

## 위상구성행렬식을 이용한 비압축성 순환망 형태의 유로망 해석에 관한 연구

유 성 연, 김 범 신<sup>\*†</sup>

충남대학교 BK21 메카트로닉스사업단, \*한전전력연구원 수화력발전연구소

### A Study on the Analysis of Incompressible and Looped Flow Network Using Topological Constitutive Matrix Equation

Seong Yeon Yoo, Bum Shin Kim<sup>\*†</sup>

*BK21 Mechatronics Group at Chungnam National University, Daejeon 305-764, Korea*

*\*Power Generation Lab, Korea Power Research Institute, Daejeon 305-380, Korea*

*(Received May 12, 2010; revision received July 12, 2010)*

**ABSTRACT:** Topological matrix which reflects characteristics of network connectivity has been widely used in efficient solving for complicated flow network. Using topological matrix, one can easily define continuity at each node of flow network and make algorithm to automatically generate continuity equation of matrix form. In order to analyze flow network completely it is required to satisfy energy conservation in closed loops of flow network. Fundamental cycle retrieving algorithm based on graph theory automatically constructs energy conservation equation in closed loops. However, it is often accompanied by NP-complete problem. In addition, it always needs fundamental cycle retrieving procedure for every structural change of flow network. This paper proposes alternative mathematical method to analyze flow network without fundamental cycle retrieving algorithm. Consequently, the new mathematical method is expected to reduce solving time and prevent error occurrence by means of simplifying flow network analysis procedure.

**Key words:** Flow network(유로망), Topological matrix(위상행렬), Closed loop(폐회로), Linear pressure loss coefficient(선형압력손실계수), Topological constitutive matrix equation(위상구성행렬식)

#### 기 호 설 명

$c$  : 네트워크 기본회로 수  
 $K$  : 압력손실계수  
 $l$  : 네트워크 경로 수  
 $n$  : 네트워크 절점 수

$P$  : 네트워크 절점의 압력  
 $\Delta P$  : 네트워크 경로의 압력손실  
 $Q$  : 네트워크 경로의 유량  
 $S$  : 폐회로 수두손실합 계수행렬  
 $T$  : 네트워크 위상행렬

#### 상첨자

<sup>†</sup> Corresponding author

Tel.: +82-42-865-5615; fax: +82-42-865-5627

E-mail address: kimbs@kepri.re.kr

$I$  : 기본행렬

$t$  : 전치행렬

하첨자

$b$  : 경계

1. 서론

그래프 이론에 의하면 유로망은 방향성 있는 선과 점들이 연결된 그래프로 정의되며<sup>(1)</sup> 건축, 토목, 플랜트 등 산업 전 분야에서 광범위하고 다양하게 사용되는 각종 유체수송 및 분배 관로를 용이하게 나타낼 수 있는 수단일 뿐 아니라 복잡한 관로 구조물에 대한 지배방정식 구성을 간편하게 해주는 유용한 도구이다. 유로망의 선은 관로 및 유체의 유동 방향을 의미하고, 점은 선의 시작과 끝을 나타내는 동시에 관로와 관로가 연결되는 절점을 의미한다. 따라서 유로망은 대규모의 복잡한 배관망, 수로망 및 열공급망 등을 단순한 선과 점으로 구성된 직관적이고 단순한 형태로 도식이 가능하다.

유로망을 이용한 배관망 등 관로 구조물에 대한 해석은 1936년 Hardy Cross가 제안한 방법론<sup>(2)</sup>을 시작으로 컴퓨터를 이용한 계산기법의 발전을 통해 향상되어 왔다. 최근 널리 이용되고 있는 안정적이고 정확도가 높은 유로망 해석방법은 1972년 Wood와 Charles가 제안한 선형이론기법으로 비선형 지배방정식을 선형화할 수 있도록 하였다.<sup>(3)</sup> 그러나 선형이론기법은 유로망의 규모에 비례하여 증가하는 지배방정식의 수와 구조의 복잡성으로 인한 지배방정식 구성의 어려움에 대한 본질적인 문제점을 개선하지 못하였다.

