한국학교수학회논문집 제 13 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 13, Number 3, 483-498, September 2010

# 유리수 개념에 대한 대학생들의 이해와 추론[1)]

강윤수[2)] · Chae, Jeong-Lim[3)]

이 연구의 목적은, 유리수 개념에 대한 대학생들의 이해와 추론 성향을 알아보는 것이다. 이를 위해, 우리나라 사범대학생(33), 공과대학생(35), 미국대학생(28) 등으로 구성된 세 그룹을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 설문지는 유리수 개념 이해 관련 네 문제와 연산 추론 성향 관련 세 문제로 구성되었다. 네 문제에 대해서는 복수응답을 요구하고 연산 관련 세 문제는 선호하는 순서를 표시하도록 하였다. 그 결과, 설문조사에 참여한 대학생들이 유리수 개념의 여러 측면을 정확하게 이해하지 못하며, 유리수 연산에 대해서 개념적 방법보다는 메커니즘적 접근방식을 선호하는 것을 확인하였다. 뿐만 아니라, 분수, 비, 비례, 유리수 등과 관련된 문맥에서 비논리적인 추론을 하고 이들 사이의 연계성을 정확하게 인식하지 못해 개념적으로 혼란스러워하는 것을 확인하였다.

주요용어 : 분수, 비, 비례, 유리수, 대학생들의 이해와 추론

## Ⅰ. 서론

분수와 유리수가 어떻게 다른지를 질문 받으면 많은 학생들은 자기 생각을 정리해서 말하지 못하고 난처해한다. 이는 중 · 고등학생들 뿐만 아니라 수학교육을 전공하는 대학생들에게서도 흔히 나타나는 현상이며, 심지어는 수학교사들도 스스로 만족스러워할 답변을 하지 못하고 얼버무린다. 이는 분수로 시작하여 유리수로 확장해가는 현행 수학과 교육과정에서 개념의 확장에 관한 명확한 언급이 없기도 하지만 좀 더 체계적으로 학습하지 못한 결과이다. 즉, 분수와 유리수를 어떤 측면에서 같은 의미로 이해하고 어떤 면에서는 구분해야 하는지를 체계적으로 나루지 않기 때문에 이와 관련된 많은 오개념이 생긴다. 이러한 오개념들 중에서 가장 많은 비율을 차지하면서 핵심적인 내용은 '표현'과 '개념'의 차이를 구분하지 않은 것에서 연유된다.

예를 들어, 초등학교 교실에서 선생님이 칠판에 '2'를 쓴 다음에 학생들에게 더 큰 수를 써보라고 했을 때, 한 학생이 '**2**'라고 썼다면 이 학생은 선생님의 질문에 포함된 숫자를 수 개념으로 이해하지 못한 경우에 해당된다.

---

1) 이 논문은 2008년 순천대학교 학술연구비 공모과제로 연구되었음.
2) 순천대학교 수학교육과 (yskang@sunchon.ac.kr)
3) University of North Carolina at Charlotte (jchae@uncc.edu)

수학과 교육과정에서 언급한 유리수 개념의 여러 가지 측면을 모두 학습한 대학생들에게서도 위의 예와 구조적으로 비슷한 상황이 발생한다. 어떤 사람이 '2/3'를 써 놓았을 때, 그가 말하기 전에 우리는 '2/3'를 통해 전달하려고 하는 그의 생각을 정확히 알 수 없다. 기호자체를 이해하는 것은 용이하지만 그 기호에 포함된 의미는 상황에 따라 다양하게 해석될 수 있어 수학적 의사소통 과정에서 많은 오해가 유발될 수 있다. 이는 반대로 많은 상황을 최소한의 표현체계를 활용하여 나타내고 해석할 수 있다는 수학의 장점을 의미하기도 한다. 학교수학에서 다루는 대부분의 표현들은 상황에 따라 다양한 의미로 해석될 수 있는 중의적 성격을 가지고 있어서 학습자들을 혼란스럽게 할 수 있으므로 체계적으로 가르쳐져야 하며 이와 관련된 교사들의 세심한 주의가 요구된다.

