

곱셈과 나눗셈 기호의 생략 규칙 학습을 위한 카드 게임의 고안과 활용¹⁾

도종훈²⁾ · 허선희³⁾

문자식을 다루는 과정에서 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하는 규칙은 하나의 약속이며, 생략된 기호를 비르게 인식하고 있어야 주어진 문지식의 의미를 제대로 이해할 수 있다. 그러나 대다수의 학생들은 이러한 규칙의 학습 과정을 지루해 하고 재미 없어 하며 그 중요성을 간과하는 경우가 많다. 이에 본 연구에서는 학생들이 문자식의 단순화 과정, 즉 곱셈 기호와 나눗셈 기호의 생략 과정을 재미있게 학습하도록 하기 위한 방안으로 카드 게임을 고안하고, 이를 활용한 수업을 시행하여 그 효과와 의의를 분석하였다. 그 결과 본 연구에서 고안한 카드 게임이 학생들의 학습 흥미와 동기를 유발하는 효과가 있음을 관찰할 수 있었다. 그리고 카드 게임을 시행하는 동안 학생들 간의 협력 학습이 자발적으로 이루어졌고, 기호 생략 규칙에 관한 학생들의 오류 및 오개념이 즉각적으로 확인되고 교정되었으며, 연산 기호를 생략하는 과정 뿐 아니라 그 역과정을 학생들이 자연스럽게 경험할 수 있음을 확인하였다.

주요용어 : 카드 게임, 곱셈 기호, 나눗셈 기호

I. 머리말

16세기 이후 본격적으로 사용된 문자식은 숫자와 문자를 계산 기호, 관계 기호, 또는 괄호와 결합시켜 수학적인 관계를 나타내는 식으로서 학교 수학에서 다항식, 분수식, 방정식, 부등식, 각종 공식과 계산 법칙 등 여러 가지로 표현되어 다루어지고 있다. 문자와 기호는 문제 상황을 수학적으로 간단하게 표현할 뿐 아니라 수학적 의사소통에 필요한 언어의 역할을 한다. 문자와 식에 관한 학습을 통하여 학생들은 일상생활에서 일어나는 현상을 일반화하고 이를 식으로 나타낼 수 있게 된다. 또한 문제를 이해하고 적당한 문자를 사용하여 문제의 뜻에 맞는 식을 세울 수 있다면 대부분의 경우 그 다음부터는 기계적인 계산이 가능하게 되고, 계산 과정에 착오만 없다면 답을 정확하게 이끌어낼 수 있게 되므로 문자를 사용한 식(세우기)은 강력한 수학적 문제해결 전략이 될 수 있다(교육과학기술부, 2008). 이처럼 문자를 사용하는 식의 취급은 중등 수학의 기초로 중요할 뿐 아니라 수학의 언어로서 다른 제

1) 이 논문은 도종훈·허선희(2009)를 수정, 보완하여 재구성한 것임.
2) 서원대학교 (jhoondo@seowon.ac.kr)
3) 신탄중앙중학교 (hsunny95@hanmail.net)

분야 수학 학습의 기초가 된다.

그 중에서 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하는 규칙의 학습은 그 자체로 수학적 개념이나 원리, 법칙의 이해 과정이라기보다는 수학 일반이 약속한 규칙을 숙달하여 익숙해지도록 하는 과정으로, 한글 자모를 익히고 맞춤법을 익히는 것과 마찬가지로 이후 문자식이 관련되는 수학적 개념의 교수-학습에서 기초가 되는 내용이라 할 수 있다. 학생들은 규칙에 익숙해져야 하고, 주어진 식에서 생략된 기호가 무엇인지를 올바르게 인식해야 그 식의 의미를 제대로 파악할 수가 있게 된다. 그러나 실제 수업에서 이러한 규칙의 학습은 매우 단순하고 지루하게 인식되어 교사나 학생들이 그 중요성을 간과하는 경우가 많고, 이로 인해 많은 학생들이 문자식을 처리하는 과정에서 오류를 범하는 경우가 종종 발생한다. 문자식 학습에서 어려움을 겪은 학생들은 수학을 어렵고 지루한 과목으로 인식하고 이후 방정식, 함수 등의 학습에서 지속적으로 어려움을 느끼게 된다(우정호, 1998).

그러므로 이러한 규칙을 시도하는 데 있어 중요하게 고려해야 할 점은 학생들이 최대한 뇌 지루해하고 재미를 느끼면서 자발적으로 규칙을 익히고 숙달하도록 도울 수 있는 방안을 어떻게 마련할 것인가 하는 점이다. 이러한 면에서 게임을 활용한 수업을 고려해 볼 수 있다. 딘즈(Z. P. Dienes)는 게임이 수학적 개념 형성에 도움이 된다고 보고 학생들이 수학적 개념을 구성해가는 각 단계에서 준비 게임, 구조화된 게임, 연습 게임 등을 적극 활용할 것을 주장하였다. 또한 잘 설계된 게임은 학생들의 흥미를 유발하고 학생들이 수업에 자발적이고 능동적으로 참여하도록 유도하는 장점을 지니는 것으로 알려져 있다(NCTM, 1992). 이러한 이유로 통상적인 초, 중등학교에서의 수학 학습뿐 아니라 창의성 신장을 위한 교육이나 수학영재교육에서 여러 가지 형태의 게임을 활용하려는 국내 연구자들의 다양한 시도와 연구들이 꾸준히 있어 왔다(강문봉, 2000; 공병숙, 1999; 김나영, 1998; 김부윤·이지성, 2007; 류창우·송영부, 2009; 박두연, 1993; 이용률·강문봉, 1996; 정문자, 2005).