위상행렬과 검색학(Heuristics)기반의 폐회로 검색기술은 유로망 해석의 지배방정식을 자동으로 구성할 수 있도록 하여 기본적인 선형이론기법에 비해 지배방정식을 단시간에 용이하게 구성할 수 있도록 하였다.<sup>(4,5)</sup> 그러나 폐회로 검색을 위해서는 별도의 프로그램이 추가되어야 하고 유로망 규모 및 복잡도의 증가에 따라 검색수행시간이 증가한다. 또한 유로망의 폐회로 구조가 비결정 다항식 완전(Non-deterministic Polynomial Complete) 문제에 해당하는 경우에는 검색시간이 유로망 내부 절점 수에 비례하여 지수적으로 증가하는 문제점<sup>(6)</sup>이 여전히 남아 있다.

최근 대규모의 복잡한 폐순환 유로망 해석을 지원하는 프로그램으로 가장 널리 사용되고 있는 프로그램은 Flowmaster와 Fluint 등으로 직관적인 그래픽 인터페이스를 통해 사용자가 쉽게 망을 모델

링할 수 있으며 모델에서 자동으로 지배방정식을 추출하고 안정적으로 해석을 수행하나 이 프로그램들은 매우 고가로 도입에 따른 경제적 부담이 적지 않다. 본 논문에서는 현재까지 가장 정확하다고 알려진 유로망 해석의 선형이론기법<sup>(7)</sup>에 의한 기존의 지배방정식 구조를 개선하여 폐회로 검색 없이 지배방정식을 구성할 수 있는 새로운 기법을 제안하고자 한다. 이를 통해 유로망 해석절차에서 폐회로 검색절차가 생략됨으로써 해석이 용이해지고 해석시간이 단축될 뿐만 아니라 개발에 많은 비용이 투자되는 그래픽 인터페이스를 표 형태의 간단한 텍스트 기반 인터페이스로 대체할 수 있어 고가의 프로그램을 도입하지 않고도 간단히 복잡한 대규모 유로망 해석을 수행할 수 있다.

2. 유로망 해석 기법

2.1 해석절차 및 지배방정식 구성

유로망의 형태는 Fig. 1과 같이 크게 분지망 형태의 유로망과 순환망 형태의 유로망으로 구분할 수 있다. 분지망 형태의 유로망은 하나의 유량원(Source)과 하나의 유량 싱크(Sink)간의 경로가 유일하기 때문에 절점에서 연속방정식이 만족되면 경로의 압력손실이 결정된다. 그러나 순환망 형태의 유로망은 하나의 유량원과 하나의 유량 싱크간에 다수의 경로가 존재하기 때문에 절점에 대한 연속방정식과 순환망을 구성하는 각 폐회로에 대한 에너지보존식

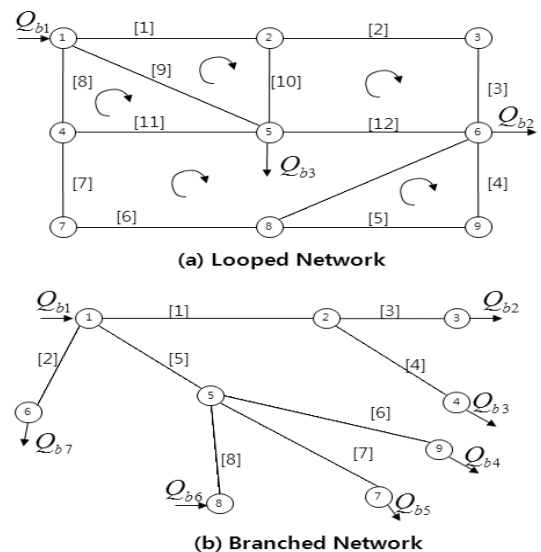


Fig. 1 The types of flow network.

이 만족되어야 한다.

따라서 순환망 형태의 유로망 해석을 위해서는 망 내부 절점에 대한 연속방정식과 망의 폐회로에 대한 에너지보존식을 수립하여야 한다. 이를 위해 먼저 실제 유로 구조물을 절점과 경로로 이루어진 Fig. 1 과 같은 그래프 형태의 유로망으로 추상화한 후, 추상화된 유로망에서 그래프 이론에 기반한 위상 행렬 구성 및 폐회로 검색 알고리즘을 이용하여 연속방정식과 에너지 보존방정식으로 구성된 지배방정식을 추출한다. 추출된 지배방정식은 지배방정식의 형태에 적합한 수치적 방법을 이용하여 계산된다.

