

성층화된 축열조의 1차원모델에 대한 적분 근사해

정재동[†]
세종대학교 기계공학과

Integral Approximate Solutions to a One-Dimensional Model for Stratified Thermal Storage Tanks

Jae Dong Chung[†]
Mechanical Engineering, Sejong University, Seoul 143-747, Korea
(Received February 22, 2010; revision received April 23, 2010)

ABSTRACT: This paper deals with approximate integral solutions to the one-dimensional model describing the charging process of stratified thermal storage tanks. Temperature is assumed to be the form of Fermi-Dirac distribution function, which can be separated to two sets of cubic polynomials for each hot and cold side of thermal boundary layers. Proposed approximate integral solutions are compared to the previous works of the approximate analytic solutions and show reasonable agreement. The approach, however, has benefits in mathematical difficulties, complicated solution form and unstable convergence of series solution founded in the previous analytic solutions. Solutions for a semi-infinite region, which have simple closed form solutions, give close agreement to those for a finite region. Thermocline thickness is obtained in closed form and shows proportional behavior to the square root of time and inverse proportional behavior to the square root of flow rate.

Key words: Integral Approximate Solution(적분근사해), Stratification(성층), Thermal Storage Tank(축열조), 열경계층 두께(Thermocline Thickness)

———— 기 호 설 명 ————		x : 입구로부터 위치 [m]	
A, a : 온도분포 인자			그리스 문자
$ Fo $: Fourier 수			
$ H $: 축열조 높이 [m]		$ \alpha $: 열확산계수 [m ² /s]	
$ Pe $: Peclet 수		$ \eta $: $ \theta = 0.5 $ 인 무차원 위치	
$ T $: 온도 [K]		$ \theta $: 무차원 온도	
$ t $: 시간 [s]		$ \xi $: 무차원 위치	
$ U $: 축열조내 유속 [m/s]		$ \tau $: 무차원 시간	
$ u $: 무차원 유속			

하첨자

[†] Corresponding author

Tel.: +82-2-3408-3776; fax: +82-2-3408-4333
E-mail address: jdchung@sejong.ac.kr

0 : 초기상태
 i : 축열조입구상태

1. 서 론

급격한 산업화의 확산으로 에너지자원의 고갈 및 기후변화 등 심각한 환경변화에 대응하기 위해서는 1차 에너지의 사용을 최대한 줄이면서 환경친화적인 산업구조의 형태를 갖는 에너지 이용기술 및 도입이 필요하다. 이를 위하여 대도시 지역이나 공업단지에서 현재 발생되고 있는 다양한 유형의 미활용에너지를 회수하여 재활용하는 것은 에너지 절약 뿐만 아니라 환경개선을 위하여 시급히 필요한 분야이다. 미활용 에너지는 도시지역에 대량으로 부존하고 있지만 일반적으로 온도레벨이 낮고, 수요와 공급에 시간적 차이가 있고, 수요자와의 거리가 멀다는 등의 공통적 특징을 가지고 있다. 따라서 미사용 열원을 저장한 후 유효하게 이용할 수 있기 위한 열저장 기술이 필연적으로 요구된다. 열저장의 필요성은 에너지 밀도가 낮은 여타 열원, 예를 들면 태양열, 지열의 적용에서도 발견된다.

열저장 목적으로 사용되는 많은 방법들 중에서 특히 수축열 방법은 낮은 초기 설치비와 유지비, 높은 효율, 환경친화적인 장점 등으로 널리 사용되고 있다. 예를 들어 1998년 미국 전체 열저장 시스템의 34%가 수축열 방법을 사용하며 그 중 60%는 축열물질의 온도에 따른 밀도변화를 이용하는 성층축열(Stratified Thermal Storage)방식을 택하고 있다.⁽¹⁾ 이 경우 열성층은 축열 시스템의 성능에 직접적인 영향을 미치며, 시스템의 성능향상을 위해서는 운전과정동안 열성층을 최대한 잘 유지시키는 것이 중요하며, 이를 위한 실험⁽²⁻⁴⁾, 수치해석⁽⁵⁻⁷⁾, 해석적 접근⁽⁸⁻¹¹⁾이 수행되어 왔다.

