

균열을 가진 압전재료에 대한 면외 변형에서의 가중함수이론

손인호* · 안득만*

*부산대학교 기계설계공학과

Weight Function Theory for Piezoelectric Materials with Crack in Anti-Plane Deformation

In-Ho Son* and Deuk-Man An*

*Department of Mechanical Design Engineering, Pusan National Univ.

KEY WORDS: Piezoelectric 압전, Complex potential function 복소 포텐셜 함수, Weight function 가중함수, Stress intensity factor 응력 확대계수, Electric displacement intensity factor 전기변위확대계수

ABSTRACT: In this paper, an electroelastic analysis is performed on a piezoelectric material with an open crack in anti-plane deformation. Bueckner's weight function theory is extended to piezoelectric materials in anti-plane deformation. The stress intensity factors and electric displacement intensity factor are calculated by the weight function theory.

1. 서 론

압전재료는 외부에서 기계적인 힘을 가해주면 재료 내부에 전기적인 분극현상이 발생하고 반대로 외부에서 전기장을 작용시키면 재료가 변형을 일으키는 전기-기계적인 커플링(Electro-mechanical coupling) 특성으로 인해 감지기(Sensor), 변환기(Transducer), 작동기(Actuator) 등 첨단산업분야 및 마이크로 전자기계시스템(MEMS) 에도 널리 사용되고 있다.

압전재료의 사용이 늘어나면서 재료 내부의 결함이 압전재료를 이용한 기기들의 성능에 많은 영향을 미친다는 것을 인식하게 되었고 압전재료의 파괴역학에 대한 이론적인 연구는 많은 연구자들(Parton and Kudryavtsev, 1988; Pak, 1990; Sosa, 1991; Suo et al., 1992; McMeeking and Ricoeur, 2003)에 의해 활기를 띠며 이루어 지고 있다.

본 연구에서는 가중함수이론을 이용하여 면외변형(Anti-plane deformation)에서 균열을 가진 압전재료의 응력확대계수와 전기변위확대계수를 구하는 방법을 제시하고 이를 이용하여 일례로서 SEN시편에서 전기적 하중이 작용하는 경우에 전기변위확대계수와 변형률확대계수를 구하고자 한다.

2. 균열을 가진 압전재료

2.1 압전재료의 지배방정식

압전현상의 전기-기계적 커플링 특성을 표현하기 위해서는 기계적 특성을 나타내는 응력과 변형률 그리고 전기적 특성을

나타내는 전기장, 전기 변위 이렇게 네 개의 변수가 필요하다. 여기에서 변형률과 전기장을 독립변수로 생각하면 구성식은 다음과 같다(Parton and Kudryavtsev, 1988; Chen et al., 2004).

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl} - e_{kij}E_k \tag{1a}$$

$$D_i = e_{kik}\epsilon_{kl} + \epsilon_{ik}E_k \tag{1b}$$

σ_{ij} 는 응력, ϵ_{ij} 는 변형률, D_i 는 전기변위 그리고 E_i 는 전기장을 나타낸다. c_{ijkl} 는 탄성상수, e_{ijk} 는 압전상수, ϵ_{ij} 는 유전체상수를 나타내며 식 (2)를 만족한다(Suo et al., 1992).

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{klij}, e_{kij} = e_{kji}, \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \tag{2}$$

변형률과 전기장은 식 (3a)와 식 (3b)를 각각 만족한다. u 는 변위, ϕ 는 전기포텐셜을 나타낸다(Sosa, 1991).

