

접선 강성방정식과 비선형 강성방정식을 이용한 비선형 해의 정확성 비교에 관한 연구

A study on the Accurate Comparison of Nonlinear Solution Which Used
Tangent Stiffness Equation and Nonlinear Stiffness Equation

김 승 덕 *
Kim, Seung-Deog

김 남 석 **
Kim, Nam-Seok

요 약

본 논문에서는 비선형 강성방정식의 정확성 향상에 관해 연구한다. 대공간 구조물은 대경간을 가볍게 만들기 위해 두께비를 얇게 만들어야 하므로, 구조설계시 구조불안정 검토가 중요하다. 쉘형 구조물의 구조불안정은 초기 조건에 매우 민감하게 반응하며, 이는 대변형을 수반하는 비선형 문제에 귀착하게 된다. 따라서 구조불안정을 정확히 알아보기 위해 비선형 강성방정식의 정확성이 향상되어야 한다. 본 연구에서는 스페이스 트러스를 해석 모델로 하며, 접선 강성방정식과 비선형 강성방정식의 두 이론을 프로그램으로 작성하여 비선형 해석을 수행한다. 두 이론의 해석 결과를 비교 고찰하여 비선형 강성방정식의 정확성 및 수렴성 향상에 대해 검토 한다.

Abstract

This paper study on the accuracy improvement of nonlinear stiffness equation. The large structure must have thin thickness for build the large space structure there fore structure instability review is important when we do structural design. The structure instability of the shelled structure is accept it sensitively by varied conditions. This come to a nonlinear problem with be concomitant large deformation. Accuracy of nonlinear stiffness equation must improve to examine structure instability. In this study, space truss is analysis model. Among tangent stiffness equation and nonlinear stiffness equation is using nonlinearity analysis program. The study compares an analysis result to investigate accuracy and convergence properties improvement of nonlinear stiffness equation.

키워드 : 스페이스 트러스, 불안정, 비선형, 수렴성, 정확성, 수치해석

Keywords : Space Truss, Instability, Nonlinear, Convergence properties, Accuracy, numerical method

1. 서 론

오늘날 첨단산업을 중심으로 하는 초대형 구조물분야, 특히 대공간 구조물 분야에 대한 수요가 증대되고 있다. 우리나라는 향후 건설시장의 변화에 대비하여 대공간구

조물 분야의 기술력 확보가 중요한 과제로 대두 될 것이다. 대공간 구조물은 지붕의 중량을 낮추면서 안정성을 유지하기 위해, 강성구조 시스템을 이산화 시킨 스페이스 트러스 구조물이 쉘 형태로 많이 만들어진다. 쉘형 구조시스템의 구조불안정 문제의 중요한 특징은 초기조건에 매우 민감하게 반응한다는 것이다. 따라서 비선형 해석 자체가 매우 불안정해지고, 이는 수학적 한계성에 기인한다.^{6,7)}

초기불완전형상에 대한 민감성은 분기경로에 결정적

* 정회원 · 세명대학교 건축공학과 부교수, 공학박사

Tel: 043-649-1326 Fax:043-649-1326

E-mail : sabinus56@semyung.ac.kr

** 정회원 · 세명대학교 건축공학과 공학석사

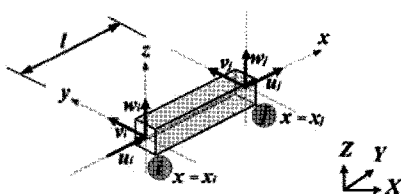
영향을 미친다. 1980년 P.G. Bergan⁸⁾에 의해 불안정 경로에 대한 접선 강성행렬의 특성을 조사에 관한 연구가 이루어졌으며, 분기 해석에 관한 연구의 방법에 대한 고찰로 Y. Hangai⁹⁾가 1993년 논문을 발표하였다. 국내의 연구동향을 살펴보면, 1997년 기하학적 비선형을 고려한 돔의 불안정 거동에 대한 연구로 분기경로, 초기형상 불완전에 대한 좌굴경로에 대하여 연구되었고, 하중모드와 좌굴모드에 대한 연구도 함께 이루어 졌다. 2002년에는 절점의 반강접합 특성이 전체좌굴에 미치는 영향을 살펴본 논문이 발표되었으며, 공간 구조물에 대한 전체 좌굴 현상과 반강접합 특성을 고려하여 불안정 현상에 관한 해석적 연구가 이루어 졌다.⁶⁾⁻⁹⁾

구조 불안정 문제는 매우 민감하며 대변형을 수반하기 때문에 매우 정확한 해석이 필요하다. 본 논문에서는 간단한 스페이스 트러스를 모델로 하여 비선형 해석을 수행한다. 비선형 해석을 위해 비선형 강성방정식을 프로그램으로 작성하였으며⁴⁾, 접선 강성방정식에 의해 작성된 대공간구조물 전용 해석 프로그램인 NASS와 결과를 비교 하였다.^{8,9)} 두 이론의 해석 결과를 고찰하여 비선형 강성방정식의 정확성 및 수렴성 향상에 대해 알아보고자 한다.