본 연구에서는 문자식의 단순화 과정, 즉 곱셈 기호와 나눗셈 기호의 생략 과정을 학생들이 보다 재미있게 학습하도록 하기 위한 방안으로 카드 게임을 고안하고, 이를 활용한 수업을 시행하여 그 효과와 의의를 분석하고자 한다.

II. 이론적 배경

수학의 역사에서 문자나 기호가 언제부터 사용되었는지 정확하게 알기는 어렵지만, 수학사 관련 문헌이나 수학 용어와 기호에 관한 문헌을 통해 문자식에서 사용되는 문자와 각종 기호의 유래와 역사를 대략적으로 파악할 수 있다(Boyer & Merzbach, 1991; Derbyshire, 2007; Eves, 1983; 박교식, 2004). 이들 문헌에 따르면 문자가 약어적 표현으로서 처음 사용된 수학 저술은 디오판토스의 저서 산술 6권이고, 문자를 대수적으로 취급하기 시작한 것은 프랑스의 수학자 비에트 이후인 것으로 알려져 있다. 비에트는 1591년 그의 저서 해석학입문에서 미지의 양을 나타낼 때에는 모음을, 기지의 양을 나타낼 때에는 자음을 이용하는 예를 소개하였고, 이를 계기로 미지수는 물론 기지수에 대해서도 같은 형식의 계산을 할 수 있어서 일반적인 대수적 표현을 얻는 것이 가능하게 되었다. 문자 기호를 사용하는 방법은 그 후 데카르트에 의하여 거의 완성되었는데, 데카르트는 자신의 저서 기하학에서 미지수는 문자 x, y, z, \dots 를, 기지수에는 문자 a, b, c, \dots 를 사용하였고 이는 오늘날까지 이어지고 있다. 한편, 덧셈과 뺄셈을 표현하기 위해 사용되는 $+$, $-$ 의 기호는 1489년 비트만이 처음으로

사용하였으나, 그는 '+'는 과다, '-'는 부족의 의미로 사용하였고, 덧셈과 뺄셈 기호로서의 +, - 기호는 1514년 네덜란드의 반더호크가 처음 사용한 것으로 알려져 있다. 곱셈 기호 \times 는 1631년 영국의 수학자 오프레드가 그의 저서 수학의 열쇠에서 처음 사용하였고, 곱셈 기호 \times 대신에 \cdot 를 사용한 것은 독일의 천문학자 레기오모타누스인 것으로 알려져 있다. 이 기호는 19세기에 들어와서부터 널리 사용되었다. 나눗셈 기호 \div 는 1659년 독일의 란의 대수책에서 처음 사용되었고 일반에게 널리 사용되기 시작한 것은 영국의 펠 이후이다. 등호 $=$ 는 1557년 영국의 레코드가 그의 저서 지혜의 숫돌에서 두 개의 평행선만큼 세상에서 같은 것은 없을 것이라는 설명을 붙여서 처음 사용하였다. 그 밖에 부등호 '<'와 '>'은 영국의 수학자 해리엇의 사후 10년이 되는 해인 1631년 발행된 그의 저서 해석학연습에서 처음 사용된 것으로 알려져 있다.

우리나라 수학과 교육과정에서 문자가 처음 사용되는 것은 초등학교 6학년의 규칙성과 문제해결 영역으로 여기서 분자를 사용한 방정식이 도입된다. 그 후 중학교 1학년에서 문자를 이용하여 여러 가지 현상을 식으로 나타내고 식의 값을 구하며, 등식의 성질을 이용하여 일차방정식을 해결하는 내용을 다룬다. 중학교 2학년에서는 다항식의 사칙계산, 지수법칙, 곱셈 공식, 간단한 등식의 변형, 미지수가 2개인 일차방정식과 연립일차방정식, 일차부동식과 연립일차부동식을 다루고, 3학년에서는 인수분해와 이차방정식의 개념과 활용을 학습하게 된다(교육인적자원부, 2007). 특히 중학교 1학년 과정에서 문자를 사용하여 식을 간단히 나타내고 이 과정에서 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하는 규칙을 학습하게 되는데, 이와 관련된 구체적인 학습내용을 살펴보면 다음과 같다(교육과학기술부, 2008).

- ① 문자를 사용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.
 - 생활 주변에서 관찰되는 수학적 상황을 문자를 사용한 식으로 표현하게 한다. 문자를 사용하여 생활 주변에서 관찰되는 상황을 식으로 나타내게 한다. 식으로 표현할 때에는 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하는 것이 편리함을 알게 하고, 이러한 표현에 익숙해지도록 한다.
 - 수와 문자의 곱에서는 곱셈 기호를 생략하고 수를 문자 앞에 쓴다.
 - 문자와 문자의 곱에서는 곱셈 기호를 생략한다.
 - 같은 문자의 곱은 지수를 사용하여 거듭제곱으로 나타낸다.
 - 1이나 -1 과 문자의 곱에서는 1을 생략한다.
 - $0.1 \times a$ 는 $0.a$ 이 아니라 $0.1a$ 로 쓴다.
 - 괄호가 있는 식과 수, 또는 괄호가 있는 식과 문자의 곱에서는 곱셈 기호 \times 를 생략하고, 수는 괄호 앞에 쓴다.
 - 나눗셈 기호 \div 는 생략하여 분수의 꼴로 나타낸다.