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3a}$$

$$E_k = -\phi_{,k} \tag{3b}$$

압전재료는 평행방정식과 가우스의 법칙(Gauss's law of Electrostatics)을 만족해야 한다. 체적력과 자유전하(Free charge)가 없을 때의 평행방정식과 가우스의 법칙은 다음과 같이 주어진다(Zhang and Hack, 1992).

$$\sigma_{j,i} = 0 \tag{4a}$$

$$D_{i,i} = 0 \tag{4b}$$

2.2 면외변형에서의 압전재료

육방결정구조(Transversely isotropic medium-hexagonal crystal class 6mm)를 가진 압전재료에 대해서 식 (1)을 행렬형태로 표현하면 다음과 같다(McMeeking and Ricoeur, 2003).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (5b)$$

면외변형(Anti-plane deformation)에서의 변위조건과 전기장은 다음과 같이 주어진다.

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = u_z(x, y) \quad (6a)$$

$$E_x = E_x(x, y), \quad E_y = E_y(x, y), \quad E_z = 0 \quad (6b)$$

이 경우에 구성식 (1)은 다음과 같이 나타내어진다.

$$\sigma_{zx} = c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7a)$$

$$\sigma_{zy} = c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$D_x = e_{15} \frac{\partial u_z}{\partial x} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7b)$$

$$D_y = e_{15} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

지배방정식 (4)는 다음과 같이 구체적으로 나타내어진다.

$$c_{44} \nabla^2 u_z + e_{15} \nabla^2 \phi = 0 \quad (8a)$$

$$e_{15} \nabla^2 u_z - \varepsilon_{11} \nabla^2 \phi = 0 \quad (8b)$$

u_z, ϕ 는 라플라스미분방정식을 만족하는 조화함수(Harmonic function)임으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_z = \text{Im}U(z), \quad \phi = \text{Im}\Phi(z) \quad (9)$$

$\Psi(z), \Omega(z)$ 를 다음과 같이 정의하고

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= c_{44}U(z) + e_{15}\Phi(z) \\ \Omega(z) &= e_{15}U(z) - \varepsilon_{11}\Phi(z) \end{aligned} \quad (10)$$

식 (9)를 식 (7)에 대입하면 응력과 전기변위는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= \text{Im}[c_{44}U'(z) + e_{15}\Phi'(z)] = \text{Im}\Psi'(z) \\ \sigma_{zy} &= \text{Re}[c_{44}U'(z) + e_{15}\Phi'(z)] = \text{Re}\Psi'(z) \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} D_x &= \text{Im}[e_{15}U'(z) - \varepsilon_{11}\Phi'(z)] = \text{Im}\Omega'(z) \\ D_y &= \text{Re}[e_{15}U'(z) - \varepsilon_{11}\Phi'(z)] = \text{Re}\Omega'(z) \end{aligned} \quad (11b)$$

2.3 모드 III 상태의 균열을 가진 압전재료

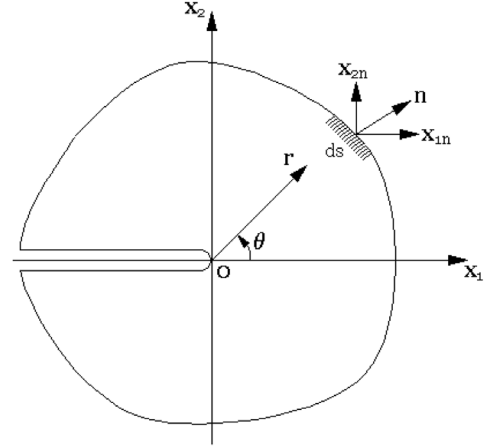


Fig. 1 Infinite piezoelectric medium with an open crack

Fig 1과 같이 균열이 존재하는 무한체의 압전재료가 경계를 따라 전단력(모드 III 상태)과 전기변위가 경계를 따라서 분포하고 균열면에서는 표면력과 표면전하가 없다고 가정하면 균열면에서의 경계조건은 다음과 같다(Pak, 1990).

$$T = 0, \quad D \cdot n = 0 \quad (12)$$

균열선단에서 $U(z), \Phi(z)$ 는 일반적으로 다음과 같이 주어진다 (Gao et al., 1997).