해석적 접근의 경우⁽⁶⁻¹¹⁾ 실험에서 관찰된 현상에 근거하여 축열과정에 대한 모델을 정립하고 성층특성을 포함한 전체 시스템의 성능을 예측하며 그 결과를 설계에 적용하고자 수행되고 있다. 축열조의 특성상 1차원 거동으로 이해될 수 있으며 다양한 형태의 1차원 모델이 제시되어 왔다. Zurigat et al.⁽⁸⁾은 구체적으로 그 유용성과 각각의 특성을 취급한 바 있다.

기존 해석해⁽⁹⁾는 완결된 형태(closed form)의 엄밀해를 얻을 수 있다는 장점을 가진 반면, 해석적 접근에서 복잡한 Laplace 변환을 거치는 단점이 있다. 또한, 이후 연구에서 완전혼합영역을 고려하거나⁽¹⁰⁾ 변온유입의 영향을 고려하는 등⁽¹¹⁾ 일부 확장이 있었지만 이를 위한 수학적 난이도가 너무 높아서 접근이 어렵고 일부 결과는 급수전개의 수렴성

에 문제가 있어서 엄밀해가 아닌 근사해가 제시되었다. 이러한 이유로 실제 활용하기에도 접근 용이성이 떨어지는 단점이 있다. 따라서 실용적인 측면에서 접근이 용이하면서도 해의 정확도가 공학적 허용범위 내에서 유지될 수 있는 근사해법의 필요성이 제기된다. 이러한 근사해는 수치해석 방법과는 달리 엄밀해가 가지는 장점, 즉 매개변수들의 물리적 의미를 충분히 설명하고 있으므로 비록 엄밀해가 존재하는 경우라도 상기한 바와 같이 엄밀해의 단점이 존재하는 경우 충분한 가치가 있을 것이다.

본 연구에서는 1차원 모델로 근사화된 성층축열조에 대한 적분근사해를 구하고, 기존 해석해와 비교하여 그 유용성을 확인하고자 한다.

2. 해 석

2.1 해석 대상 시스템

해석 대상 시스템은 Fig. 1에 개략적으로 도시된 것과 같이 높이 H 인 수직원통형상으로, 최초에는 온도 T_0 인 유체가 균일한 상태로 채워져 있다. 충전이 시작되면 열원으로부터 온도 T_i 인 고온유체가 상부로 유입되고 동시에 축열조내의 저온유체는 하부에서 유출된다. 열손실과 벽면효과는 무시할 수 있다고 가정하고 입구에서의 유동혼합은 억제되었다고 가정하면 축열조내 유동은 1차원 취급될 수 있다.

이상의 가정 하에서 지배 방정식을 유도하고 무

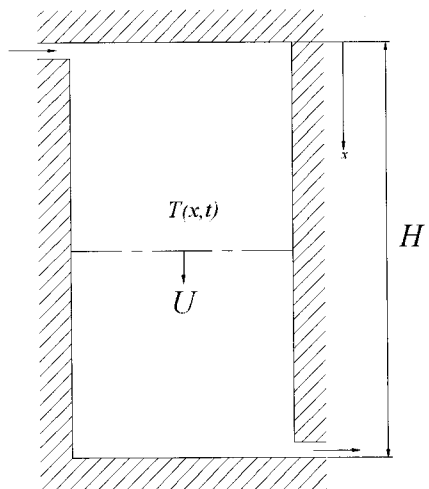


Fig. 1 Schematic of the physical system.

차원하면 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \quad (1)$$

$$\theta(\xi, 0) = 0 \quad (2)$$

$$\theta(0, \tau) = 1 \quad (3)$$

$$\theta(1, \tau) = 0 \quad (4)$$

여기서 무차원변수 및 인자는 다음과 같이 정의된다.

$$\tau = t\alpha/H^2 = Fo \quad (5)$$

$$\xi = x/H \quad (6)$$

$$\theta = (T - T_0)/(T_i - T_0) \quad (7)$$

$$u = UH/\alpha = Pe \quad (8)$$

현상을 지배하는 유일한 무차원 인자는 Peclet 수이며 실제 축열조 시스템에서 그 값은 $O(10^2 \sim 10^3)$ 정도를 가진다. $Pe \cdot Fo = 1$ 은 1회 충전 시간에 해당하며, 이후 결과를 제시함에 기준으로 삼는다.