특히, 유리수 개념은 학교수학에서 다루어지는 핵심적인 개념 중의 하나이면서 나선형 교육과정의 원리에 따라 점차 확장되고 엄밀화, 추상화되는 성격을 띠고 있다. 이는 대개 전체 부분, 비, 비례, 연산자, 동치류 등 유리수가 갖는 다양한 측면이 단계적으로 추가되면서 서로 통합되어 가는 것을 의미한다. '전체-부분'의 관점에 한정된 사고를 하는 학습자에게 "'세 명 중 두 명의 남자'를 2/3로 표시하고, '30명 중 20명의 남자'를 20/30으로 표시하는데 2/3와 20/30이 같다면 두 명의 남자와 20명의 남자가 같다는 말인가?"라고 질문하면 적절한 답변을 듣기 어렵다. 이는 유리수 개념이 서로 다른 해석적 관점이 필요한 불연속적 확장과정을 거쳐야 하는 통합적 개념임을 말해주는데, 이러한 특성으로 인해 학생들은 유리수 개념 이해과정에서 많은 어려움에 직면한다. 유리수 개념의 진정한 이해는 각 측면을 이해하는데 필요한 해석적 관점의 확장을 통해 이 측면들이 어떻게 구분되고 혹은 연결되는지가 명확해지는 것이다.

유리수 개념을 지도하는 수학교사들도 유리수 개념이 갖는 다양한 측면을 독립적으로 지도하는 것은 능숙하지만 이들을 어떻게 관련지어 통합적 개념으로 완성할 것인가와 관련된 교수학적 노하우를 갖기 힘들다. 나아가 많은 교사들은 유리수의 이러한 측면들을 관련시켜 지도해야 할 교수학적 필요성을 느끼지 못하거나 혹은 필요성은 인정하면서도 이와 관련된 교수학적 내용 지식이 부족함을 실토하고 있다.

하지만 유리수와 관련된 대부분의 연구들이 구체적인 한 측면의 지도와 관련(Bezuk & Cramer, 1989; Cramer & Henry, 2002; Cramer, Post & delMas, 2002)될 뿐 이들 측면이 어떻게 관련되며 또 어떻게 이해되고 있는지를 통합적으로 다룬 연구는 많지 않다. 이들 측면들이 연계되어 연구된 논문들도 대부분은 초등학생들을 대상으로 하고 있다. Cramer & Wyberg(2007)는 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 분수의 대소, 덧셈과 뺄셈과 관련된 과제를 수행하게 한 후에 면담을 통해 그들이 사용한 개념적 혹은 절차적 전략들을 확인하였다. 이 연구의 결과로 제시된 세 학생의 경우는 동일한 과제를 수행하는 과정에서도 각자가 사용하는 학습전략(통분 혹은 동치, 비율 혹은 백분율, 전체-부분 혹은 다이어그램)이 달랐는데 이들 중 두 명은 자기들이 선호하는 전략을 모든 과제 상황에 고집스럽게 사용하려는 성향을 나타내었다. 이러한 성향은 특정한 맥락에서는 유용하지만 다른 상황에서는 많은 오류를 유발하는 인식론적 장애를 발생시켰다. 이 연구는 초등학생을 대상으로 분수의 크기와 연산에 국한한 결과여서 유리수와 같이 여러 수준을 통해 개념이 완성되어 가는 경우는 이보다 더 복잡한 장애 요인들이 발생할 수 있다. 특히, 분수와 유리수의 관계가 명확하지 않은 상태로 교수-학습이 진행된 우리나라의 경우는 이런 상황이 일어날 개연성이 더 커진다. 이런 점에 주목하여, 본 연구는 분수, 비, 비례, 유리수 개념 등이 갖는 의미와 연계성을 학생들은 어떻게 추론하고 이해하는지를 알아보기 위한 의도로 설계되었다. 이를 위해, 이들

개념을 이미 학습하고 나름대로의 수학적 관점을 바탕으로 이들 사이의 관계를 추론할 수 있는 대학생들을 대상으로 관련 자료를 수집하였다.