$$U(z) = a_r \sqrt{z}, \quad \Phi(z) = b_r \sqrt{z}, \quad z = re^{i\theta} \quad (13)$$

응력확대계수(K_T)와 전기변위확대계수(K_D)를 다음과 같이 정의하고

$$\begin{aligned} K_T &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (c_{44}a_r + e_{15}b_r) \\ K_D &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (e_{15}a_r - \varepsilon_{11}b_r) \end{aligned} \quad (14)$$

식 (13)을 식 (11)에 대입하여 정리하면 응력과 전기변위가 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= -\frac{c_{44}a_r + e_{15}b_r}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{K_T}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sigma_{zy} &= \frac{c_{44}a_r + e_{15}b_r}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{K_T}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ D_x &= -\frac{e_{15}a_r - \varepsilon_{11}b_r}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} = -\frac{K_D}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ D_y &= \frac{e_{15}a_r - \varepsilon_{11}b_r}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{K_D}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (15)$$

식 (5)와 식 (15)를 이용하면 변형률과 전기장은 다음과 같이

구해진다.

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= -\frac{K_S}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ \gamma_{zy} &= \frac{K_S}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \\ E_x &= -\frac{K_E}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\ E_y &= \frac{K_E}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (16)$$

변형률확대계수(K_S)와 전기장확대계수(K_E)는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{aligned} K_S &= \frac{\epsilon_{11}K_T + e_{15}K_D}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \\ K_E &= \frac{\epsilon_{11}K_D - e_{15}K_T}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \end{aligned} \quad (17)$$

3. 가중함수이론

단위길이(ds)에 작용하는 표면력과 표면전하는 다음과 같다 (An and Son, 2007).

$$\begin{aligned} Tds &= \sigma_{zx}dy - \sigma_{zy}dx = -\text{Red}\Psi(z) \\ D_n ds &= D_x dy - D_y dx = -\text{Red}\Omega(z) \end{aligned} \quad (18)$$

$U(z)$, $\Phi(z)$ 가 식 (13)과 같이 주어지는 장(Field)을 정상장 (Regular field)이라고 하고 다음과 같이 주어진 $U(z)^f$ 와 $\Phi(z)^f$ 를 이용해 표면력과 표면전하를 계산 한 후 방향이 반대인 표면력과 표면전하를 합해주게 되면 경계에서의 표면력과 표면전하가 없어지게 되는데 이러한 장을 기초장(Fundamental field)이라고 하고 기초장에서의 변위와 전기포텐셜을 가중함수라고 한다 (An and Son, 2007; An, 1987).

$$U(z)^f = \frac{a_f}{\sqrt{z}}, \quad \Phi(z)^f = \frac{b_f}{\sqrt{z}} \quad (19)$$

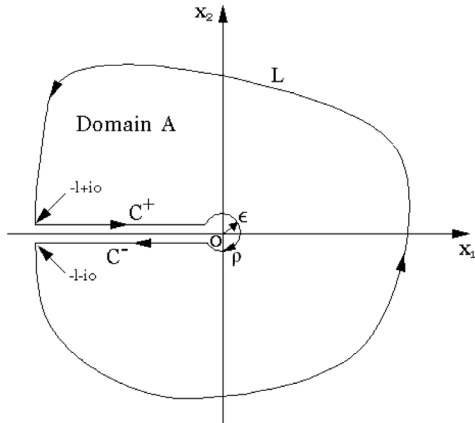


Fig. 2 Simply connected region which deleted the crack tip

Betti의 상반정리를 체적력과 자유전하가 존재하지 않는 정상장과 기초장에 적용하기 위해 Fig. 2와 같은 균열선단을 제거한 영역 A에 대해서 Betti의 상반정리를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int_{L+\rho} T^r u^f ds + \int_{L+\rho} D_n^r \phi^f ds \\ = \int_{L+\rho} T^f u^r ds + \int_{L+\rho} D_n^f \phi^r ds \end{aligned} \quad (20)$$

