss	HS	Nikkei
95%	Expected	248	290	164	151	111	111
	Simulated-AR-GARCH-GPD	260	311	168	188	115	91
	Simulated-GARCH-GPD	319	330	202	196	124	84
	\sqrt{h} -AR-GARCH-GPD	320	298	177	172	126	104
	AR-GARCH-GPD	363	415	240	255	140	141
	\sqrt{h} -iid-Normal	274	229	139	162	86	92
97.5%	Expected	124	145	82	76	55	55
	Simulated-AR-GARCH-GPD	121	181	84	107	59	42
	Simulated-GARCH-GPD	155	176	103	121	68	36
	\sqrt{h} -AR-GARCH-GPD	182	162	96	96	58	44
	AR-GARCH-GPD	196	222	137	129	70	74
	\sqrt{h} -iid-Normal	143	130	80	108	55	48
99%	Expected	50	58	33	30	22	22
	Simulated-AR-GARCH-GPD	47	78	35	50	34	22
	Simulated-GARCH-GPD	71	82	45	50	36	19
	\sqrt{h} -AR-GARCH-GPD	81	58	40	50	30	16
	AR-GARCH-GPD	96	94	55	63	29	31
	\sqrt{h} -iid-Normal	85	73	43	64	37	19
99.5%	Expected	25	29	16	15	11	11
	Simulated-AR-GARCH-GPD	27	52	22	30	25	14
	Simulated-GARCH-GPD	38	49	27	33	26	12
	\sqrt{h} -AR-GARCH-GPD	36	29	27	28	21	8
	AR-GARCH-GPD	61	57	36	36	20	19
	\sqrt{h} -iid-Normal	59	58	33	48	30	12

정값과 시점 $t + 10$ 에서의 추정값은 매우 비슷할 수밖에 없다. 이런 특성은 변환된 자료에 적용하는 7가지 방법 모두에 공통되는 좋지 않은 특성이다. $\sqrt{10}$ -iid-Normal와 AR-GARCH-GPD 두 방법에 비해 Simulated-AR-GARCH-GPD와 $\sqrt{10}$ -AR-GARCH-GPD 두 방법에 의한 추정값은 관측값이 변함에 따라 같이 변하는데 Simulated-AR-GARCH-GPD가 $\sqrt{10}$ -AR-GARCH-GPD보다 조금 더 민감하게 변하는 것을 그림 4.1에서 알 수 있다.

MF는 다시점 후의 추정 문제에서 Simulated-AR-GARCH-GPD와 \sqrt{h} -AR-GARCH-GPD 두 가지만 적용하여 비교 결과를 보고하였으나, 본 연구에서는 Simulated-GARCH-GPD, \sqrt{h} -iid-Normal, AR-GARCH-GPD를 포함시켜 총 다섯 가지의 비교 결과를 보고하고자 한다. 추정방법의 성능은 3.2절과 같은 방식으로 계산하였다. 즉, 각 주식시장에 대해 전체 자료의 수를 N 이라고 하면 $t = n, \dots, N - h$ 에서 h 시점 후의 VaR와 ES를 추정하여 실제 관측값 $x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+h}$ 와 비교하였다. VaR 추정의 성능 비교를 위해서 추정값을 벗어나는 점의 수를 세어 기대 빈도와 비교하고, ES 추정의 성능 비교를 위해 RMSD를 계산하였다. 하지만 3.2절과 달리 유의성에 대한 판단은 하지 않았다. 왜냐하면 MF가 주장한 것과 같이 연속하는 두 시점에서의 비교는 겹치는 구간의 관측값으로 인해 독립이 아니기 때문이다. 예를 들어 t 시점에서 h 시점 후의 손실 $x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_{t+h}$ 과 $(t + 1)$ 시점에서 h 시점 후의 손실 $x_{t+2} + x_{t+3} + \dots + x_{t+h+1}$ 은 $(h - 1)$ 개의 겹치는 관측값이 있어, 두 시점에서 VaR 추정값을 벗어나는가의 여부가 독립적인 베르누이 시행이 아니기 때문이다.