유로망의 위상행렬은 절점과 경로의 연결정보에 의해 생성되며 절점에 대한 연속방정식을 간단히 알고리즘을 통해 자동으로 구성할 수 있다. 임의의 유로망의 절점수가  $n$ , 유로수가  $l$ 인 경우 위상행렬  $[T]$ 의 행수는  $n-1$ , 열수는  $l$ 로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[T] \in R^{n-1, l} \quad (1)$$

위상행렬  $[T]$ 의 각 열은 유로망 각 경로의 절점과의 연결관계를 나타낸다. 즉 경로의 시작절점과 같은 번호의 행에는 '1'을, 종결절점과 같은 번호의 행에는 '-1'을 지정하고 나머지 행에는 '0'을 지정한다. 위상행렬을 이용하면 절점에서의 연속방정식을 다음과 같이 간단히 형태로 나타낼 수 있다.

$$[T][Q] = [Q_b] \quad (2)$$

$$[Q]^t = [Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_l] \quad (3)$$

$$[Q_b]^t = [Q_{b1}, Q_{b2}, Q_{b3}, \dots, Q_{b(n-1)}] \quad (4)$$

위 식에서  $[Q]$ 는 경로에 대한 유량행렬로서 하첨자는 경로번호를 나타낸다.  $[Q_b]$ 는 절점에 대한 경계유량행렬로 Source나 Sink인 절점에서는 절점으로 유/출입 되는 유량을 요소값으로 갖고, 그 외의 절점에 대해서는 '0'을 값으로 갖는다. 경계유량행렬의 하첨자에 포함된 숫자는 절점을 나타낸다.

유로망 내부에 존재하는 폐순환 유로수는 그래프 이론의 기본회로(Fundamental Cycle)수  $c$ 와 일치하며 다음과 같이 정의된다.

$$c = l - n + 1 \quad (5)$$

그리고 유로 경로에서의 압력손실이 유량의 함수로 표현된다면 선형이론에 의해

$$\Delta P = K Q^m = K' Q \quad (6)$$

와 같이 나타낼 수 있으며 유로망의 폐회로를 검색하여 기본 폐회로에 대한 정보를 얻을 수 있다면 각 폐회로에 대한 압력손실의 합은 경로의 선형화 압력손실계수  $K'$ 과 경로의 유량  $Q$ 의 일차결합형태로 표현된다.

$$\sum \Delta P = [S][Q] = 0 \quad (7)$$

$$[S] \in R^{c, l} \quad (8)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 위 식에서  $[S]$ 는 유로망의 폐회로 수를 행 수로 갖고 경로 수를 열로 갖는 계수행렬로서 각 행에 폐회로와 관련된 경로의 정보를 포함한다. 즉 각 행은 폐회로를 구성하는 경로 번호와 일치하는 열 요소에 경로의 선형이론 압력손실계수  $K'$ 을 요소 값으로 가지며, 경로의 흐름방향이 폐회로의 순환방향과 일치하면 '1', 일치하지 않으면 '-1'을 열 요소에 곱해준다. 폐회로를 구성하는 경로요소와 관련이 없는 열 요소는 '0'을 값으로 갖는다. 위의 식(2)와 식(8)을 연립하면 다음과 같은 유로망에 대한 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} T \\ S \end{bmatrix} [Q] = \begin{bmatrix} Q_b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

## 2.2 위상구성행렬식

그래프이론에 따른 비결정다항식 완전 문제는 유로망의 모든 폐회로를 검색하기 전에 기본회로 수를 찾아낼 수 없는 특수한 유로망 구조로 현재 수천 개의 비결정다항식 완전 문제의 유로망 구조가 존재한다. 비결정다항식 완전 문제의 유로망 구조에서는 기본회로를 검색하는 시간이 유로망을 구성하는 절점수에 지수적으로 비례하여 증가한다. 따라서 어떤 폐회로 검색엔진을 사용하더라도 대규모의 복잡한 유로망 해석에는 어려움이 있다.

또한 비결정다항식 완전문제에 해당하지 않더라도 폐회로 검색엔진을 사용하여 기본회로를 선정하고 각 기본회로에 대한 에너지보존식을 수립하는

절차는 간단하지 않으며 유로망 구조의 변화가 발생할 때 마다 기본회로 추출과 에너지보존식 수립을 반복하는 것은 많은 노력과 시간을 필요로 한다. 본 논문에서는 기본회로 추출을 위한 폐회로 검색과 에너지보존식 수립을 간편하게 수행할 수 있는 새로운 수학적 접근법을 제시하고자 한다.