축열조의 출구가 입구에서 무한히 이격되어 있다는 가정에서 해석대상을 1차원 반무한영역으로 취급하여 경계조건 식(4) 대신 식(9)를 적용하기로 한다. 보다 엄격한 해석을 통해 식(4)를 적용했을 시와 비교하여 이러한 가정이 결과에 큰 영향을 주지 않음을 확인할 것이다.

$$\theta(\infty, \tau) = 0 \quad (9)$$

2.2 적분해석

축열조내 무차원 온도분포 $\theta(\xi, \tau)$ 를 식(10)와 같은 형태의 식으로 근사하기로 한다. 식(11)과 식(12)의 경계조건을 만족하고 $\theta = 0.5$ 를 중심으로 고온부와 저온부에서 각각의 영역에서 온도경계층이 형성되므로 Fermi-Dirac 분포함수 형태로 가정함을 합리적이다. 일반적으로 적분해석에서 사용되는 온도분포 근사형태인 다항식은 성층화된 축열조내

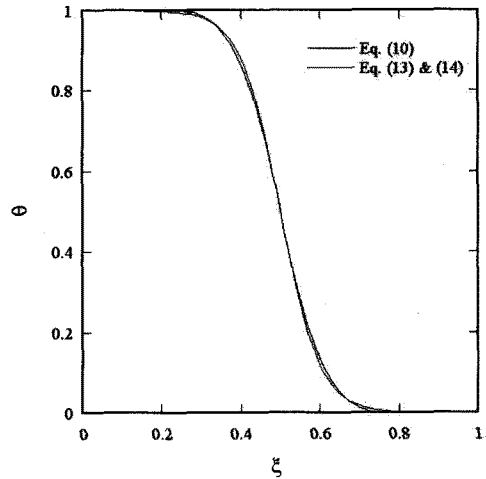


Fig. 2 Assumed temperature profiles used in integral method.

온도분포의 형태를 근사하기에는 적합하지 않다. 하지만 단일 식으로 표현된 다항식이 아니라 $\theta = 0.5$ 를 중심으로 고온부(식(13))와 저온부(식(14))의 각각에 대응하는 별도의 다항식을 구성하면 식(10)를 직접 다루는 것보다 적분해석이 훨씬 용이해진다.

$$\theta = \frac{1}{\exp((\xi - \eta)/A) + 1} \quad (10)$$

$$\xi \rightarrow -\infty \quad \theta = 1 \quad (11)$$

$$\xi \rightarrow +\infty \quad \theta = 0 \quad (12)$$

$$\theta = 1 - \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{\xi - \eta}{a} \right)^3 \right\} \quad \eta - a < \xi < \eta \quad (13)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{\xi - \eta}{a} \right)^3 \right\} \quad \eta < \xi < \eta + a \quad (14)$$

$$\theta = 1, \quad \partial\theta/\partial\xi = 0 \quad \text{at } \xi = \eta - a \quad (15)$$

$$\theta = 0, \quad \partial\theta/\partial\xi = 0 \quad \text{at } \xi = \eta + a \quad (16)$$

Fig. 2는 입의 η 와 A 에 대해 식(13), 식(14)의 형태로 곡선접합한 예를 보여준 것으로 $\xi < \eta - a$ 에서 $\theta = 1$ 로 $\eta + a < \xi$ 에서 $\theta = 0$ 으로 취할 때 조건식(15)와 식(16)을 만족하며, 축열조내 무차원 온도분포 식(10)을 만족할 수준으로 근사할 수 있음을

확인할 수 있다.

이제 문제는 미정계수 η 와 a 를 구하는 문제로 귀착되므로 지배방정식을 구간 $[0, \infty)$ 에 대해 적분하여 정리하면(식(17)) 미정계수 η 를 구할 수 있다(식(18)).

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^\infty \theta d\xi + \int_0^\infty u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\xi = \int_0^\infty \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} d\xi \quad (17)$$

$$\eta = u\tau \quad (18)$$

또한 지배방정식을 구간 $[0, \eta]$ 에 대해 적분하여 정리하면(식(19)) 미정계수 a 를 구할 수 있다(식(20)).