수학적 개념을 이해하는 방식이나 추론 성향은 일정한 패턴으로 분류하기 어려워 변인을 단순화한 양적 접근으로 파악하기는 쉽지 않다. 하지만, 너무나 다양한 학생들의 생각을 모두 고려하는 비구조화된 접근 방식도 그들의 이해나 추론 성향을 유형화하는데 한계를 갖는다. 이런 점을 고려하여 본 연구에서는 설문조사 방법을 활용하되 설문지법 연구에서 사용하는 전형적인 척도를 사용하지 않고 각 질문에서 제시한 보기들 사이의 응답 유형으로 응답자들의 성향을 추론할 수 있도록 보기를 구성하고 그들 사이의 관계를 설정하였다. 또한, 각 질문에는 자신의 생각을 자유롭게 언급할 수 있는 여백을 두어 구조화된 방식이 갖는 한계를 최소화하려 했다.

## Ⅱ. 분수, 비, 비율 그리고 유리수

Smith(2002)는 초등수학 영역으로 분수(fraction)나 비(ratio) 그리고 비례식(proportionality)만큼 수학적으로 풍부하고, 인지적으로 복잡하고 가르치기 어려운 분야는 없다고 했다. 그러면서 그는 분수나 비는 이산적 혹은 연속적인 두 양의 관계를 나타내므로 '관계적' 수이고 비례식은 이들 관계적 수들 사이의 관계에 관련된다고 하였다.

비록 이 수학적 아이디어들은 초등수학에서 등장하지만 중등수학에서 핵심적으로 다루어지는 유리수 영역과 직접적으로 연결되고 그 과정에서 학생들에게 많은 오개념을 유발시키므로 중등수학 교육과정 관련 연구의 핵심적 주제가 될 수 있다. 특히, 초등수학 과정에서는 풍부한 문맥 속에서 다루어지다가 유리수로 확장되는 과정에서 급격하게 추상화되는(예를 들어, 유리수를 '정수/정수'로 도입하고 그 배경을 설명하지 않은 것) 우리나라 수학과 교육과정의 영향으로 많은 학생들과 교사들은 분수, 비, 비례 등이 어떻게 유리수 개념으로 추상화되어 가는지를 알기 어렵다. 이런 상황은 유리수 개념의 여러 측면을 초등수학에서 도입하되, 분수, 비, 비례 관계와 이들 사이의 관련성을 중등수학에서 심도 있게 다룰 필요가 있음을 말해 준다.

이미 언급한 바와 같이, 흔히 유리수 개념이 여러 측면을 갖는 통합적 개념이라는 것은 그것이 '정수/정수' 혹은 '소수'로 간단하게 표현되어 있더라도 문맥에 따라 전혀 다른 의미로 해석될 수 있기 때문이다. 그렇다고 이들 측면들을 각기 다른 개념으로 도입하고 서로 다른 표현체계를 사용한다면 관계성과 추상성을 가장 중요한 특성으로 하고 가능하면 간단한 표현체계를 사용하려는 수학적 목적에 배치되는 것이다. 아이러니컬하게도 이러한 수학적 혹은 수학교육적 목적이 분수로 도입하여 유리수 개념으로 추상화되는 과정을 학습하는 학생들에게 혹은 이를 지도하는 수학교사들에게 많은 어려움을 발생시킨다.

유리수 개념이 갖는 여러 측면에 대해 합의된 견해는 존재하지 않지만 이에 대한 연구자들의 견해를 종합하면, 전체-부분, 비, 비례, 연산자, 방정식의 해, 동치류 등으로 요약될 수 있다.

Smith(2002)는 수학교육자들이 분수, 비, 비례 등을 제대로 이해하지 못하고 서로 다른 방식으로 사용하는 과정에서 의사소통에 오류가 나타남을 지적하면서 이 용어들을 규정하였다. 그는 "3/4"나 "11/7" 등과 같이 그 숫자가 갖는 의미가 애매한 경우에는 상(quotient)이라는 용어를 사용하고 몇 개의 동일한 크기의 부분으로 나누어진 전체를 '나누어진 양