Wagner(1983)는 학생들이 문자를 쉽게 사용하기는 하지만 이해하기 어렵게 만드는 몇 가지 요인을 분석하였는데, 문자는 숫자와 유사한 성질을 가지고 일상 언어와도 유사한 성질을 가지고 있지만 여전히 그 자체만의 독특한 성질을 가지고 있다는 것이다(김남희, 1998, 재인용). 그에 의하면 문자만이 갖는 독특한 성질은 수학 언어에 일반성, 유연성, 정확성을 부여하는 것으로서 학생들이 수학의 내용을 학습해 나감에 따라 점점 더 다양하고 더 강력한 방식으로 문자를 다룰 수 있기 위해서는 수학 언어로서 문자가 갖는 독특한 성질에 대한 이해가 필수적이라는 것이다. 여기서 수학언어로서 사용되는 문자가 일반성을 갖는다는 것은 다음의 두 가지로 설명 가능하다. 첫째는 문자와 숫자의 차이점을 나타내는 것으로 숫자

는 단일한 하나의 수를 표현하지만 문자는 동시에 많은 수를 표현할 수 있다는 것이다. 이를 문자가 갖는 동시 표현의 성질이라고 부른다. 둘째는 문자와 일상 언어와의 차이점을 나타내는 것으로 문자는 일상 언어와는 달리 특정 문자가 나타내는 범위의 한계를 자유롭게 결정할 수 있다는 것이다. 이를 문자가 갖는 한계 결정의 자유성이라고 부른다. 한편, 수학에서는 주어진 대상을 지칭하기 위해서 거의 아무 것이나 임의로 문자를 선택할 자유가 있는데 이를 문자 선택의 자유성이라고 부른다. 수학에서 주어진 임의의 대상을 표현하기 위하여 자유롭게 교환할 수 있는 많은 종류의 문자가 있다는 사실은 문자 변화가 반드시 그것이 나타내는 대상의 변화를 수반하는 것은 아님을 의미하는 것이다.

중학교 1학년 이후 학생들이 방정식과 부등식, 함수 등 문자식과 관련된 수학적 개념 학습에서 겪는 어려움 중 상당부분은 일상 언어나 숫자와는 다른 문자의 고유한 특성에 대한 이해의 부족과 관련되어 있다(Booth, 1988; 김남희, 1997, 1998). 예를 들어 $y=3x$ 와 $s=3t$ 를 서로 다른 식 또는 다른 함수로 인식하는 학생들이 있는데, 이는 문자 사용의 유연성에 대한 이해가 결여된 경우로서 학생들은 변수를 표시하는 기호가 변화하면 변수가 나타내는 대상도 변화한다고 생각하는 경향이 있다는 것이다. 다른 예로 $a+b=b+a$ 에서 문자 a, b 가 임의의 수를 나타낸다는 것을 이해하지 못하는 경우가 있는데, 이는 문자 사용의 일반성에 대한 이해가 결여된 경우라고 볼 수 있다. 많은 학생들이 변수를 $x+2=5$ 에서의 x 처럼 방정식에서 특정한 값을 대신하는 문자로 생각하는 경향이 있고, 임의의 양이나 수를 나타내기 위해 사용된 문자를 변수로 생각하는 것에는 익숙하지 않다는 것이다. 그 밖에도 문자식을 처리하는 과정에서 계산 기호의 생략 규칙과 문자가 포함된 식의 계산 방법 등에 대한 부정확한 이해로 인해 학생들이 다양한 형태의 오류를 범하거나 오개념을 지니는 경우가 있다. 이와 관련하여 $a \times a \times a \times a = 4a$, $a+a+a=a^3$, $2a+a=2a^2$, $2a+3=5a$ 등은 이미 널리 알려진 오류 사례이다. 이러한 오류 사례들은 곱셈 기호의 생략 규칙과 문자가 포함된 식의 덧셈을 혼동하거나 주어진 식을 계산해야 한다는 생각에 무리하게 식을 간단히 하는 과정에서 나타난다. 이러한 오류나 오개념을 방지하기 위해서는 문자식을 도입하고 사용하면서 문자 사용의 일반성과 유연성을 인식할 수 있는 다양한 예와 설명을 포함하는 지도 방안과 더불어 문자식의 취급과 관련된 규칙, 이를테면 곱셈 기호와 나눗셈 기호의 생략 규칙 등에 학생들이 보다 친숙해지도록 하는 방안이 마련될 필요가 있다.

III. 연구 내용 및 결과

이 장에서는 문자식의 계산 과정에서 곱셈 기호와 나눗셈 기호의 생략 규칙에 학생들이 보다 친숙해지고 이를 통해 문자식의 단순화 과정을 보다 재미있게 학습하도록 하기 위해 연구자들이 고안한 카드 게임의 제작 배경, 방법과 절차 및 게임 규칙을 살펴보고, 이를 활용한 수업 및 그 결과를 살펴본다.

1. 카드 게임의 고안 배경

연구자들이 본 연구에서 고안한 카드 게임을 처음 착안한 것은 동물과 동물의 피부(모양과 색)를 짝짓는 유아용 카드 게임을 통해서였다.⁴⁾ 이 게임은 전체와 부분을 알아보는 게임