먼저 유로망의 폐회로 검색을 수행하지 않기 위해서는 폐회로에서 에너지보존식을 대신할 수 있는 관계를 정의하여야 한다. 위상행렬을 이용하면 각 절점의 압력과 경로의 압력손실간의 관계를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$[T]^t [P] = [\Delta P] \tag{10}$$

$$[P]^t = [P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}] \tag{11}$$

$$[\Delta P]^t = [\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3, \dots, \Delta P_l] \tag{12}$$

또한 식(6)을 행렬형태로 변환하여 표현하면

$$\begin{bmatrix} K'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K'_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K'_l \end{bmatrix} [Q] = [\Delta P] \tag{13}$$

와 같으며 이를 간단히 나타내면

$$[K'^t][Q] = [\Delta P] \tag{14}$$

와 같다. 위 식에서

$$[K'^t] = \begin{bmatrix} K'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K'_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K'_l \end{bmatrix} \tag{15}$$

이다. 따라서 식(10)에 식(14)를 대입하면

$$- [K'^t][Q] + [T]^t [P] = 0 \tag{16}$$

와 같은 관계식을 얻을 수 있으며 식(2)와 식(16)을 연립하면

$$\begin{bmatrix} -K'^t & T^t \\ T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_b \end{bmatrix} \tag{17}$$

와 같이 모든 유로망에 대해 연속방정식과 에너지보존식을 만족하는 지배방정식을 얻을 수 있다. 본 논문에서는 식(17)과 같은 유로망의 지배방정식을 위상구성행렬식이라 지칭하기로 한다. 식(17)은 유로망의 위상행렬과 선형압력손실계수 행렬을 이용하여 간단하게 나타낼 수 있으므로 폐회로 검색엔진이 필요 없으며 기본회로 추출과 에너지보존방정식 수립의 절차를 생략할 수 있다.

### 3. 해석 및 결과분석

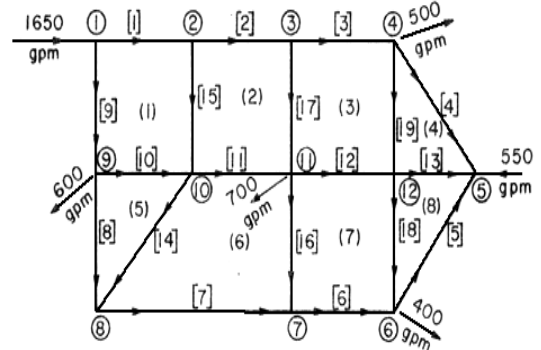
#### 3.1 해석대상 모델

본 논문에서 제안한 새로운 유로망 해석기법의 신뢰도와 성능을 확인하기 위하여 Wood가 선형이론 기법의 신뢰도와 성능을 확인하기 위해 사용한 Fig. 2와 같은 유로망 모델을 해석대상으로 하였다.<sup>(3)</sup> Table 1은 Fig. 2 모델의 상세한 형상자료와 표면조도를 나타낸 것이다.

동일한 대상 모델에 대해 상용 해석 프로그램의 정확도와 비교하기 위해 Flowmaster를 이용하여 Fig. 3과 같은 모델을 작성하여 Wood가 제시한 결과, Flowmaster의 해석결과 그리고 위상구성행렬식을 이용한 해석결과를 비교하였다.

#### 3.2 해석결과의 신뢰도 및 성능 분석

Wood는 선형이론기법의 성능을 기존 Hardy Cross 법, Newton Raphson법 및 Hardy Cross법과 Newton Raphson법을 결합한 Newton Cross법 등과 비교하기 위해 동일한 수렴오차(3%)에 대한 반복계



Pipe Number [ ] Junction Number ○  
Loop Number ( ) Flow Direction →

Fig. 2 Flow network model for algorithm test.