2. 강성방정식에 의한 정식화

2.1 비선형 강성방정식에 의한 정식화

국소좌표계 (x, y, z) 및 전체 좌표계 (X, Y, Z) 를 그림 1과 같이 선택하였다. 국소좌표계의 절점력 벡터 $\{f\}$, 절점변위 벡터 $\{d\}$ 를 식(1)과 같이 나타냈으며, 전체좌표계에서의 절점력 벡터 $\{F\}$ 와 절점변위 벡터 $\{D\}$ 를 식(2)와 같이 나타낸다.



〈그림 1〉 비선형 강성방정식 요소의 절점자유도와 좌표계

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i^x \\ f_i^y \\ f_i^z \\ f_j^x \\ f_j^y \\ f_j^z \end{Bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i^x \\ F_i^y \\ F_i^z \\ F_j^x \\ F_j^y \\ F_j^z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix}, \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ U_j \\ V_j \\ W_j \end{Bmatrix} \quad (2)$$

절점력 및 절점변위 사이에는 식(3)과 같은 관계가 성립한다.

$$F = Tf, D = Td \quad (3)$$

여기서, T 는 변환 Matrix이며 그림 2.1의 좌표에서는 식(4)와 같이 된다.

$$T = \begin{bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & T_j \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$T_i = T_j = \begin{bmatrix} a_1 = l_0 & a_2 = \frac{m_0}{\sqrt{l_0^2 + m_0^2}} & a_3 = \frac{l_0 n_0}{\sqrt{l_0^2 + m_0^2}} \\ b_1 = m_0 & b_2 = \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + m_0^2}} & b_3 = \frac{m_0 n_0}{\sqrt{l_0^2 + m_0^2}} \\ c_1 = n_0 & c_2 = 0 & c_3 = \sqrt{l_0^2 + m_0^2} \end{bmatrix}$$

여기서, l_0, m_0, n_0 는 다음의 방향여현이다.

$$l_0 = \cos(X, x), m_0 = \cos(Y, y), n_0 = \cos(Z, z)$$

$\xi = \frac{x}{l}$ ($0 \leq \xi \leq 1$)인 무차원량 ξ 를 도입해, 요소내의 변위가 선형 변화한다고 가정하며, 식(5)와 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi \\ v(\xi) &= \alpha_3 + \alpha_4 \xi \\ w(\xi) &= \alpha_5 + \alpha_6 \xi \end{aligned} \quad (5)$$

변형률에 관한 2차 비선형 항을 이용하는 것으로, 변형률-변위 관계식은 식(6)과 같이 된다.

$$\epsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (6)$$

ϵ 의 $\delta\epsilon$ 증분을 구하면 식(7)과 같다.

$$\delta\epsilon = \frac{d\delta u}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta u}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta v}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta w}{dx} \right)^2 \quad (7)$$

여기서 $\frac{d\delta u}{dx}$, $\frac{d\delta v}{dx}$, $\frac{d\delta w}{dx}$ 는 식(8)과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{d\delta u}{dx} &= \frac{1}{l} \frac{d\delta u}{d\xi} = \frac{1}{l} (u_j - u_i) \\ \frac{d\delta v}{dx} &= \frac{1}{l} \frac{d\delta v}{d\xi} = \frac{1}{l} (v_j - v_i) \\ \frac{d\delta w}{dx} &= \frac{1}{l} \frac{d\delta w}{d\xi} = \frac{1}{l} (w_j - w_i) \end{aligned} \quad (8)$$

그리고 식(9)와 같이 Matrix로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d\delta u}{dx} &= \frac{1}{l} [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot d = UT^t D = A_1 \\ \frac{d\delta v}{dx} &= \frac{1}{l} [0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot d = VT^t D = A_2 \\ \frac{d\delta w}{dx} &= \frac{1}{l} [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot d = WT^t D = A_3 \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{l} [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \\ V &= \frac{1}{l} [0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \\ W &= \frac{1}{l} [0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1] \end{aligned}$$