4) 연구자들은 이 카드 게임을 어린이집에 다니는 연구자의 딸(당시 7세)을 통해 처음 접하게 되었는데

인데, 길쭉한 직사각형 모양의 카드가 반으로 나누어져서 한 쪽에는 어떤 동물의 전체 모양이 그려져 있고, 다른 한 쪽에는 다른 동물의 피부가 확대되어 그려져 있었다. 게임 방법은 간단했다. 먼저 여러 장의 카드를 게임하는 사람들이 똑같이 나누어 갖고 가위 바위 보를 하여 먼저 시작할 사람을 정하였다. 처음 시작하는 사람이 먼저 어떤 카드를 내면 그 다음 사람은 자신이 가진 카드 중에서 처음 낸 카드에 나와 있는 동물과 동물의 피부를 보고 그와 짝이 될 수 있는 동물의 피부와 동물의 전체 모양이 그려진 카드를 찾아 그 옆에 이어 붙이면 된다. 만약 짝이 될 수 있는 카드를 가지고 있지 않거나 짝이 될 수 있는 카드가 있음에도 짝이 된다는 것을 인식하지 못하면 다음 사람에게 순서가 넘어간다. 이런 과정을 반복하여 가장 먼저 자신의 카드를 없애는 사람이 이기는 게임이었다. 처음에는 별다른 기대를 하지 않고 아이들과 동물 이름을 말하며 게임을 시작했는데, 단순해 보였던 이 게임이 의외로 흥미롭게 느껴졌고 아이들 역시 매우 재미있어 하였다.⁵⁾ 이는 게임 규칙이 간단하고 각각의 게임이 금방 끝나기 때문에 게임이 지루하지 않고, 매 게임마다 승자와 패자가 정해져 개인의 승부욕을 자극하며, 또한 승패가 꼭 나이나 지식 성도에 의해 결정되는 것만은 아니어서 게임에 참여하는 어른과 어린 아이들이 모두 적극적으로 게임에 참여할 수 있었기 때문인 것으로 보인다.

한편, 그 당시 연구자(중 한 명)는 중학교 1학년 학생들에게 문자와 식 단원을 가르치고 있었는데, 그 중 곱셈과 나눗셈 기호 생략에 관한 내용은 기호의 생략 규칙을 익히고 숙달해야 하는 부분으로 연구자의 경우 그동안은 주로 규칙 설명과 연습문제 풀이 위주로 수업을 진행해 왔었다. 그러나 문자의 사용에 아직 익숙하지 않은 학생들은 문자 사용 자체에 다소 거부감을 가지고 있고, 더구나 교사의 설명 위주로 수업을 진행할 경우 수업 자체를 매우 지루해하고 어려워하였다. 이런 이유로 연구자는 어떻게 하면 이 수업을 재미있게 진행할 수 있을까를 고민하고 있던 상황이었고, 이때 앞서 살펴본 유아용 게임에서 동물들을 짝짓는 대신 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하기 전의 문자식과 생략하고 난 후의 문자식을 서로 짝짓는 형태로 게임을 변형하면 좋겠다는 생각을 하게 되었다.

이 경우 원래 게임과 마찬가지로 게임 규칙이 간단할 뿐 아니라 승패를 이용하여 학생들의 동기를 유발할 수 있고, 더구나 승패가 꼭 문자식을 다루는 능력에만 의존하지는 않아서 수학을 싫어하고 어려워하는 학생도 적극적으로 참여할 수 있으리라는 생각을 하였다. 특히 그 이후에 학습하게 되는 식의 값 단원 즉, 문자식의 문자에 수를 대입하여 문자식의 값을 계산하는 내용을 다루는 단원에서는 생략된 기호를 정확하게 파악하고 되살려 계산을 할 수 있도록 지도해야 하는데, 연구자들이 고안한 게임의 경우 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하는 과정 뿐 아니라 생략된 기호를 되살리는 과정 또한 익힐 수 있다는 면에서 더욱 유용하리라는 생각을 하였다.

2. 게임용 카드의 제작

게임용 카드는 A4 용지로 제작하였다. 길쭉한 직사각형 모양의 카드를 반으로 나누어 한

데, 당시 그 어린이집에서는 가족과 함께할 수 있는 게임을 매달 한 두 번씩 보내 주었다. 이러한 게임들은 어린이집에서 사용하는 학습 교재의 일부인 듯한데, 대부분 간단하게 오리거나 잘라서 할 수 있는 것으로 어린 아이들도 어렵지 않게 즐길 수 있도록 고안되어 있었다.

5) 실제로 게임 규칙이 어렵지 않고 단순하여 5세 딸아이도 함께 참여하여 즐겁게 게임을 즐길 수 있었다.

곱셈과 나눗셈 기호의 생략 규칙 학습을 위한 카드 게임의 교안과 활용

쪽에는 곱셈 기호나 나눗셈 기호가 생략된 식을 다른 한 쪽에는 기호가 생략되기 전 식을 적었다. 카드에 적힌 문자식은 교과서 연습문제로 제시된 것을 활용하였다. A4 용지 한 장으로 5장의 카드를 만들었고, 이런 식으로 A4 용지 6매를 이용하여 총 30장의 카드를 만든 후 잘라서 코팅하였다. <그림 1>은 A4 용지 6매에 30장의 카드를 그려 놓은 것으로 카드를 자르기 전의 상태를 나타낸 것이다. 실제 수업에서는 학생들의 흥미를 위해 색지를 사용했고 한 쌍의 카드는 같은 색을 사용해 혹시 섞여서 찾기 어려워지는 상황을 예방했다.