Table 1 Pipe dimension data for Fig. 2

No.	Dia.[m]	Length[m]	Roughness
1	0.305	457.2	130
2	0.203	304.8	130
3	0.203	305.8	120
4	0.203	609.6	120
5	0.203	853.4	120
6	0.203	335.3	120
7	0.203	304.8	120
8	0.203	762.0	120
9	0.203	243.8	100
10	0.152	396.2	100
11	0.152	304.8	100
12	0.254	335.3	130
13	0.254	304.8	130
14	0.152	548.6	120
15	0.152	335.3	120
16	0.152	548.6	120
17	0.254	365.9	130
18	0.152	548.6	120
19	0.152	396.2	120

Table 2 Comparison of algorithm performance

Method	No. of Iteration
Hardy Cross	645
Newton Cross	151
Newton Raphson	24
Linear Analysis	4
CTM	5
Flowmaster	48

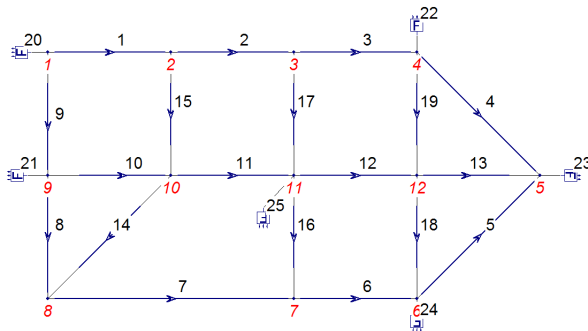
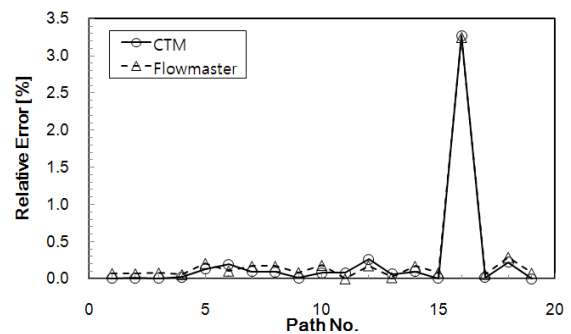


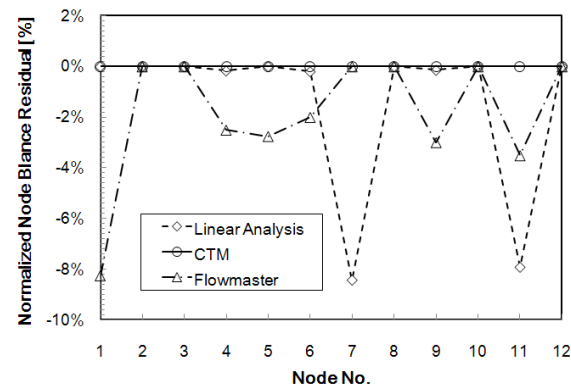
Fig. 3 Flowmaster model for Fig. 2.

산회수를 비교하여 Table 2와 같은 결과를 보고하였으며, 본 논문에서는 이 결과에 위상구성행렬식(CTM)법과 Flowmaster의 해석결과를 첨부하였다.

Table 2에서 위상구성행렬식(CTM)법을 제외한 방법들은 모두 절점에서의 연속방정식과 폐회로에서의 에너지보존식을 연립방정식으로 구성 후 이를 수치적 방법으로 계산한 것이므로 수동 또는 자동 폐회로 검색 절차가 추가된 것이다. Table 2의 결과를 살펴보면 위상구성행렬식(CTM)법은 폐회로 검



(a) Relative flow estimation error to linear analysis



(b) Normalized Node Balance Residual

Fig. 4 Comparison of analysis result.

색 없이 계산함에도 불구하고 가장 성능이 우수한 선형 이론기법(Linear Analysis)과 거의 차이가 없으며 상용 프로그램인 Flowmaster는 Hardy Cross 및 Newton Cross법 보다는 성능이 우수 했지만 Newton Raphson법보다도 성능이 떨어짐을 보였다.

Fig. 4는 선형화 이론기법(Linear Analysis), 위상구성 행렬식(CTM)법 및 Flowmaster의 해석결과를 나타낸 것이다. Fig. 4(a)는 선형화 이론기법의 유량 계산결과에 대한 위상구성 행렬법과 Flowmaster를 이용한 유량계산결과의 상대적 오차를 나타낸 것으로 16번 경로를 제외한 모든 경로에서 0.5% 이하의 매우 작은 상대오차를 보여주어 유량계산결과는 상

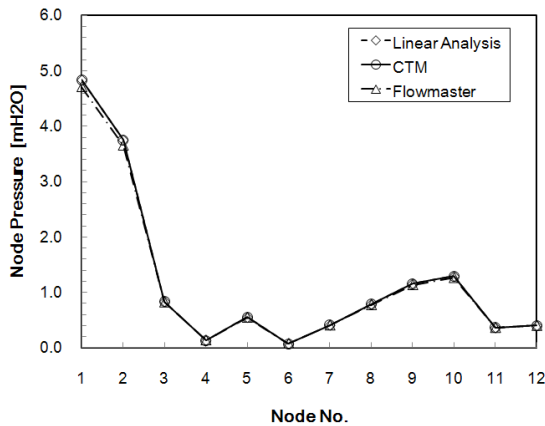


Fig. 5 Comparison of node pressure.