식 (20)에 기초장의 특성을 적용하게 되면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \int_L (T^r u^f + D_n^r \phi^f) ds = \int_{-\rho} (T^r u^f - T^f u^r) ds \\ + \int_{-\rho} (D_n^r \phi^f - D_n^f \phi^r) ds \end{aligned} \quad (21)$$

K 와 M 을 다음과 같이 정의하고

$$\begin{aligned} K &= \int_L (T^r u^f + D_n^r \phi^f) ds \\ M &= c_{44}a_r a_f + e_{15}a_r b_f + e_{15}a_f b_r - \epsilon_{11}b_r b_f \end{aligned} \quad (22)$$

식 (10), (13), (18), (19)를 식 (21)에 대입하여 정리하면 K 는 다음과 같이 나타내어진다.

$$K = M \int_{-\rho} \left(\text{Im} \sqrt{z} d\text{Re} \frac{1}{\sqrt{z}} - \text{Im} \frac{1}{\sqrt{z}} d\text{Re} \sqrt{z} \right) \quad (23)$$

부분부적법을 이용하여 식 (23)를 풀면 다음과 같다.

$$K = -\pi M \quad (24)$$

식 (14), (22), (24)를 이용하면 응력확대계수와 전기변위확대계수를 구할 수 있다. 다음과 같은 특별한 두가지 경우를 생각 하고, K_T , K_D 를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{case 1. } a_f &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad b_f = 0 \\ K_T &= \frac{1}{\pi} K \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \text{case 2. } a_f &= 0, \quad b_f = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ K_D &= \frac{1}{\pi} K \end{aligned} \quad (25b)$$

4. 수치예제

Fig. 3과 같은 SEN(Single edge notch)시편에 전기적 하중(표면전하)이 작용하는 상태에서의 전기변위확대계수를 가중함수이론을 이용하여 구하고자 한다. 먼저 가중함수를 구하기 위하여 식 (19)와 식 (25b)를 이용하여 $\Phi(z)^f$ 를 구하고 구한 $\Phi(z)^f$ 를 이용하여 전기포텐셜과 전기변위를 해석적으로 구한 후 계산되어진 전기변위와 방향이 반대인 전기변위를 경계를 따라 작용시키게 되면 경계에는 표면전하가 존재하지 않는 기초장을 얻을 수 있다. 또한 반대 방향의 전기변위를 작용시킬 때 얻어진 전기포텐셜과 $\Phi(z)^f$ 를 이용해 구한 전기포텐셜을 합해주게 되면

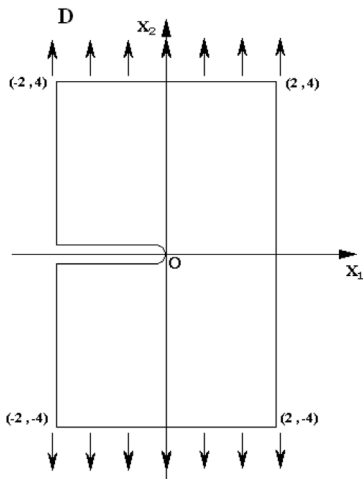


Fig. 3 Specimen under electric load

가중함수 ϕ 를 구할 수 있다. 식 (19)를 사용하여 Fig. 3의 SEN 시편의 경계에서의 전기변위를 계산한 다음 시편 내부에서의 전기 포텐셜의 지배방정식 (8b)를 만족하는 전기포텐셜을 유한 요소법으로 구하였다. 유한요소해석에는 ANSYS 11을 이용하였으며 시편이 x_1 축에 대하여 대칭이므로 x_1 축 윗부분을 절점 (Node) 389개와 요소(Element) 122개로 모델링하였다.

해석에 사용된 압전재료는 PZT-5H이고 물성치는 Table 1과 같다.