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_0^\eta \theta d\xi - \frac{d\eta}{d\tau} \theta_{\xi=\eta} \\ + \int_0^\eta u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\xi = \int_0^\eta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} d\xi \end{aligned} \quad (19)$$

$$a = \sqrt{24\tau} \quad (20)$$

따라서, 축열조내 온도분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta = 1 - \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{\xi - u \cdot \tau}{\sqrt{24\tau}} \right)^3 \right\} \\ u\tau - \sqrt{24\tau} < \xi < u\tau \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \theta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi - u \cdot \tau}{\sqrt{24\tau}} \right)^3 \\ u\tau < \xi < u\tau + \sqrt{24\tau} \end{aligned} \quad (22)$$

해석 대상이 축열조 출구, $\xi = 1$ 까지로 국한된 상황에서 반무한영역으로 가정한 결과에 대한 불확실성을 확인할 필요가 있다. 따라서 1차원 반무한영역으로 가정하는 대신 유한한 영역에 대한 해석으로 경계조건 식(4)를 사용할 경우를 고려하기로 한다. 이럴 경우 $\eta + a < 1$ 일 때는 식(9)를 사용할 때와 동일하나 $1 < \eta + a$ 일 때는 식(17)대신 식(23)을 사용해야 한다. 이를 정리하면 식(20)처럼 간단히 정리되지는 않고 미분방정식 형태인 식(24)로 되어 4차 Runge-Kutta 법에 의해 해석하게 된다.

$$\frac{d}{d\tau} \int_0^1 \theta d\xi + \int_0^1 u \frac{\partial \theta}{\partial \xi} d\xi = \int_0^1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} d\xi \quad (23)$$

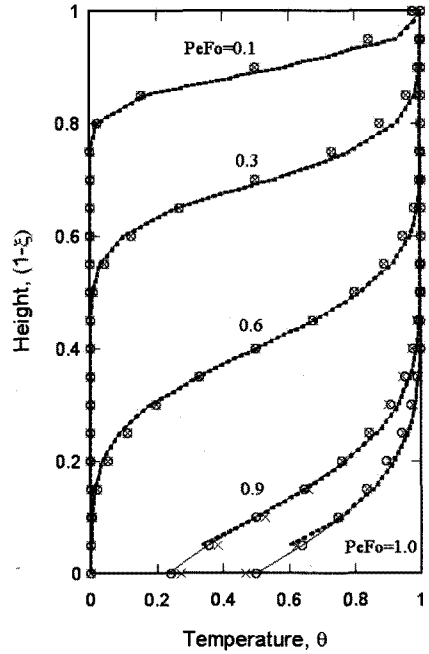


Fig. 3 Vertical temperature profiles at different times for $Pe = 100$.

$$\frac{d}{d\tau} \left\{ \eta - \frac{1}{8} \left(\frac{a-1+\eta}{a} \right)^4 \right\} + \frac{u}{2} \left(\frac{a-1+\eta}{a} \right)^3 - u = 0 \quad (24)$$

3. 결과 및 고찰

3.1 검증

Fig. 3은 $Pe = 100$ 일 때 몇 가지 시점에서의 온도분포를 경계조건 식(9)를 사용한 알려진 근사해(실선)⁽⁹⁾ 및 적분근사해(기호○), 경계조건 식(4)를 사용한 알려진 근사해(점선)⁽⁹⁾ 및 적분근사해(기호×)를 비교하여 제시된 적분근사해의 타당성을 검증하였다. 발표된 엄밀해는⁽⁹⁾ $Pe > 100$ 인 경우 급수전개의 수렴성에 문제가 있다고 보고되고 있고 결과가 근사해와 거의 일치하므로 비교에서 제외하였다. 적분근사해는 기존 해석해와 거의 유사한 결과를 보임을 알 수 있다. 또한 주목할 점은 반무한 평판 가정에 의한 적분근사해의 결과(기호○, 식(9))는 유한한 영역에 대한 해석 결과(기호×, 식(4))와 거의 일치하고 있으며, 이는 해석해에서도 보고된 결과이다. 따라서 Runge-Kutta 법으로 미분방정식을 다루게 되는 불편함이 없이 반무한 평판 가정하

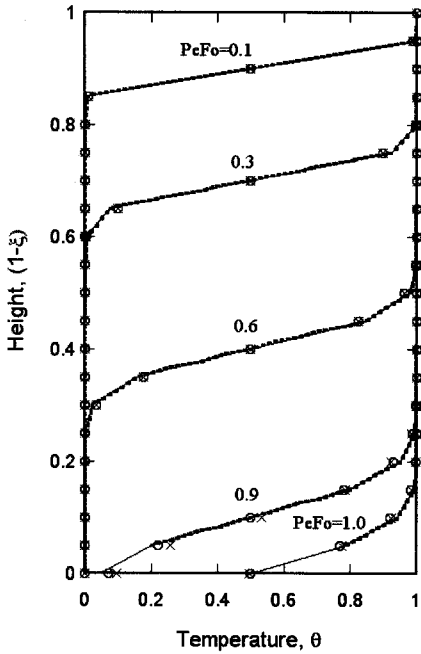


Fig. 4 Vertical temperature profiles at different times for $Pe = 500$.