표 4.2. \widehat{ES}_α 의 성능(RMSD) 비교

주식시장 자료의 크기(N)		KOSPI	Dow	FTSE	Swiss	HS	Nikkei
95%	Simulated-AR-GARCH-GPD	2.64	4.46	1.77	2.60	5.78	2.42
	Simulated-GARCH-GPD	2.62	4.46	1.75	2.68	5.55	2.25
	\sqrt{h} -AR-GARCH-GPD	2.60	4.34	1.83	2.53	5.37	2.22
	AR-GARCH-GPD	4.31	4.33	2.41	3.75	7.58	2.90
	\sqrt{h} -iid-Normal	3.82	5.10	2.37	3.80	7.22	1.84
97.5%	Simulated-AR-GARCH-GPD	2.30	5.36	1.88	2.33	6.63	2.52
	Simulated-GARCH-GPD	2.29	5.57	1.81	2.23	6.34	2.16
	\sqrt{h} -AR-GARCH-GPD	2.26	5.37	1.91	2.59	6.55	2.53
	AR-GARCH-GPD	4.57	4.85	2.89	4.98	10.3	3.31
	\sqrt{h} -iid-Normal	4.36	6.33	2.51	4.04	8.27	1.79
99%	Simulated-AR-GARCH-GPD	1.77	7.40	1.81	2.22	6.99	2.52
	Simulated-GARCH-GPD	2.25	7.52	1.87	2.02	7.02	1.84
	\sqrt{h} -AR-GARCH-GPD	1.94	7.80	2.01	2.33	7.18	1.62
	AR-GARCH-GPD	5.47	5.91	5.12	5.97	10.10	3.40
	\sqrt{h} -iid-Normal	4.68	7.84	2.69	4.43	9.12	1.86
99.5%	Simulated-AR-GARCH-GPD	1.84	8.71	1.72	1.98	6.93	2.13
	Simulated-GARCH-GPD	2.54	9.26	1.86	1.96	6.93	2.17
	\sqrt{h} -AR-GARCH-GPD	1.69	10.3	1.98	2.45	7.12	1.31
	AR-GARCH-GPD	6.00	5.52	2.06	4.03	10.60	4.26
	\sqrt{h} -iid-Normal	4.89	8.37	2.58	4.53	9.50	1.84

본 연구에서는 $h = 10$, $n = 300$ 으로 정해 추정방법의 성능을 비교하였다. 먼저 표 4.1에 VaR 추정의 성능 비교 결과를 보고하였다. KOSPI 자료의 경우 모든 신뢰수준에서 Simulated-AR-GARCH-GPD의 값이 기대 도수에 가장 가까워 성능이 제일 우수함을 알 수 있으나 그 외 주식시장에서는 신뢰수준에 따라 결과가 달랐다. 전반적인 성능을 비교하기 위해 편향의 절대값의 크기를 오름차순으로 정렬했을 때의 순위를 6개의 주식시장과 4개의 신뢰수준에서 각각 구한 다음 평균을 구하였다. 그 결과인 평균 순위는 표에 있는 5개의 추정방법의 순서로 2.08, 3.21, 2.21, 4.52, 2.98로서 Simulated-AR-GARCH-GPD와 \sqrt{h} -AR-GARCH-GPD의 성능이 다른 방법들에 비해 우수하였다. Simulated-AR-GARCH-GPD의 성능이 Simulated-GARCH-GPD 보다 나은 성능을 갖는다는 사실은 다시점에서의 추정에서는 평균에 관한 모형을 고려해 줄 필요가 있음을 시사한다. 한편 한 시점에서의 추정에서 단순히 표준편차의 크기만 조정해주는 \sqrt{h} -AR-GARCH-GPD도 전반적으로 떨어지지 않는 성능을 보여주는데, 이 결과는 MF의 결과와 다르다. MF는 본 연구와 다른 주식시장과 환율, 금값 등의 자료에 대해 적용한 결과 \sqrt{h} -AR-GARCH-GPD가 Simulated-GARCH-GPD에 비해 과소추정하는 경향이 있어 \sqrt{h} 가 아닌 h^a , $a > 1/2$ 로 조정할 필요가 있음을 지적하였다.

변형된 자료 $y_1, y_2, \dots, y_{n/h}$ 에 적용하는 7가지 방법(AR-GARCH-GPD와 보고하지 않은 다른 6가지 방법)의 경우 $n = 300$ 이면 실제 추정에 쓰인 자료는 $n/h = 300/10 = 30$ 개 밖에 되지 않는다. 충분하지 못한 자료 크기 때문에 성능이 떨어지는지를 확인하기 위해 $n = 1000$ 과 3000 으로 실험해 보았으나 과소추정의 문제(VaR 추정값을 벗어나는 관측값이 과다하게 많은 문제)가 해소되지 않았다.