(divided quantity)' 혹은 '분할된 양(partitioned quantity)'이라고 부를 수 있는데 이 때 '분수(fraction)'라는 용어를 사용하겠다고 했다. 이에 반해, 두 양 사이에 승수적 관계(어느 하나가 다른 것보다 몇 배 크거나 작은)를 가질 때, '비(ratio)'라는 용어를 사용한다고 하면서 다음과 같은 예를 들었다. 숫자 "3/4"은 28명의 학생 중 12명이 남학생이고 16명이 여학생이라는 것을 나타낼 수 있다(즉, 남학생 3명마다 여학생이 4명 있다). 그는 또한, 비와 관련된 추론을 언급할 때 '비례(proportion 혹은 proportionality)'라는 용어를 사용하는 것이 타당하다고 주장하였다. 즉, 어떤 상황에서의 비를 다른 상황(들)에서의 비로 사영시키는 것을 '비례적 사고(proportional thinking)'라고 명명하였다. 그러면서 단순히 "3/4=6/8"이나 "2/3=x/12" 등이 반드시 비례식을 의미하지는 않으며 제시한 사람의 설명이 있기 전에는 이 식이 나타내는 것을 단정할 수 없다고 했다.

한편, 유리수는 어떻게 규정될 수 있는가? 양, 분수, 비, 비례 등과 유리수는 어떤 관계인가? 이것은 간단하게 답변할 수 있는 문제가 아니다. Smith(2002)도 유리수가 두 자연수 a와 b($\neq 0$)에 대해 a/b 형태를 취할 수 있기 때문에 일종의 상이지만 수학적으로는 유리수 b/a가 방정식 "$ax=b(a\neq 0)$"의 모든 가능한 해로서 규정될 수 있으며, 조밀(dense)하고 순서체(ordered field)이고 이로부터 실수체계가 구성될 수 있는 등 수학적으로 중요한 많은 성질들을 가지고 있음을 지적했다. 그러면 유리수를 분수나 비와 어떻게 관계지을 수 있는가? 이에 대한 Smith의 설명이 흥미롭다. 그는 야구경기에서 어떤 선수가 이틀 동안 각각 3타수 2안타를 쳤다면 "2/3"를 비로 보아 "$2/3+2/3=4/6=2/3$"로 표현하는 것이 완벽하지만 분수로 보면 그 합은 "4/3"나 "$1\frac{1}{3}$"가 되어야 한다고 했다. 이러한 예는 분수나 비가 동일한 표현을 사용할 수 있지만 전혀 다른 개념적 접근을 필요로 하며 고유의 해석적 준거가 존재함을 말해 준다. Smith(2002)도 유리수가 분수나 비에서 출발하여 강력한 수학적 개념으로 추상화되지만 분수나 비가 갖는 성질이 형식화된 유리수의 성질과 잘 맞지 않을 수 있음을 유의해야 한다고 지적하면서 이들 개념의 학습과정에서는 학생들이 그들 고유의 형식으로 이해하는 것이 우선되어야 하며, 이를 무시하고 유리수의 형식적 개념을 도입하는 것은 의미가 없다고 주장했다.

Ball(1992)이 지적한 것처럼 학생들이 구체적 도구를 활용하여 학습하는 것만으로 관련된 수학적 지식이 자동적으로 생성되지는 않는다. 마찬가지로, 분수나 비 등을 연달아 학습하는 것만으로 이들의 상호연관성에 관한 지식이 자동적으로 생성될 것을 기대하기는 어렵다. Behr et al.(1992)나 Kieren(1988)이 지적한 것처럼 학생들이 분수에 대한 수 감각, 연산, 알고리즘 기술 등을 상호 연결시키는 지식을 발달시키는 데는 많은 어려움이 따른다. 적절한 문맥이나 개념 설명 없이 도입된 연산 알고리즘(일종의 절차적 지식)은 학생들로 하여금 어떤 근거도 없는 암호 같은 것으로 받아들여져 단순히 기억하면 되는 것으로 오해될 소지가 있다(Carpenter, 1986).