에서의 완결된 형태(closed form)의 결과인 식(21)과 식(22)로서 1차원 모델로 근사화된 성층축열조의 온도거동을 이해할 수 있을 것이다.

이상의 검증과정은 다른 Peclet 수에 대해서도 수행되었고 Fig. 3의 $Pe = 100$ 과 비교하여 동일한 수준의 일치, 즉 기존 연구와의 일치 및 반무한 평판 결과와 유한영역 결과의 일치를 보였다. 참고로 $Pe = 500$ 의 결과를 Fig. 4에 제시하였다. 여기서 선분의 종류와 도형의 종류가 의미하는 바는 Fig. 3과 동일하다.

3.2 온도성층화

Fig. 3과 Fig. 4에서 축열조내 과도적인 온도분포를 보면, 초기 명확히 형성된 온도경계층 두께 즉 온도구배가 충전이 진행됨에 따라 완만히 증가하고 있음을 알 수 있다. 이는 시간의 경과에 따라 상층의 고온유체로부터 하층의 저온유체로 열확산이 누증되기 때문이며 적분근사해 결과에서 정량적으로 확인 가능하다. 적분근사해에서 온도경계층 두께는 $2a$ 로 정의하자. 기존연구에서는⁽⁶⁾ 무차원온도가 0.1에서 0.9사이의 값을 가지는 높이차로 정의하였으나, 적분해석에서는 온도경계층을 $\eta - a < \xi < \eta + a$

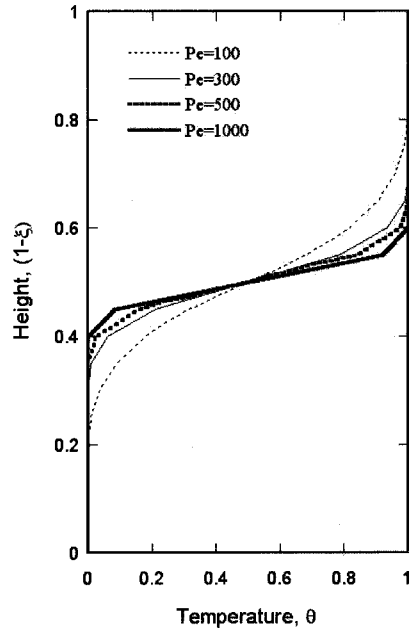


Fig. 5 Effect of the Peclet number on the vertical temperature profiles at a half of the turnover time.

로 정의하여 이 영역에서 온도분포를 가정하여 해석을 진행하였으므로 온도경계층 두께는 $2a$ 로 정의함이 합리적일 것이다. 따라서 온도 경계층 두께, 즉 $2\sqrt{24\tau}$ 는 시간의 제곱근에 비례하는 거동을 보인다. Fig. 3과 Fig. 4를 비교해보면 Pe 수가 커짐에 따라 온도분포는 계단형태로 접근하며 성층화는 현저히 발달되고 있음을 알 수 있다. 이는 Pe 수의 영향을 살펴본 Fig. 5에서 보다 명쾌하다. Pe 수가 크다는 것은 충전속도, 즉 유량이 크다는 것을 의미하므로 1회 충전시간이 단축되어 결과적으로 확산에 의한 열경계층이 성장할 시간이 줄어들어 열경계층이 얇아지게 된다. 동일한 충전 시간에 대해, 즉 $Pe \cdot Fo = \text{일정}$ 일 경우 열경계층 두께는 $1/\sqrt{U}$ 에 비례함을 알 수 있다.

하지만 온도경계층이 \sqrt{t} 에 비례하고 \sqrt{U} 에 반비례하는 거동을 보인다는 결과는 실험적 거동과는 일부 배치되는 측면이 있다. 일부 실험과 수치해석에서⁽⁶⁾ 유속이 증가하면 오히려 열성층이 저하되는 경우도 보고되고 있다. 이는 유속이 증가하면 유체혼합이 촉진되므로 유체혼합에 의한 열경계층 성장이 존재하기 때문이다. 즉, 유량이 작을수록 유체혼합은 작으나 충전 시간이 길어지므로 열확산이 커