ϵ 의 증분 에 관해서도 식(10)과 같이 Matrix로 표기해 둔다.

$$\begin{aligned} \frac{d\delta u}{dx} &= UT^t \delta D \\ \frac{d\delta v}{dx} &= VT^t \delta D \\ \frac{d\delta w}{dx} &= WT^t \delta D \end{aligned} \quad (10)$$

재료는 식(11)과 같이 모두 탄성범위 안에 있다고 가정한다.

$$\sigma = E\epsilon, \quad \delta\sigma = E\delta\epsilon \quad (11)$$

요소의 강성 Matrix를 구하기 위해, 가상일의 원리를 도입하면 식(12)와 같다.

$$\delta t^t f = \int \delta \epsilon^t \sigma dV \quad (12)$$

식(12)에 식(3) 및 식(11)의 계수를 대입해 식(13)을 얻는다.

$$(T^t \delta D)^t (t^t F) = \int \delta \epsilon^t E \epsilon dV \quad (13)$$

적분을 실행하면 식(14)와 같다.

$$\delta D^t F = EA l \cdot \delta \epsilon^t \epsilon \quad (14)$$

식(14)에 식(6), 식(7)을 대입하는 것으로써 식(15)의 기 초방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} F &= EA l \cdot [TU^t A_1 \\ &\quad + TU^t A_1^2 + TV^t A_1 A_2 + TW^t A_1 A_3 + TU^t \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \\ &\quad + TV^t A_1 \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \\ &\quad + TW^t A_2 \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \\ &\quad + TW^t A_3 \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)] \end{aligned} \quad (15)$$

식(15)를 정리하면, 식(16)과 같은 부재의 하중에 변위 계수를 나타낸 비선형 방정식이 구해진다.

$$F = K_1 D_1 + K_2 D_2 + K D + K_3 D_3 \quad (16)$$

여기서,

$$K_1 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -a_1^2 & -a_1 b_1 & -a_1 c_1 \\ -a_1 b_1 & -b_1^2 & -b_1 c_1 \\ -a_1 c_1 & -b_1 c_1 & -c_1^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_1 b_1 & a_1 c_1 \\ a_1 b_1 & b_1^2 & b_1 c_1 \\ a_1 c_1 & b_1 c_1 & c_1^2 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \frac{EA}{2l^2} \begin{bmatrix} -3a_1 - a_1 - a_1 & : & -b_1 & 0 & -c_1 \\ -b_1 & -3b_1 - b_1 & : & -a_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & -c_1 - 3c_1 & : & 0 & -b_1 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3a_1 & a_1 & a_1 & : & b_1 & 0 & c_1 \\ b_1 & 3b_1 & b_1 & : & a_1 & c_1 & 0 \\ c_1 & c_1 & 3c_1 & : & 0 & b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \frac{EA}{2l^3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix}, D_2 = \begin{Bmatrix} \tilde{u}^2 \\ \tilde{v}^2 \\ \tilde{w}^2 \\ \tilde{u}\tilde{v} \\ \tilde{v}\tilde{w} \\ \tilde{w}\tilde{u} \end{Bmatrix}, D_3 = \begin{Bmatrix} \tilde{u}^3 \\ \tilde{v}^3 \\ \tilde{w}^3 \\ \tilde{u}^2\tilde{v} \\ \tilde{u}\tilde{v}^2 \\ \tilde{u}^2\tilde{w} \\ \tilde{u}\tilde{w}^2 \\ \tilde{v}^2\tilde{w} \\ \tilde{v}\tilde{w}^2 \\ \tilde{w}^2\tilde{u} \\ \tilde{w}\tilde{u}^2 \end{Bmatrix}$$

$$\tilde{u} = u_j - u_i, \quad \tilde{v} = v_j - v_i, \quad \tilde{w} = w_j - w_i$$

$$u(x) = N_i u_i + N_j u_j \tag{18}$$

$$v(x) = N_i v_i + N_j v_j$$

$$w(x) = N_i w_i + N_j w_j$$

식(18)에서 형상함수인 N_i 와 N_j 는 Lagrangian 보간 함수로 식(19)와 같이 나타낸다.

$$N_i = 1 - \xi, \quad N_j = \xi, \quad \xi = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \tag{19}$$

요소의 변형도-변위 관계식을 기하학적 비선형을 나타내는 2차항까지를 식(20)과 같이 채택한다.