$\frac{ab}{b+c}$	$a \times a \times 2 \times b$	x^2y	$(-7) \times a + b \times 8$	$3(a+2)$	$(b+c) \times x$
$2a^2b$	$2 \times a + b \times 3$	$-7a+8b$	$b \times (a+2)$	$(b+c)x$	$(2a+b) \times \frac{1}{2}$
$2a+3b$	$a \times (-3)$	$b(a+2)$	$(a+b) \times 3$	$\frac{1}{2}(2a+b)$	$(a-3) \times (-1)$
$-3a$	$x \times (-1) \times y$	$3(a+b)$	$(a-b) \times c$	$-(a-3)$	$(-2) \div a$
$-xy$	$x \times y \times x$	$(a-b)c$	$3 \times (a+2)$	$-\frac{2}{a}$	$(a+b) \div 3$
$\frac{a+b}{3}$	$x \div (-y)$	$\frac{ab}{c}$	$a \div b \div c$	$10y - \frac{5}{x}$	$a \times (-2) \times b$
$-\frac{x}{y}$	$(a-b) \div 2$	$\frac{a}{bc}$	$x \times \frac{5}{8}$	$-2ab$	$a \div 2 \div b$
$\frac{a-b}{2}$	$x \div (y+1)$	$\frac{5}{8}x$	$b \times 5 \times a$	$\frac{a}{2b}$	$a-b \times c$
$\frac{x}{y+1}$	$a \div 2 - b \div 3$	$5ab$	$5-2 \times a$	$a-bc$	$x+y \div 2$
$\frac{a}{2} - \frac{b}{3}$	$a \times b \div c$	$5-2a$	$y \times 10 - 5 \div x$	$x + \frac{y}{2}$	$a \times b \div (b+c)$

<그림 1> 게임용 카드(30장)의 예

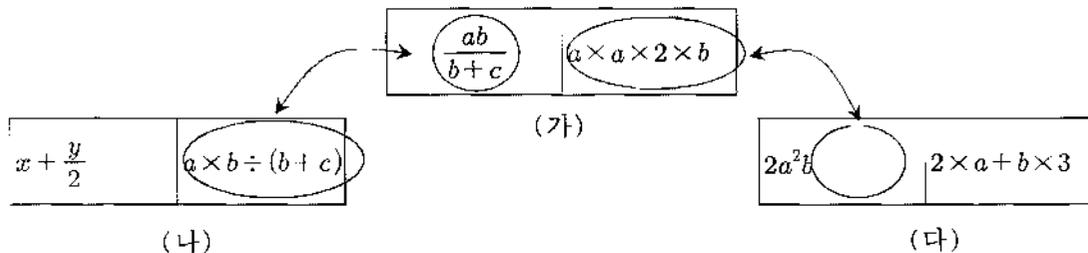
30장의 카드를 이용하여 게임을 할 경우 6명이 한 조(1명이 5장씩의 카드를 나누어 가짐)가 되어 게임을 할 수도 있고, 5명이 한 조(1명이 6장씩의 카드를 나누어 가짐)가 되어 게임을 할 수도 있으며, 3명이 한 조(1명이 10장씩의 카드를 나누어 가짐)가 되어 게임을 할 수도 있다. 게임 규칙은 다음과 같다.

<게임 진행 규칙>

- ① 카드를 똑같이 나누어 갖는다.
- ② '가위바위보'로 카드를 내는 순서를 결정한다.

- ③ 맨 처음 사람이 자신이 가지고 있는 카드 중에서 한 장을 낸다.
- ④ 두 번째 순서인 사람은 앞 사람이 낸 카드와 같은 식이 적힌 카드(이들테면, 앞사람이 낸 카드에 적힌 문자식에서 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략해 보고 자신이 가지고 있는 카드 중에서 그 결과가 적힌 카드)를 앞 사람 카드와 연이어 붙여 놓는다. 같은 식이 적힌 카드가 없다고 판단되면 “통과(혹은 pass)”라고 외치고, 다음 차례의 학생이 같은 과정을 반복한다.
- ⑤ 이런 식으로 진행하여 가장 먼저 카드가 없어진 사람이 1등이 된다.
- ⑥ 5명이 게임을 한다고 했을 때 5등인 학생은 맨 마지막에 30번째에 해당하는 카드를 이어 붙이게 된다. 이때 이어 붙여진 30장의 카드 중에서 가장 왼쪽에 위치한 카드의 왼쪽에 쓰인 식은 가장 오른쪽에 위치한 카드의 오른쪽에 쓰인 식에서 곱셈과 나눗셈 기호를 생략하여 얻을 수 있는 식이어야 한다.

예를 들어, 맨 처음 학생이 <그림 2>의 (가)에 해당하는 카드를 냈다고 하자. 이 카드의 왼쪽에는 문자식 $\frac{ab}{b+c}$ 가 적혀 있고 오른쪽에 $a \times a \times 2 \times b$ 가 적혀 있으므로 이 카드와 연이어 붙일 수 있는 카드는 문자식 $\frac{ab}{b+c}$ 에서 곱셈 기호와 나눗셈 기호가 생략되기 이전의 식인 ‘문자식 $a \times b \div (b+c)$ 가 오른쪽에 적힌 카드(그림 2의 (나))’나 문자식 $a \times a \times 2 \times b$ 에서 곱셈 기호를 생략한 ‘문자식 $2a^2b$ 가 왼쪽에 적혀 있는 카드(그림 2의 (다))’이다.



<그림 2> 연이어 붙일 수 있는 카드의 예

그러므로 두 번째 학생은 자신이 가지고 있는 카드 중에서 <그림 2>의 (나) 혹은 (다)에 해당하는 카드를 찾아 (가)에 해당하는 카드의 왼쪽이나 오른쪽에 연이어 붙여 놓으면 된다. 이때 (가)의 왼쪽에 (나)를 연이어 붙이는 경우, (가)의 오른쪽에 (다)를 연이어 붙이는 경우, 그리고 (가)의 왼쪽과 오른쪽에 각각 (나)와 (다)를 동시에 연이어 붙이는 경우가 가능하다. 그러나 자신이 가지고 있는 카드 중에서 (나)와 (다)에 해당하는 카드가 없는 경우, 그리고 카드가 있음에도 곱셈과 나눗셈 기호를 바르게 생략하지 못하거나 생략된 식을 보고 생략되기 이전의 식을 찾지 못한 경우에는 그 다음 사람에게 기회가 넘어가게 된다. 그러므로 이 게임에서 이기려면 문자식, 이를테면 $a \times b \div (b+c)$ 를 보고 그 식에서 나눗셈 기호와 곱셈 기호를 생략하여 간단히 한 식이 무엇인지 즉, $\frac{ab}{b+c}$ 임을 알아야 할 뿐 아니라 역으로 식 $\frac{ab}{b+c}$ 을 보고 이 식이 $a \times b \div (b+c)$ 와 같은 식임을 파악할 수도 있어야 한다.