분수나 비 등의 개념과 절차, 학생들의 일상생활 사이의 상호연계성이 파악되지 않은 상태에서 기호조작을 시도하는 것은 학생들의 오개념을 유발할 가능성이 크다. Kieren(1988)은 수학적 개념에 대한 학생들의 지식과 사고는 개인적 환경에서 형성되기 시작하며 점진적으로 확장되어 간다고 보았다. 그런 다음, 구체적 문맥에 덜 종속된 내면적 사고를 할 수 있게 되고 개념과 절차의 연계성을 파악하고 전통적인 언어, 표현방법, 알고리즘 등을 이해하고 사용할 수 있게 될 때 형식적 기호체계를 사용할 수 있게 된다고 설명한다. 이런 이유로, 그는 상징적 기호체계를 일찍 도입하는 것을 경계했는데 조기에 상징적 기호체계를 사용하면

학생들은 실세계와의 연계성을 인식하지 못할 수 있으며 이로 인해 수 개념이나 연산 감각의 발달에 치명적인 손상이 유발될 수 있음을 지적하였다. 그래서 충분히 이해되지 않은 상태로 도입된 상징적 지식은 기억에 크게 의존할 수밖에 없으며 이는 관련된 지식체계의 약화를 초래하는 지름길이 될 수 있다는 것이다.

특히, 분수의 연산 감각은 실세계 문맥, 사용된 언어, 분수의 구체적 혹은 도해적 표현들 사이의 연계성을 강조할 때 강화될 수 있다. 분수 혹은 분수의 연산 감각을 강화시키기 위해서는 기호체계의 조작에 우선하여 분수나 분수 연산을 표현하는 다양한 모델에 익숙해져야 하며 모델, 문맥, 표현 사이의 변환에 관한 실제적 활동을 통해 이들 사이의 연계성을 이해해야 한다. 뿐만 아니라, 문제해결 과정에서 이들과 관련된 수학적 지식을 유연하게 활용할 수 있어야 한다. Towsley(1989)에 따르면, 이들 사이의 변환에 능숙한 학생들은 문장제 문제 해결과정에서 분수 기호조작과 관련된 추론을 잘한다. 반면에 이들 사이의 연계성을 이해하지 못한 학생들은 분수 개념과 분수 연산 감각이 취약하며 실세계에서 분수가 유용하다는 것을 이해하기 어렵다(Huinker, 2002).

Huinker(2002)는 분수 연산 감각의 몇 가지 측면을 언급하면서 추론의 중요성을 강조하였다. 그는 연산을 이해하는 것은 연산이 수들에 적용되었을 때 어떤 효과(결과)가 나타날 것인지를 추론하는 능력을 포함한다고 주장하였다. 예를 들어, '연산 결과로 얻어진 답이 맞는지에 대해 어떻게 말할 수 있는가?'와 같은 물음에 적절한 답을 할 수 있는 능력이 이에 해당된다.

계산된 결과가 무엇을 의미하는지, 수행된 계산과정이 수학적으로 왜 맞는지 등도 설명하지 못한 채로 계산능력만 키우는 것은 수학적 능력향상에 도움이 되지 못할 뿐만 아니라 더 고차적인 수학적 개념의 이해과정에 장애를 유발할 수도 있다.

Kamii(1999)는 학교수학의 핵심적인 영역 중의 하나인 분수 단원 지도과정에서 추론의 중요성을 강조하며 전통적인 지도방법은 과도하게 기호(문자)적 처리과정을 강조하고 있다고 지적하였다. 그는 학생들의 분수 지도과정에서 기호조작에 의한 계산능력을 지나치게 강조하면 그들의 분수와 분수 연산 감각의 탄탄한 토대 형성을 방해할 수 있다고 경고하였다.

이제는 학교수학에서 분수나 분수 연산의 학습목표가 계산법칙을 학습하는 것에서 추론을 강조한 분수와 분수 연산 감각을 키우는 것으로 이동되어야 한다. 이를 위해서는 관련된 지식의 연계성을 잘 이해하고 계산이나 문제해결 과정에서 적절한 전략을 유연하게 활용할 수 있는 능력을 키우고 동시에 이 과정들이 학습자 스스로 잘 인지하고 설명할 수 있도록 학습 기회가 제공되어야 한다. 마찬가지로, 분수에서 출발한 유리수 개념도 다양한 측면들이 갖는 고유한 특성을 파악하는 동시에 이들 사이의 연계성을 제대로 이해할 수 있는 방식으로 학습되어야 하며 학생들 스스로 이에 대한 자신의 생각을 논리적으로 추론하는 것이 학습의 중요한 목표 중의 하나가 되어야 한다.