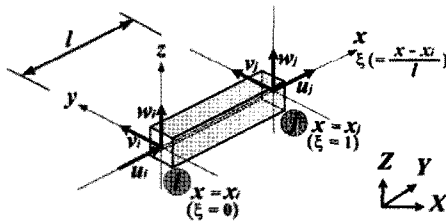
$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \tag{20}$$

2.2 점선 강성방정식에 의한 정식화

트러스 요소로 구성된 공간 구조물의 기하학적 비선형성을 고려한 해석을 위해 2절점 3자유도를 갖는 공간 트러스 요소의 점선 강성행렬을 유도한다. 트러스 요소의 요소 좌표계 및 전체 좌표계를 그림 2와 같이 정의한다.

식(18)을 식(20)에 대입하고 변형도를 절점변위로 표현하여 행렬로 나타내면 식(21)과 같다.

$$\epsilon_x = A_1 d + \frac{1}{2} d^T B^T B d \tag{21}$$



〈그림 2〉 점선 강성방정식 요소의 절점자유도와 좌표계

여기서,

$$A_1 = [N_{i,x} \quad 0 \quad 0 \quad N_{j,x} \quad 0 \quad 0]$$

$$B = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & N_{j,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 & N_{j,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & N_{j,x} \end{bmatrix}$$

요소좌표계는 (x, y, z) 로, 전체좌표계는 (X, Y, Z) 로 설정하고, 양단의 절점변위 d 및 절점하중 f 를 식(17)과 같이 나타낸다.

중분구간에서 응력도-변형도 관계식을 식(22)와 같이 채택한다.

$$\sigma_x = E \epsilon_x \tag{22}$$

$$d = \begin{Bmatrix} d_i \\ \dots \\ d_j \end{Bmatrix} = [u_i \ v_i \ w_i \ ; \ u_j \ v_j \ w_j]^T \tag{17}$$

$$f = \begin{Bmatrix} f_i \\ \dots \\ f_j \end{Bmatrix} = [f_{xi} \ f_{yi} \ f_{zi} \ ; \ f_{xj} \ f_{yj} \ f_{zj}]^T$$

물체력(body force)과 표면력(surface traction)을 받는 구조가 평형상태에 있을 때, 임의의 가상변위에 의해 발생한 외부가상일(δW)과 가상변위로 인해 구조체 내에 저장된 내부 가상변형에너지(δU)가 일치한다는 것이다.

한 요소가 갖는 절점을 2개로 두고 요소내 변위를 식(18)과 같이 에 관한 1차식으로 가정한다.

$$\delta U = \delta W \tag{23}$$

식(23)의 δU 와 δW 를 구하면 식(24)와 같다.

$$\int_V \sigma_x \delta \epsilon_x dV = f^T \delta d \quad (24)$$

현재의 상태를 초기상태로 가정하고, 현 상태에서의 증분에 관한 가상일의 원리를 적용하면 식(25)와 같다.

$$\int_V [(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x) \delta \epsilon_x] dV = (f^{(0)} + f)^T \delta d \quad (25)$$

식(21)로부터 $\delta \epsilon_x$ 를 구하면 식(26)과 같다.

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_x &= A_1 \delta d + d^T B^T B \delta d \\ &= (A_1 + d^T B^T B) \delta d \end{aligned} \quad (26)$$

식(26)을 식(25)에 대입하고, 적분영역 dV 를 일정단면적 A 와 일정길이 l 로 치환하고, δd 는 임의의 가상변위이므로 식(27)과 같아야 한다.

$$Al[(\sigma_x^{(0)} + \sigma_x)(A_1 + d^T B^T B)] = (f^{(0)} + f)^T \quad (27)$$

여기서,

A : 요소의 단면적

l : 요소의 길이

식(21)을 식(22)에 대입하면, 식(28)과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \epsilon_x = E \left(A_1 d + \frac{1}{2} d^T B^T B d \right) \\ &= EA_1 d + \frac{1}{2} Ed^T B^T B d \end{aligned} \quad (28)$$

식(28)을 식(27)에 대입하고, d 에 관한 2차항 이상을 소거하여 양변행렬에 전치를 취하면 식(29)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} f^{(0)} + f &= Al(A_1^T \sigma_x^{(0)} + A_1^T (\sigma_x^{(0)} B^T B) d \\ &\quad + AlE(A_1^T A_1) d + \text{고차항} \end{aligned} \quad (29)$$

식(29)에서 d 에 관한 고차항의 소거로 인하여 생기는 불평형력(residual force)은 식(30)과 같이 정의한다.

$$r = Al A_1^T \sigma_x^{(0)} - f^{(0)} \quad (30)$$

식(30)을 식(29)에 대입하면, 식(31)과 같은 접선 강성 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f - r &= AlE(A_1^T A_1) d + Al(\sigma_x^{(0)} B^T B) d \\ &= (k_B + k_G) d \end{aligned} \quad (31)$$