3. 카드 게임을 이용한 수업의 실행 및 결과

(1) 수업 실행 방법 및 절차

본 연구에서 고안한 카드 게임을 활용한 수업에 참여한 학생들은 연구자(중 한 명)가 근무하는 대전광역시 소재 S중학교의 1학년 1개 반 학생 37명이다. S중학교는 남녀공학인 형태의 학교이지만 남학생반과 여학생반이 분리되어 있고, 본 연구에 참여한 학급은 남학생으로 구성된 학급이다.

수업은 규칙 설명으로 시작되었는데, 기존의 통상적인 수업에서의 연습문제 풀이 시간을 게임 시간으로 대체하였다. 게임 규칙을 최대한 자세하게 설명한 후 학생들이 게임을 하며 참고할 수 있도록 흔히 범할 수 있는 오류와 함께 게임 규칙을 칠판에 적어 주었다. 그리고 학생들에게 배부하는 유인물에도 게임 규칙을 적어두었다. 이처럼 실제 몇 개의 카드를 칠판에 그리며 게임 방법을 충분히 설명한 후, 게임용 카드를 나누어주고 학생들이 각 조별로 게임을 하도록 지도하였다. 각 조는 5-6명으로 구성되었다. 게임 도중 어려움이 생기면 연구자로부터 도움을 받을 수 있음을 알려주고, 문자식을 간단히 하는 규칙을 학습하는데 게임의 목적이 있음을 강조하여 학생들 사이에 지나친 경쟁심이 유발되지 않도록 하였다. 20분 정도의 게임 시간이 주어졌는데 각 학생이(5명 한 조인 경우) 6장의 카드를 내면 되므로 게임에 소요되는 시간이 많지 않아 여러 번 게임을 진행할 수 있었다. 연구자는 학생들이 게임을 하는 동안 교실을 돌아다니며 학생들의 질문에 대해 답하거나 게임 진행을 도와주면서 학생들의 활동 과정을 관찰하였고, 관찰 결과를 필드 노트에 기록하였다.

(2) 수업 실행 결과

수업 실행 결과 본 연구에서 고안한 카드 게임을 활용한 수업이 다음과 같은 몇 가지 유의미한 특징을 지님을 발견할 수 있었다.

첫째, 학생들이 게임을 무척 재미있어 하고 이전의 수업과는 달리 적극적으로 학습 활동에 참여하였다는 점이다. 앞서 언급한 바와 같이 이 게임은 게임의 규칙이나 방법이 매우 간단하고, 단시간에 한 번의 게임이 끝나며, 그때마다 승자와 패자가 정해진다는 특징이 있다. 이때 승패가 수학 성적이 우수한 학생들에게만 유리하게 결정되지는 않는데, 학생들 역시 이를 곧 알아차렸다. 이로 인해 평소 수학 학습에 대한 자신감이 부족하고 소극적이었던 학생들도 흥미를 가지고 적극적으로 게임에 참여하였고, 학생들 나름대로 벌칙을 만들어 게임을 진행하기도 하였다.⁶⁾

둘째, 학생들 간의 협력 학습이 자발적으로 이루어졌다는 점이다. 학생들은 조별로 5-6명씩 모여 앉아 수업을 진행했는데, 어떤 학생이 틀린 카드를 내게 되면 이는 다른 학생들의 게임 수행에도 영향을 미치게 된다. 이로 인해 학생들은 다른 학생이 내는 카드가 옳은 것인지 항상 점검하게 되고, 만약 어떤 학생이 틀린 카드를 내게 되면 이를 다른 학생들이 곧바로 파악하여 알려주곤 하였다. 또, 어떤 학생이 기호를 생략한 식을 알지 못해 카드를 내지 못하여 게임이 더 이상 진행되지 못하는 상황이 벌어지기도 했는데, 이 경우 학생들은 게임의 진행을 위해 서로의 카드를 보면서 서로의 오류를 교정해 주기도 하고 토론하기도

6) 실제로 이 게임은 학생들에게 큰 인기를 끌었는데, 본 연구의 실험 수업이 끝난 얼마 후 실시된 정기고사(중간고사) 직후의 수업 시간이나 그 밖의 여유 시간에 학생들이 카드 게임을 하게 해 달라고 요청하여 그때마다 카드 게임을 유용하게 재사용하기도 하였다.

하면서 게임을 진행하는 모습을 보였다.