지고, 유량이 커질수록 유체혼합은 커지나 충전시간이 짧아지므로 열확산이 작아진다. 따라서 성능을 최대화 하는 적당한 유량이 존재하리란 사실을 예측할 수 있다. 이러한 유체혼합은 디퓨저의 형상과 밀접한 관계가 있고 이에 대한 다수의 연구가 수행되었다.^(5,6) 해석해 측면에서도 완전혼합영역을 고려한⁽¹⁰⁾ 시도가 있었지만 수학적 난이도가 너무 높아서 접근이 어려운 측면이 있었다. 적분근사해 특성상 기존 해석해와는 달리 큰 수학적 어려움 없이 손쉽게 확장이 가능하므로 이에 대한 추후 연구가 수행될 것이다.

4. 결 론

1차원 모델로 근사화된 성층축열조를 해석대상으로 하여, 고온부와 저온부에서 각각 온도경계층이 형성되므로 온도분포를 Fermi-Dirac 분포함수 형태로 가정하고 적분근사해를 구하였다. 기존 해석해와 비교하여 매우 일치하는 결과를 보이며, 기존 해석해와 비교하여 결과를 얻기까지의 접근 간편성과 간단한 해석결과라는 차별성을 가진다.

반무한 평판 가정에 의한 적분근사해의 결과는 유한한 영역에 대한 해석 결과와 거의 일치한 결과를 보였으며, 온도 경계층 두께는 $2\sqrt{24\tau}$ 로 표현된다. 따라서 온도경계층 두께는 \sqrt{t} 에 비례하고 \sqrt{U} 에 반비례하는 거동을 보임을 알 수 있다.

성층축열조의 실제 거동을 보다 현실적으로 해석하기 위해서는 완전혼합영역을 고려한 연구가 수행되어야 할 필요성이 있으며, 적분근사해 특성상 기존 해석해와는 달리 큰 수학적 어려움 없이 손쉽게 확장이 가능하므로 이에 대한 추후 연구가 수행될 것이다.

후 기

이 논문은 2009년도 세종대학교 교내연구비 지원에 의한 논문임.

참고문헌

1. Dincer, I. and Rosen, M. A., 2002, Thermal Energy Storage, John Wiley and Sons, England.
2. Musser, A. and Bahnfleth, W. P., 1998, Evolution of temperature distributions in a full-scale stratified chilled-water storage tank with radial diffusers, ASHRAE Transactions : Re-

- search, Vol. 104, pp. 55-67.
3. Zurigat, Y. H., Liche, P. R., and Ghajar, A. J., 1991, Influence of inlet geometry on mixing in thermocline thermal energy storage, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 34, pp. 115-125.
4. Hollands, K. G. T. and Lightstone, M. F., 1989, A review of low-flow, stratified-tank solar water heating systems, Solar Energy, Vol. 43, pp. 97-105.
5. Chung, J. D., Park, J., and Cho, S. H., 2004, Effect of diffuser shape on the performance of water-chilled heat storage, Korean J. Air-Conditioning and Refrigeration Eng., Vol. 16, pp. 1077-1083.
6. Chung, J. D., Cho, S. H., Tae, C. S., and Yoo, H., 2008, The effect of diffuser configuration on thermal stratification in a rectangular storage tank, Renewable Energy, Vol. 33, pp. 2236-2245.
7. Musser, A. and Bahnfleth, W. P., 2001, Parametric study of charging inlet diffuser performance in stratified chilled water storage tanks with radial diffusers : Part 2-Dimensional analysis, parametric simulations and simplified model development, ASHRAE Transactions : Research, Vol. 107, pp. 41-58.
8. Zurigat, Y. H., Maloney, K. J., and Ghajar, A. J., 1989, A comparison study of one-dimensional models for stratified thermal storage tanks, Trans. ASME, J. of Solar Energy Engineering, Vol. 111, pp. 204-210.
9. Yoo, H. and Pak, E.-T., 1996, Analytical solutions to a one-dimensional finite-domain model for stratified thermal storage tanks, Solar Energy, Vol. 56, pp. 315-322.
10. Yoo, H., Pak, E. T., 1995, Theoretical analysis of the charging process with perfectly mixed region in stratified thermal storage tanks, Korean J. Air-Conditioning and Refrigeration Eng, Vol. 7, pp. 184-195.
11. Yoo, H., Kim, C.-J., and Kim, C. W., 1999, Approximate analytical solutions for stratified thermal storage under variable inlet temperature, Solar Energy, Vol. 66, pp. 47-56.