Table 1 Material properties of PZT-5H (Pak, 1990; Li and Weng, 2002)

PZT-5H	
c_{44}	$3.53 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
e_{15}	17.0 C/m^2
ϵ_{11}	$151 \times 10^{-10} \text{ C/Vm}$

경계에서의 각 절점의 가중함수 ϕ 는 Table 2와 같이 주어진다.

Table 2 Weight function

x_1	x_2	ϕ	x_1	x_2	ϕ
2	0	0	-0.5	4	0.54737
2	0.5	0.0878	-1	4	0.54652
2	1	0.6235	-1.5	4	0.54017
2	1.5	0.11466	-2	4	0.53405
2	2	0.1748	-2	3.5	0.4426
2	2.5	0.24229	-2	3	0.36824
2	3	0.3175	-2	2.5	0.30359
2	3.5	0.40185	-2	2	0.24873
2	4	0.50396	-2	1.5	0.20566
1.5	4	0.51272	-2	1	0.17464
1	4	0.52663	-2	0.5	0.15666
0.5	4	0.53718	-2	0	0.15155
0	4	0.54354			

가중함수이론을 이용하여 시편의 경계에 Griffith 균열을 가진 무한체의 무한대에서 전기적인 하중이 작용하는 상태와 같게 되는 전기변위가 작용할 때 전기변위확대계수를 구하고자 한다.

Griffith 균열을 가진 무한체에서 전기적인 하중 D 가 무한대에서 작용할 때 $U(z)$, $\Phi(z)$ 는 다음과 같다(Pak, 1990).

$$U(z) = \frac{e_{15}D}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \sqrt{z^2 - a^2}$$

$$\Phi(z) = -\frac{c_{44}D}{c_{44}\epsilon_{11} + e_{15}^2} \sqrt{z^2 - a^2} \tag{26}$$

$z = \pm a$ 에서의 전기변위확대계수 K_D 는 다음과 같이 주어진다.

$$K_D = \sqrt{\pi a} D \tag{27}$$

전기적 하중을 변화시켜가면서 가중함수이론과 식 (27)을 이용하여 전기변위확대계수 K_D 를 각각 구하면 Fig. 4와 같이 나타내어진다.

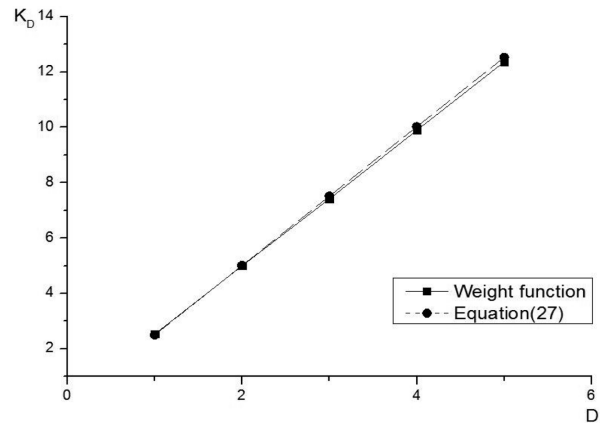


Fig. 4 Electric displacement intensity factor

구한 전기변위확대계수와 식 (17)을 이용해 변형률확대계수 K_S 를 구하면 Fig. 5와 같이 나타내어진다.