여기서,

$k_B = AlE(A_1^T A_1)$: 요소의 탄성강성행렬

$k_G = Al(\sigma_x^{(0)} B^T B)$: 요소의 기하강성행렬

절점하중 벡터, 불평형력 벡터, 절점변위 벡터를 변환행렬 T 를 이용하여 변환하면 식(32)와 같이 나타낼 수 있다.

$$f = TF, \quad r = TR, \quad d = TD \quad (32)$$

식(32)를 식(31)에 대입하면 식(33)과 같다.

$$T(F - R) = [k_B + k_G] TD \quad (33)$$

따라서, 전체좌표계에서의 증분구간에 관한 강성행렬은 식(34)와 같이 구해진다.

$$F - R = [K_B + K_G] D \quad (34)$$

여기서,

$K_B = T^T k_B T$: 전체 좌표계에서의 탄성강성행렬

$K_G = T^T k_G T$: 전체 좌표계에서의 기하강성행렬

3. 수치해석

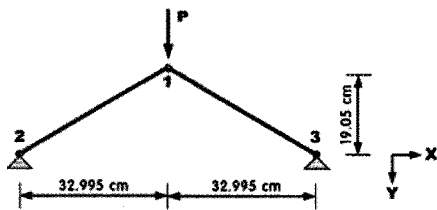
3.1 Fortran을 이용한 해석 프로그램 작성

2.1절의 비선형 강성방정식을 기본 이론으로 하여 개발된 프로그램을 NonT(Nonlinear Truss)라 부른다. 비선형 해석 프로그램 NonT는 고차항을 생략하지 않고 변위의 3차항까지를 포함하고 있다.⁴⁾

2.2절의 접선 강성방정식을 기본 이론으로 하여 개발된 프로그램을 NASS(Nonlinear Analysis for Space Structures)라 부르기로 한다. NASS는 기하학적 비선형을 고려한 유한요소법을 이용하여 개발된 비선형 해석 프로그램이다. Hybrid형 대공간 구조물 구조해석용으로, Shell Structures, Space Frame Structures, Membrane Structures, Space Cable Structures 및 이들의 복합 구조체인 Hybrid structures의 비선형 구조 해석까지를 함께 다룰 수 있는 해석 프로그램이다.^{8,9)}

3.2 평면트러스 모델을 통한 해의 정확성

1-자유절점의 단위 평면트러스를 해석 모델로 하여 접선 강성방정식과 비선형 강성방정식을 비교하여 비선형 강성방정식의 정확성을 알아보고자 한다. 모델의 형상은 그림 3과 같으며, 해석은 3.1절에서 Fortran으로 작성된 프로그램 NonT와 NASS로 한다.



〈그림 3〉 평면트러스 모델의 형상

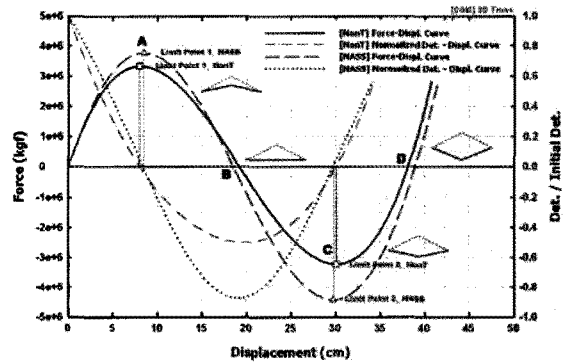
해석 모델인 단위 평면트러스는 절점이 3개이고 2개의 부재로 연결되어 있으며, 구조모델의 대칭성을 고려하면 1-자유도 모델이다. 단위 모델의 비선형 거동을 파악하는데 있어서 많은 연구자들에 의해 해석된 모델로서, 모델의 좌굴 후 경로는 채택되어진 응력도-변형도에 따라 매우 민감한 거동을 나타내는 것으로 알려져 있다. 해석모델의 경계조건은 2번절점과 3번절점은 고정, 1번

절점은 자유절점으로 한다. 하중조건은 1번절점에 수직 방향의 절점하중 P가 작용한다.

부재의 재원은 다음과 같다.