다음으로 표 4.2에서 ES 추정의 성능을 RMSD를 통해 비교하였다. Dow Jones 자료를 제외하면 원 자료에 대해 이분산성과 두터운 꼬리를 모두 고려하는 세 가지 방법, Simulated-AR-GARCH-GPD, Simulated-GARCH-GPD, \sqrt{h} -AR-GARCH-GPD의 성능이 나머지 두 방법보다 좋았다 (Dow Jones

자료에는 그림 3.1에서 알 수 있듯이 25.6%라는 극단적으로 큰 값이 하나 있는데, 이 값을 제외하고 분석하면 다른 자료에서와 같은 결과를 보인다.). 제일 나은 성능을 보이는 방법은 자료의 종류와 신뢰수준에 따라 다른데, 5가지 방법의 평균 순위는 2.33, 2.25, 2.42, 4.21, 3.79로서, VaR 추정과 달리 Simulated-GARCH-GPD의 성능이 나쁘지 않았다. 5가지 방법 중에서 AR-GARCH-GPD의 성능이 제일 떨어진다. 그 이유는 그림 4.1에서 설명한 대로 변형된 자료 $y_1, y_2, \dots, y_{n/h}$ 에 적용하는 방법에는 주기성이라는 좋지 않은 특성이 있는데, 이 특성 때문인 것으로 판단된다. 그리고, 표로 제시하지 않았지만 ES 추정값의 평균과 표준편차도 구해 보았는데, 전체 5가지 방법 중에서는 \sqrt{h} -iid-Normal의 평균과 표준편차가 제일 작았으며, 성능이 비슷한 세 방법, Simulated-AR-GARCH-GPD, Simulated-GARCH-GPD, \sqrt{h} -AR-GARCH-GPD 중에서는 \sqrt{h} -AR-GARCH-GPD의 평균과 표준편차가 대체로 작았다.

5. 요약과 결론

금융 시계열 중에서 주식 수익률 자료에 대해 VaR와 ES라는 두 위험측도의 추정방법을 비교해 보았다. 한 시점 후의 추정과 다시점 후의 추정은 자료에 대한 모형이 다르고 그에 따라 추정방법도 다르기 때문에 각각의 경우로 나누어 비교해 보았다. 역사적 모의실험과 분산-공분산 방법 등의 전통적 방법과 함께 이분산성과 두터운 꼬리를 동시에 고려하는 방법 등의 성능을 비교해 보았다. 2008년 말 미국발 금융위기를 포함한 약 20년 동안의 KOSPI 자료와 외국 5개국 주식시장의 자료를 이용하였고, 기존 연구의 방법 외에 추가적으로 몇 가지 방법을 고려하였다.

우선 주식시장별로 추정방법의 성능 결과가 달라진다는 점을 지적해야 할 것 같다. 변동성이 큰 주식시장과 안정된 주식시장이 있고 그 특성에 따라 추정방법의 성능이 달라진다 (Seymour과 Polakow, 2003). 따라서 우리나라 주식수익률에 적절한 방법이 무엇인가에 관한 연구가 필요하다. 또한 신뢰수준의 크기에 따라 성능이 달라진다. 예를 들어 99.5%와 같이 높은 신뢰수준에서는 자료의 크기 문제로 역사적 모의실험과 같은 방법은 적용하기 힘들며, 두터운 꼬리의 효과는 95%와 같은 낮은 신뢰수준에서 문제가 되지 않을 수도 있다.

일정 기간 동안의 6개국의 주식 수익률이라는 제한된 자료를 이용한 실험이긴 하지만, 실험을 통해 발견한 사실들을 요약하면 다음과 같다:

- 1일 후 추정의 경우 이분산성과 두터운 꼬리는 모두 고려해야 한다. 표 3.1과 3.2에서 공통적으로 이 두 가지를 모두 고려하는 시계열 모형인 AR-GARCH-GPD나 GARCH-GPD의 성능이 두터운 꼬리만 고려하는 iid-GPD나 이분산성만 고려하는 AR-GARCH-Normal보다 6개 주식시장 모두에서 나은 성능을 보였다.
- 10일 후 추정의 문제에서는 10일 단위로 자료를 변환하여 추정하는 방법은 변환된 자료의 주기성 때문에 성능이 좋지 않다. 변환된 자료에 대해 AR-GARCH-GPD 모형을 적용시키더라도 주기성 때문에 좋지 않은 성능을 보인다. 10일 후 추정을 위한 방법 중에 Simulated-AR-GARCH-GPD, Simulated-GARCH-GPD, \sqrt{h} -AR-GARCH-GPD의 성능이 우수하였는데, 이 방법들은 모두 기본적으로 이분산성과 두터운 꼬리를 동시에 고려하는 모형이며, 1일이 아닌 10일 후의 추정으로 인해 높아진 불확실성을 반영하는 방법에 차이가 있을 뿐이다.
- 시계열 모형에서 분산이 아닌 평균에 관한 모형이 필요한가에 관심을 두어 1일 후 추정에서 AR-GARCH-GPD와 함께 GARCH-GPD를, 10일 후 추정에서는 Simulated-AR-GARCH-GPD와 함께 Simulated-GARCH-GPD를 적용해 비교해 보았다. 1일 후 추정에서는 두 방법 사이에 차이가 없거나 오히려 평균을 고려하지 않는 방법의 성능이 나왔으며, 10일 후 추정에서는 VaR 추정과 ES 추