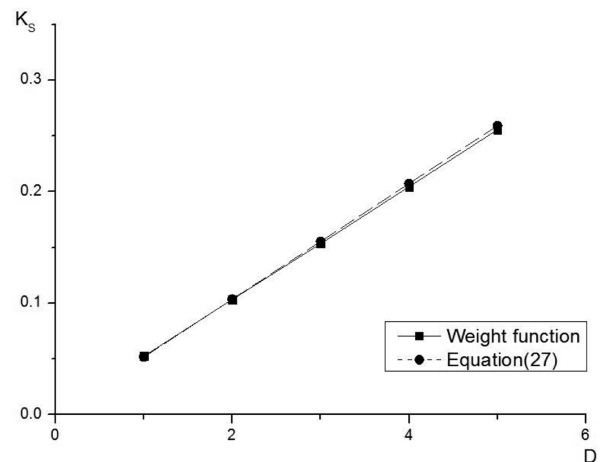


Fig. 5 Strain intensity factor

Fig. 4와 Fig. 5에서 보는 것과 같이 전기적 하중이 적용하는 상태에서의 전기변위확대계수와 변형률 확대계수를 가중함수이론과 이론식 (27)을 이용해서 구한 각각의 결과는 약 1.2~1.3%의 차이가 나타나는데 이는 가중함수이론을 이용할 때 수치해석적인 방법을 사용하였기 때문이라 생각된다.

5. 결 론

면외(Anti-plane)변형에서 균열을 가진 압전재료에 대해 응력, 변형률, 전기변위와 전기장을 구하였고 가중함수이론을 이용하여 응력확대계수와 전기변위확대계수를 구하는 방법을 유도하였고, 가중함수이론을 이용한 예로 SEN 시편의 경계에 Griffith 균열과 같은 전기변위 상태를 주는 전기적인 하중이 작용하는 경우에 대한 전기변위확대계수와 변형률 확대 계수를 구하였다.

가중함수는 기계-전기적 하중이 작용하지 않는 경우에서의 변위와 전기포텐셜이므로 이를 구하면 주어진 기하학적 형상에서의 모든 하중에 대한 응력확대계수와 전기변위확대계수를 균열선단부근에 대한 특별한 해석 없이도 구할 수 있다.

후 기

이 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

An, D. (1987). "Weight Function Theory for a Rectilinear Anisotropic Body", *Int. J. of Fracture*, Vol 34, pp 85-109.
 An, D. and Son, I. (2007). "Weight Functions for Notched Structures with Anti-Plane Deformation", *Int. J. of Precision Engineering and Manufacturing*, Vol 8, pp 60-63.

Chen, B.J., Liew, K.M. and Xiao, Z.M. (2004). "Green's Functions for Anti-Plane Problems in Piezoelectric Media with a Finite Crack", *Int. J. of Solids and Structures*, Vol 41, pp 5285-5300.
 Gao, H., Zhang, T. and Tong, P. (1997). "Local and Global Energy Release Rates for an Electrically Yielded Crack in a Piezoelectric Ceramic", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol 45, pp 491-510.
 Li, C. and Weng, G.J. (2002). "Antiplane Crack Problem in Functionally Graded Piezoelectric Materials", *J. of Applied Mechanics*, Vol 69, pp 481-488.
 McMeeking, R. and Ricoeur, A. (2003). "The Weight Function for Cracks in Piezoelectrics", *Int. J. of Solids and Structures*, Vol 40, pp 6143-6162.
 Pak, Y. (1990). "Crack Extension Force in a Piezoelectric Material", *J. of Applied Mechanics*, Vol 57, pp 647-653.
 Parton, V.Z. and Kudryavtsev, B.A. (1988). *Electromagneto-elasticity Piezoelectrics and Electrically Conductive Solids*, Gordon and Breach Science Publishers.
 Sosa, H. (1991). "Plane Problems in Piezoelectric Media with Defects", *Int. J. of Solids and Structures*, Vol 28, pp 491-505.
 Suo, Z., Kuo, C.M., Barnett, D.M. and Willis, J.R. (1992). "Fracture Mechanics for Piezoelectric Ceramics", *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol 40, pp 736-765.
 Zhang, T. and Hack, J.E. (1992). "Mode-III Cracks in Piezoelectric Materials", *J. Appl. Phys.*, Vol 71, pp 5865-5870.

2009년 12월 9일 원고 접수

2010년 5월 4일 심사 완료

2010년 6월 18일 게재 확정