- 부재 단면적 $A = 96.77 \text{ (cm}^2\text{)}$
- 탄성 계수 $E = 7.03 \times 10^5 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$

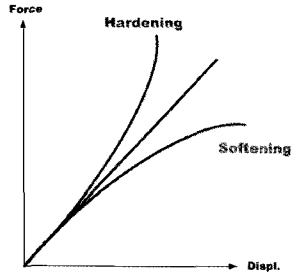
1-자유절점 평면트러스 모델의 1번절점에 수직방향 강재변위 50cm를 1mm 간격으로 변위증분하여 해석을 수행하고, 해석결과를 그림 4에 나타낸다. 실선과 파선은 1번절점의 수직변위와 하중과의 관계를 나타낸 곡선이다.



〈그림 4〉 평면트러스 모델의 비선형 거동과 행렬식 값의 변화

그림 4에서 A와 C는 첫 번째와 두 번째 극한점(Limit point)에서의 변형상태를, B와 D는 하중이 0이 되는 점에서의 변형상태를 각각 나타낸다. 각 점에서의 형상 그림에서 점선은 초기의 형상, 실선은 변형된 형상이다. 일점쇄선과 점선(dotted)은 각각 비선형 강성매트릭스와 점선 강성매트릭스의 행렬식값의 결과이며, 매 증분에서 얻어지는 행렬식을 zero 하중레벨에서 얻어진 행렬식으로 일반화시킨 값과 변위와의 관계를 나타낸 곡선이다. 행렬식이 극한점에서 zero가 되며, 모델은 뒹좌굴(Snap-through) 불안정 현상을 일으킴을 알 수 있다. 또한 하중이 가해지기 시작하여 첫 번째 극한점 A까지는 안정의 평형경로를 나타내며, 첫 번째 극한점 A에서 두 번째 극한점 C까지의 경로는 불안정한 경로가 되고, 두 번째 극한점 C이후의 경로는 안정의 평형경로가 됨을 알 수 있다.

그림 5는 비선형거동 특성을 나타낸 그림으로 평면트러스 모델은 "Softening"한 특성을 갖는 모델임을 알 수 있다.



〈그림 5〉 비선형 구조 거동 특성

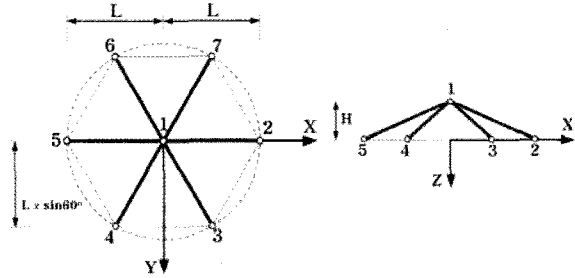
해석결과 평면 트러스 모델의 극한점 하중은 NonT가 $3.318 \times 10^6 \text{ kgf}$, NASS가 $3.756 \times 10^6 \text{ kgf}$ 이다. 이때 1번 절점의 수직방향 변위는 NonT가 8.00cm, NASS가 이다. 해석 결과 NonT의 극한점 하중은 NASS의 극한점 하중에 88.4%에서 불안정 경로나 나타남을 알 수 있었다. 또한 두 프로그램 모두 극한점 이전의 평형경로 뿐만 아니라 극한점 이후의 경로까지를 포함하고 있음을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서 이용한 변위증분법이 좌굴 후 평형경로까지도 추적이 가능하다는 것을 알 수 있으며, 비선형 강성방정식을 이용한 해석 결과 "Softening" 현상에 따라 정확성이 매우 향상되어 있음을 알 수 있다.

3.3 구조불안정 해석을 통한 해의 비교

비선형 강성방정식의 정확성을 알아보기 위해 1-자유 절점 트러스와 2-자유절점 트러스를 해석 모델로 하며, 해석 프로그램은 NonT와 NASS로 한다.

3.3.1 1-자유절점 트러스 모델

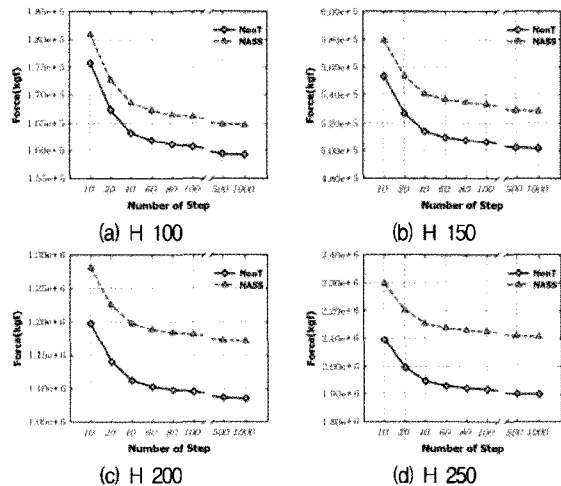
해석모델은 절점이 7개이고 6개의 부재로 연결된 육각뿔 모양의 1-자유절점 단위 모델이다. 경계조건은 1번 절점을 자유절점으로 나머지 절점을 고정절점이며, 하중 조건은 1번절점에 연직 방향으로 압축력이 작용하도록 하였다.