셋째, 학생들의 오류 및 오개념 확인과 교정이 즉각적으로 이루어졌다는 점이다. 곱셈 기호와 나눗셈 기호 생략 규칙과 관련하여 학생들이 범하는 오류나 오개념이 게임 과정에서 드러났고, 드러난 오류를 인식한 후 교정하는 장면들 역시 게임 과정에서 자연스럽게 나타났다. 이러한 장면은 크게 세 가지 형태로 나타났다. 첫 번째 형태와 두 번째 형태는 바로 위에서 살펴본 바와 같이 어떤 학생이 잘못된 카드를 내고 이를 다른 학생들이 인식하여 알려 주면 해당 학생이 이를 받아들여 자신의 오류를 교정하는 경우와 어떤 학생이 자신이 내야 할 카드를 가지고 있음에도 불구하고 그것을 파악하지 못해 카드를 내지 못하고 이로 인해 게임이 더 이상 진행되지 못하는 상황이 발생하여 게임에 참여한 모든 학생들이 서로의 카드를 보고 토론하면서 서로의 오류나 오개념을 파악하고 교정한 경우이다. 그리고 세 번째 형태는 교사가 직접 개입하여 학생들의 오류를 확인하고 교정해 준 경우로서 한 조의 학생들이 모두 오류를 범했을 때는 학생들의 손에 카드가 남았음에도 게임이 더 이상 진행되지 못하고 끝나버리는 게임의 이상 종료 현상이 발생한다. 이 경우 학생들은 당황하여 교사에게 도움을 요청했고 교사는 학생들과 함께 앞에 놓인 카드들을 보며 하나씩 거꾸로 확인하면서 학생들이 시행한 식의 변형 과정을 되짚어 보고 누가 어디에서 어떤 오류를 범했는지 확인하여 이를 교정하였다. 한편, 위에서 살펴본 두 번째 형태에 해당하는 장면에서 학생들이 서로의 카드를 함께 확인하면서 토론했으나 자신들이 원하는 문자식이 적힌 카드가 없다고 판단될 때에도 교사에게 도움을 요청했는데, 이는 해당 조의 모든 학생들이 동일한 오류를 범하거나 공통적인 오개념을 시니고 있기 때문이었다. 실제로 본 연구의 실험 수업 과정에서 학생들이 공통적으로 흔히 범하는 오류 몇 가지가 발견되었다(그림 3).

$5 - 2 \times a = 3a$	$3 \times (a + 2) = 3a + 2$
$x \div (y + 1) = \frac{x}{y} + 1$	$\frac{x}{y + 1} = x \div y + 1$
$a \div b \div c = \frac{ab}{c}$ (혹은 잘 모르겠어요.)	

<그림 3> 카드 게임 과정에서 관찰된 학생들의 오류 사례 몇 가지

넷째, 통상적인 수업에서는 연산 기호를 생략하여 식을 간단히 하는 과정이 주로 강조되었던 것에 비해 카드 게임을 활용한 수업에서는 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하는 과정뿐 아니라 기호가 생략되어 간단히 정리된 식을 보고 그러한 기호들이 생략되기 전 모습을 되살리는 과정을 학생들이 경험할 수 있었다는 점이다. 예를 들어 통상적인 수업에서는 문자식 $a \times b \div (b + c)$ 에서 곱셈과 나눗셈 기호를 생략하여 주어진 식을 $\frac{ab}{b+c}$ 로 변형하는 과

정은 많이 경험하지만, 역으로 식 $\frac{ab}{b+c}$ 를 $a \times b \div (b + c)$ 로 변형하는 과정에 대한 경험은 상대적으로 부족한 편이라 할 수 있다. 게임의 초기에는 대부분의 학생들이 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략한 식이 적힌 카드를 찾고, 그 카드를 자신의 앞에 나열된 카드의 '오른쪽으로' 붙여나가는 방식으로 게임을 진행해 나갔으나, 학생들이 게임에 점차 익숙해지자 기호가 생략된 식을 보고 기호가 생략되기 이전의 식을 찾아 카드를 '왼쪽으로' 붙여나가는 학생들이 생겨났고, 다른 학생들 역시 이를 모방하여 그러한 시도를 하는 학생들이 점차 많아지

게 되었다. 그리고 실제 게임에서 양방향에서의 사고 즉, 주어진 식에서 곱셈과 나눗셈 기호를 생략하여 식을 간단히 하는 과정과 그 역과정에 해당하는 사고를 모두 자연스럽게 유연하게 하는 학생이 게임에서 이기는 경우가 많음을 확인할 수 있었다.

다섯째, 어떤 교구나 교수학적 보조 수단도 그것을 사용하는 교사들이 손쉽게 다양하게 제작하여 활용할 수 있고 그 과정이 번거롭지 않아야 한다는 면에서, 본 연구에서 고안한 카드 게임은 제작이 매우 용이하고 교사가 자신이 가르치는 학생들의 수와 능력 수준 등을 고려하여 카드의 개수나 카드에 적힌 문자식의 복잡성과 난이도 등을 다양하게 변형하여 제작 활용할 수 있다는 장점이 있어 실제 수업에서 활용 가능성이 클 것으로 보인다.

IV. 맺음말

문자를 사용한 식의 도입은 대수의 형식적 언어 사용의 출발로서 대수는 이러한 문자식의 조작으로 설명될 수 있다. 나아가 문자식은 기하와 해석을 포함한 모든 수학의 언어로서 다른 제 분야의 수학 학습의 기초가 되는 내용이다. 그 중에서 문자를 도입하여 식을 세우고 주어진 식을 간단히 하기 위해 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하는 규칙은 하나의 약속으로 그 규칙을 바르게 이해하고 있어야 하지만, 이러한 규칙의 학습은 실제 수업에서 매우 단순하고 지루하여 교사나 학생들이 그 중요성을 간과하는 경우가 많다. 이로 인해 학업성취도가 높은 학생들조차도 이와 관련된 내용을 단순 지식의 습득으로 인식하거나 가볍게 생각하여 오류를 범하는 경우가 발생한다. 이러한 관점에서 우리는 학생들이 문자식의 처리 과정, 특히 곱셈 기호와 나눗셈 기호를 생략하는 과정을 보다 재미있고 효율적으로 학습하도록 하기 위한 방안으로 카드 게임을 고안하였다.