호 잘 일치함을 알 수 있다. 16번 경로에서 오차 값이 큰 것은 16번 경로를 흐르는 유량이 매우 작아 계산유량의 절대 차이는 크지 않지만 상대오차가 크게 나타난 것이다. Fig. 4(b)는 유로망 각 절점에서연속방정식에 대한 오차를 경로 유량 중 가장 작은 유량으로 정규화(Normalize)한 값을 나타낸 것으로 이상적인 경우 모든 절점에서 '0'을 나타내어야 한다. 그러나 위상구성행렬식법만이 모든 절점에서 고르게 '0'에 가까운 경향을 보였고 선형화이론기법과 Flowmaster는 일부 절점에서 상대적으로 큰 오차를 보여주었다.

Fig. 5는 유로망의 각 절점에서 압력을 비교한 것이다. 세 방법 모두 각 절점에서 거의 상호 일치하는 값을 나타내었으며 각 폐회로에서의 에너지보존식에 대해서도 모두 정확히 만족시켜 오차를 나타내지 않았다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 일반적인 유로망 해석 절차와 최근 널리 이용되고 있는 위상 행렬과 폐회로 검색엔진에 의한 유로망 해석 기법에 대해 알아보았으며 폐회로 검색엔진의 사용에 비결정다항식 완전 문제와 유로망 구조 수정 시 지배방정식 구성을 위해 매번 폐회로를 검색해야 하는 어려움에 대해 살펴보았다. 이러한 어려움을 해결하기 위해 본 논문에서는

- 위상 행렬과 그 전치행렬 및 선형화압력손실계수 행렬을 이용한 위상구성행렬식을 제안하여

- 폐회로 검색 절차를 생략할 수 있게 되어 비결정다항식 완전 문제에서 벗어날 수 있었으며
- 유로망 구조 수정 시 간단한 모델수정만으로 해석을 수행할 수 있도록 하였다.

또한 본 논문에서는 기존 해석 알고리즘 및 상용 해석 프로그램인 Flowmaster와 성능 및 해석결과의 정확도 비교를 통해 본 논문에서 제시한 위상구성행렬식법이 성능면에서는 현재까지 가장 성능이 우수하다고 알려진 선형화 이론 기법과 동등하였으며 Flowmaster보다는 뛰어난 것을 보였고, 유량예측의 정확도는 다른 모든 방법들보다 뛰어난 것을 보였다. 따라서 본 논문에서 제시한 위상구성행렬식법이 해석 절차를 간편화하면서도 성능과 정확도면에서도 우수한 기법임을 확인할 수 있었다.

#### 참고문헌

1. WIKIPEDIA, [http://en.wikipedia.org/wiki/Flow\\_network](http://en.wikipedia.org/wiki/Flow_network).
2. Hardy Cross, 1936, Analysis of flow in networks of conduits or conductors, University of Illinois bulletin, Vol. XXXIV No. 22.
3. Don J. W. and Carl O. A. Charles, 1972, Hydraulic network analysis with linear theory, Journal of Hydraulic Division Proceedings of ASCE, pp. 1157-1170.
4. Ma, Z., Jeter, S. M., and Abdel-Khalik, S. I., 2002, Flow network analysis application in fuel cells, Journal of Power Sources 4708, pp. 1-7.
5. Kailash Jha, 2007, Automatic minimal loop extraction and initialization for water pipe network analysis, International Journal of Simulation, Vol. 8, No. 2, pp. 8-19.
6. Stephen A. C., 1971, The complexity of theorem-proving procedures, In STOC '71 : Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing, pp. 151-158.
7. Mohtar, R. H., Bralts, V. F., Shayya, and W. H., 1991, A finite element model for the analysis and optimization of pipe networks, ASAE, Vol. 34, No. 2, pp. 393-401.