〈그림 6〉 1-자유절점 트러스 모델의 형상

단면형상 및 물성치는 모든 요소에서 동일하며 탄성계수(E)는 $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$, 밀도(ρ)는 $7.85 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^2$ 이고 반지름(L)은 500cm 이다.

해석대상 모델의 정확성을 알아보기 위해 1번 절점의 수직변위를 step 수에 따라 변위증분하여 해석을 수행하였다. 여기서 해석 모델은 높이 H에 따라 비교하였으며, step 수는 1-자유절점 모델의 극한점에서의 변위(D_{limit})를 변위증분(ΔD)으로 나눈 값으로 하였다.



〈그림 7〉 1-자유절점 트러스의 Step 수에 따른 수렴곡선

〈표 1〉 1-자유절점 트러스의 좌굴하중비교(H150)

step	NonT	NASS	좌굴하중비
			NonT/NASS(%)
10	760,415.50	787,138.80	96.60501
20	701,263.80	726,894.50	96.47394
50	666,856.10	692,280.10	96.32750
100	655,467.80	680,989.50	96.25226
1000	645,386.90	670,772.00	96.21554

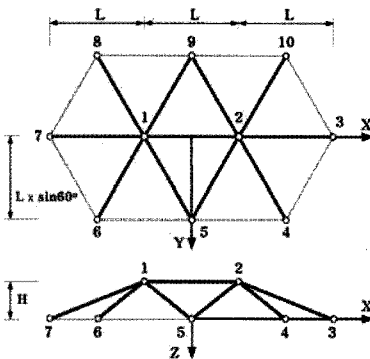
〈표 2〉 1-자유절점 트러스의 좌굴하중비교(H250)

step	NonT	NASS	좌굴하중비
			NonT/NASS(%)
10	2,810,752.00	3,081,380.00	91.21731
20	2,618,713.00	2,877,756.00	90.99844
50	2,504,634.00	2,757,861.00	90.81799
100	2,466,798.00	2,718,320.00	90.74715
1000	2,432,453.00	2,682,783.00	90.66902

그림 3.5은 1-자유절점 트러스의 Step 수에 따른 수렴곡선으로 극한점에서의 하중값을 비교한 것이다. 표 1과 표 2는 1-자유절점 모델의 좌굴하중값을 비교한 것으로 각각 H150, H250 인 경우다. 해석결과 비선형 강성 방정식을 이용한 NonT의 해석결과에서 정확성이 향상 되어 있음을 알 수 있으며, step 수가 증가함에 따라 수렴성도 향상 되어 있음을 알 수 있다. 표 1과 표 2에서는 NonT의 좌굴하중값이 NASS의 좌굴하중값 보다 낮게 나타남을 알 수 있다.

3.3.2 2-자유절점 트러스 모델

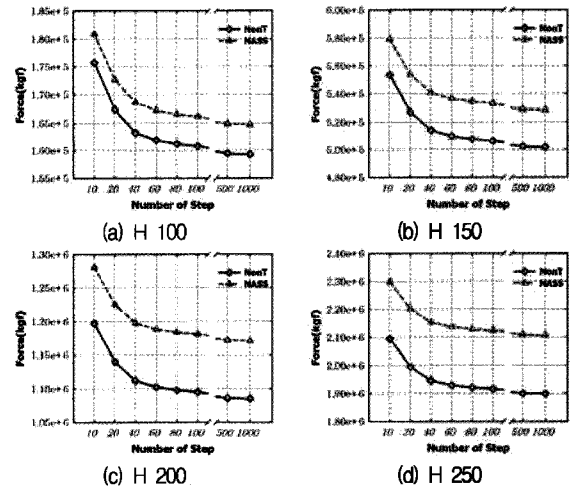
모델은 삼각형을 기본 모듈로 하였으며 10개의 절점과 11개의 부재로 연결된 모델이다. 모델의 높이는 H로 1번 절점과 2번절점의 높이는 같으며, 경계조건은 1번절점과 2번절점은 자유절점으로 나머지 절점은 고정절점으로 한다. 모델의 형상은 그림 8과 같다.