정의 결과가 달랐다. 표 4.1의 VaR 추정에서는 평균에 관한 모형을 고려해 주는 것이, 표 4.2의 ES 추정에서는 오히려 고려해 주지 않는 방법의 성능이 평균 순위의 기준에서 조금 더 나았다. 하지만 KOSPI 자료에서는 VaR 추정과 ES 추정 모두에서 평균에 관한 모형을 고려해주는 Simulated-AR-GARCH-GPD의 성능이 더 나았다.

- KOSPI 자료에 대한 1일 후 VaR 추정의 경우, 정도의 차이는 있지만 모든 추정방법의 관측 빈도가 기대 빈도보다 커서 VaR에 대한 과소추정의 문제가 있음을 알 수 있다. 이분산성과 두터운 꼬리를 동시에 고려하는 AR-GARCH-GPD나 GARCH-GPD의 경우 이 편향의 크기가 유의하지는 않았지만 모든 신뢰수준과 추정방법에서 예외 없이 관측빈도가 기대빈도보다 크다는 점은 더 나은 추정방법이 있을 수 있음을 시사한다.

참고문헌

- 문성주, 양성국 (2006). 이분산성 및 두꺼운 꼬리분포를 가진 금융시계열의 위험추정: VaR와 ES를 중심으로, <재무관리연구>, **23**, 189-208.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. and Heath, D. (1999). Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, **9**, 203-228.
- Balkema, A. A. and de Haan, L. (1974). Residual lifetime at great age, *Annals of Probability*, **2**, 792-804.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock market prices, *Journal of Business*, **38**, 34-105.
- Frey, R. and McNeil, A. (2002). VaR and expected shortfall in portfolios of dependent credit risks: Conceptual and practical insights, *Journal of Banking and Finance*, **26**, 1317-1334.
- Gencay, R., Selcuk, F. and Ulugülyagci (2003). High volatility, thick tails and extreme value theory in VaR estimation, *Insurance: Mathematics and Economics*, **33**, 337-356.
- McNeil, A. and Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach, *Journal of Empirical Finance*, **7**, 271-300.
- McNeil, A., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press.
- McNeil, A. and Saladin, T. (1997). The peaks over thresholds method for estimating high quantiles of loss distributions, *Proceedings of 28th International ASTIN Colloquium*.
- McNeil, A. for S-Plus original; R port by Scott Ulman (2007). QRMLib: Provides R-language code to examine Quantitative Risk Management concepts. R package version 1.4.2. <http://www.ma.hw.ac.uk/mcneil/book/index.html>.
- Pickands, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics, *Annals of Statistics*, **3**, 119-131.
- R Development Core Team (2008). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org>.
- Rootzen, H. and Tajvidi, N. (1996). Extreme value statistics and wind storm losses: A case study, *Scandinavian Actuarial Journal*, 70-94.
- Seymour, A. and Polakow, D. (2003). A coupling of extreme-value theory and volatility updating with value-at-risk estimation in emerging markets: A South African test, *Multinational Finance Journal*, **7**, 3-23.

Estimation of VaR and Expected Shortfall for Stock Returns

Ji-Hyun Kim¹ · Hwa-Young Park²

¹Department of Statistics and Actuarial Science, Soongsil University

²Department of Statistics and Actuarial Science, Soongsil University

(Received May 2010; accepted June 2010)

Abstract

Various estimators of two risk measures of a specific financial portfolio, Value-at-Risk and Expected Shortfall, are compared for each case of 1-day and 10-day horizons. We use the Korea Composite Stock Price Index data of 20-year period including the year 2008 of the global financial crisis. Indexes of five foreign stock markets are also used for the empirical comparison study. The estimator considering both the heavy tail of loss distribution and the conditional heteroscedasticity of time series is of main concern, while other standard and new estimators are considered too. We investigate which estimator is best for the Korean stock market and which one shows the best overall performance.

Keywords: Value-at-Risk, heavy-tailed distribution, generalized Pareto distribution, conditional heteroscedasticity.

¹Corresponding author: Professor, Department of Statistics and Actuarial Science, Soongsil University, Sangdo-dong 511, Dongjak-ku, Seoul 156-743, Korea. E-mail: jxk61@ssu.ac.kr