본 연구에서 연구자들이 고안한 카드 게임은 실제 수업에서 학생들에게 큰 호응을 얻었는데, 이는 게임 방법과 전차가 복잡하지 않고 오류나 오개념이 게임 과정에서 명료하게 드러나기 때문인 것으로 보인다. 실제로 평상시 수업 시간에 조용하고 소극적이었던 학생들도 밝은 모습으로 적극적으로 수업에 참여하는 모습을 볼 수 있었다는 면에서 본 연구에서 고안한 카드 게임이 학생들의 흥미와 동기를 유발하는 수업 방법 및 자료로 활용가치가 있다고 판단된다. 한편, 통상적인 수업과는 달리 카드 게임을 활용하였을 때, 주어진 식에서 연산 기호를 생략하여 식을 간단히 하는 과정뿐 아니라 그 역과정에 해당하는 사고를 균형 있게 발달시킬 수 있는 경험을 학생들에게 제공할 수 있음을 확인하였다. 또한 게임의 이상 종료로부터 학생들 자신이 어디선가 오류를 범하였음을 인식할 수 있으며, 교사와 함께 니열된 카드를 보며 자신이 시행한 식의 변형 과정을 되짚어보고 자신이 어떤 부분에서 어떤 오류를 범하였는지 확인함으로써 오류를 교정할 수 있었다. 그리고 학생들이 흔히 범하는 오류나 학생들이 공통적으로 지닌 오개념 몇 가지를 게임 과정에서 발견할 수 있었다.

이처럼 본 연구는 학생들의 흥미와 자발적 동기를 유발할 수 있는 카드 게임을 고안하여 소개하고 카드 게임을 진행하는 과정에서 학생들이 지닌 문자식 처리 관련 오류 및 오개념을 몇 가지 확인할 수 있었다는 점에서 중학교 1학년 문자와 식 영역의 교수-학습 개선에 제한적이나마 기여할 수 있으리라 판단된다.

참고문헌

- 강문봉 (2000). 초등학교 수학 학습용 게임 개발 및 활용에 관한 연구. *수학교육학연구* 10(2), 199-214.
- 공병숙 (1999). 초등학교 수와 연산 학습에서의 게임학습자료 활용에 관한 연구. *경인교육대학교 석사학위논문*.
- 교육인적자원부 (2007). *수학과 교육과정*. 교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8].
- 교육과학기술부 (2008). *중학교 교육과정 해설(III) - 수학, 과학, 기술·가정 -*.
- 김나영 (1998). 열린 수학 학습을 위한 게임의 교육적 활용 가능성 탐색. *수학교육학연구* 18(1), 327-350.
- 김남희 (1997). 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. *서울대학교 박사학위논문*.
- 김남희 (1998). 대수식 언어 학습으로서의 문자식의 지도 - 중학교 1학년 문자와 식 단원의 지도 계획안 구성 및 수업 사례. *대한수학교육학회논문집* 8(2), 439-452.
- 김부윤 · 이지성 (2007). 바둑돌 게임의 교수학적 활용. *한국수학사학회지* 20(3), 43-58.
- 도종훈 · 허선희(2009). 카드 게임을 활용한 문자와 식 지도 방안 연구. *서원대학교 교육대학원 교육논총* 제15집.
- 류창우 · 송영무 (2009). 흑백게임을 활용한 수학영재교육. *대한수학교육학회 제35회 수학교육학 논총*, 83-92.
- 박교식 (2004). 수학 기호 다시 보기. *수학사랑*.
- 박두열 (1993). 동기유발을 위한 수업 매체로서의 수학적 게임에 관한 연구. *한국교원대학교 석사학위논문*.
- 우정호 (1998). *학교수학의 교육적 기초*. 서울대학교 출판부.
- 이용률 · 강문봉 (1996). 교재의 게임화를 통한 학생의 자발적 학습 태도를 육성하는 수학 수업에 관한 연구. *대한수학교육학회 논문집* 6(1), 15-24.
- 정문자 (2005). 젓가락 게임을 활용한 창의성 신장 방안 연구. *수학교육논문집* 19(3), 503-516.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In *The ideas of algebra K-12*, NCTM 1988 yearbook.
- Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (1991). *A history of mathematics*. 양영오 · 조운동 역 (2000). *수학의 역사*. 경문사.
- Derbyshire, J. (2007). *Unknown quantity : a real and imaginary history of algebra*. 고중숙 역(2009). *미지수, 상상의 역사*. 승산.
- Eves, H. (1983). *An introduction to the history of mathematics*. 이우영 · 신항균 역 (2001). *수학사*. 경문사.
- NCTM (1992). *Games and puzzles for elementary and middle school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Wagner, S. (1983). What are these things variables?. *Mathematics Teacher* 76(7), 474-479.

A Card-Game for Exercising Abbreviations of the Multiplication Sign \times and the Division Sign \div in Calculating Expressions

Do, Jonghoon⁷⁾ · Heo, Sunhee⁸⁾

Abstract

Variables and expressions are essential for doing mathematics. Especially abbreviations of the multiplication sign \times and the division sign \div are current rules that we usually follow. In this paper, we devised a Card-Game for exercising abbreviations of the multiplication sign \times and the division sign \div in calculating expressions, designed a teaching unit for the calculation of expressions using the Card-Game in the variables and expressions strand, and discussed the implications of using the Card-Game for motivating students, cooperative learning, diagnosis and correction of errors, and so on.

Key Words : Card Game, Multiplication sign, Division sign

7) Seowon University (jhoondo@seowon.ac.kr)

8) Sintanjungang Middle School (hsunny95@hanmail.net)