〈그림 8〉 2-자유절점 트러스 모델의 형상

2-자유절점 트러스 모델의 단면적, 탄성계수 밀도는

1-자유절점 트러스와 동일하다. 모델의 전체 자유도 수는 6이며, 하중조건은 1번절점과 2번절점에서 수직방향으로 동일 레벨의 하중이 작용한다. 해석 모델의 높이(H)와 step 수는 1-자유절점 트러스 모델과 동일하다.



〈그림 9〉 2-자유절점 트러스의 Step 수에 따른 수렴곡선

〈표 3〉 2-자유절점 트러스의 좌굴하중비교(H150)

step	NonT	NASS	좌굴하중비
			NonT/NASS(%)
10	553,535.40	579,509.20	95.51797
20	523,934.00	548,930.90	95.44626
50	507,692.13	532,523.70	95.33700
100	503,851.30	529,248.30	95.20131
1000	499,216.10	523,933.00	95.28243

〈표 4〉 2-자유절점 트러스의 좌굴하중비교(H250)

step	NonT	NASS	좌굴하중비
			NonT/NASS(%)
10	2,095,035.00	2,298,699.00	91.14003
20	1,982,945.00	2,179,272.00	90.99117
50	1,919,515.00	2,117,879.00	90.63384
100	1,904,070.00	2,105,598.00	90.42894
1000	1,886,302.00	2,084,791.00	90.47919

그림 9는 2-자유절점 트러스의 Step 수에 따른 수렴곡선으로 극한점에서의 하중값을 비교한 것이다. 해석결과 1-자유절점 트러스 보다 극한점 하중의 차이가 많이

나타나고 있으며, step 수가 증가함에 따라 수렴성도 향상 되어 있음을 알 수 있다. 표 3과 표 4에서는 NonT의 좌굴하중값이 NASS의 좌굴하중값 보다 낮게 나타남을 알 수 있다.

4. 결론

접선강성방정식과 비선형 강성방정식을 이용하여 해석 프로그램을 작성하였고, 간단한 스페이스 트러스 모델에 적용하여 비선형 해석 결과를 비교 하였다. 두 방정식의 정확성 및 수렴성을 고찰하여 다음의 결과를 얻었다.

1. 비선형 강성방정식에 의한 해석 결과 "Softening"이 빠르게 진행되었으며, 정확도가 향상되었음을 알 수 있었다.
2. 비선형 강성 방정식을 이용한 스페이스 트러스 모델의 불안정 거동 해석 결과 향상된 좌굴하중값을 얻을 수 있었다.
3. 비선형 강성방정식은 접선 강성방정식 보다 수렴성이 향상되어 있음을 알 수 있었다.
4. Fortran으로 작성된 해석 프로그램 NonT (Nonlinear Truss)는 비선형 구조거동을 보다 효율적으로 접근할 수 있으며, 매우 민감한 비선형해를 얻을 수 있었다.

-감사의글-

본 연구는 국토해양부 첨단도시개발사업의 연구비지원(과제번호# 06 R&D B03)에 의해 수행되었습니다.

-참고문헌-

1. Bergan, P. G., "Solution algorithms for nonlinear structural problems," Computers and Structures, Vol.12, 1980, pp.497-509.

2. Hsiao, Kuo-Mo and Hou, Fang Yu, "Nonlinear finite element analysis of elastic frames," Computers and Structures, Vol.26, No.4, 1987, pp.693-701.
3. Choong, K. K. and Hangai, Y., "Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures," IASS, Vol.34, No.112, 1993, pp.133-149.
4. 金勝德, "偏平構造物の動的安定に関する研究," 東京大學 大学院, 博士學位論文, 1990.
5. 권택진, 김승덕, 김종민, "기하학적 비선형을 고려한 핀접합 단층래티스돔의 불안정 거동에 관한연구," 한국전산구조공학회 학술발표회논문집, 제10권 제1집, 1997, pp.240-247.
6. 권택진, 한상을, 최현식, 김승덕, 정명채, 서삼열, 쉘구조론 - 한국전산구조공학회편, 기문당, 1998.
7. 김승덕, "대공간구조물의 21세기 전망", 전산구조공학 제13권, 1호, 2000, pp 67-79
8. 김승덕, "반강접합 프레임형 대공간 구조물의 비선형 불안정 해석에 관한 연구," 대한건축학회 논문집 구조계, 제18권 3호, 2002, pp55-62
9. 孫秀德, "프레임형 공간구조물의 반강접 특성을 고려한 비선형 불안정 현상에 관한 연구"慶北大學校 大学院 工學博士學位論文, 2003.

▶접수일자 : 2009년 4월 28일

▶심사 완료일자 : 2010년 6월 9일

▶게재 확정일자 : 2010년 6월 10일