분수, 비, 비율을 지나 동치류로 형식화될 때까지 유리수 개념은 서서히 진화해 간다. 이러한 나선형 교육과정의 원리가 유기적이고 통합적으로 이해되지 못하고 분리된 각각의 개념으로 인식된다면 진정한 의미의 유리수 감각을 가졌다고 보기 어렵다.

NCTM(1989,2000)에서도 학생들의 일상에서 흔히 접할 수 있는 백분율 지식이나 비율에 대한 직관이 유리수 도입에 강력한 역할을 하며 유리수를 수 감각으로 특성화하여 수체계로 인식하는데 결정적 기능을 수행할 수 있음을 지적하였다. 특히, NCTM(2000)은 중학교 수학에서 비례적 추론을 포함한 추론의 중요성을 강조했는데, 비례적 추론과 관련된 연구들이 대부분 초등수학에 집중되어 있다(Thompson, Austin & Beckmann, 2002). 따라서, 중등수

학 영역에서 비, 비례적 추론 더 나아가 유리수와 관련된 학생들의 추론 성향을 파악하여 유리수 지도와 관련된 형식적 혹은 비형식적 지도계열을 설계하는 연구가 필요하다.

## Ⅲ. 도구와 방법

학생들이 분수, 비, 비례, 유리수 개념을 어떻게 구분하며 또 이들 사이의 관계를 어떻게 설명하는지를 확인하기는 쉽지 않다. 예를 들어, '분수와 유리수는 어떻게 다른가?'와 같은 설문은 학생들을 당황스럽게 만들 뿐 학생들의 이해와 관련된 좋은 자료를 얻을 기회를 제공하지 못한다. 학생들이 이 수학적 개념들을 모두 학습했더라도 이들 사이의 관계를 심도 있게 탐구한 경험이 거의 없어 자신의 생각을 조리 있게 설명하는데 필요한 예를 풍부하게 확보하지 못한 때문이다. 또한, 학교수학에서 주로 채택하고 있는 선택형 평가도구와 비교적 관련이 적은 질문 형태라서 학생들은 단답형으로 답변하거나 이런 질문이 왜 필요한지에 대해 회의적인 반응을 보이는 경우가 많다. 실제로 연구자들이 중,고,대학생들은 대상으로 이런 형태의 질문을 던졌을 때, 자기 생각을 나름대로 정리해서 답변하려고 노력하는 학생들은 거의 없었다. 그렇다고 '자연수는 분수이다'와 같은 주장에 양화된 척도로 동의 정도를 확인하는 구조화된 설문지법 형식으로 학생들의 생각을 확인하기도 쉽지 않다.

이런 점을 감안하여, 이 연구에서는 분수, 비, 비례와 유리수 개념이 어떻게 다른지 혹은 어떤 측면에서 같게 해석할 수 있는지를 확인하기 위한 방법으로 '반구조화된' 방법을 채택하였다. 말하자면, 학생들이 자신의 생각을 정리하는데 필요한 예시상황(문맥) 그리고 이와 관련된 주장(설명)을 제시하여 응답자로 하여금 자신의 생각과 일치한 답변들을 복수로 선택할 수 있도록 하였다. 개념에 관한 항목에서는 설문에서 제시한 주장과 다른 관점을 가진 학생들이 자신의 생각을 자유롭게 기술할 수 있도록 허용함으로써 응답자들의 생각을 최대한 이끌어 내는데 유용한 질문을 구성하려고 노력하였다. 모든 문항은 작성과정에서 예비검사를 실시하여 학생들이 질문의 의도를 정확히 파악하는지를 확인하고 수정하는 과정을 반복함으로써 응답결과에 대한 타당도를 높이고자 노력하였다.

<표 1> 설문지 예시 문항(문제1)

**문제1.** 아래의 상황과 관련된 다음 설명 중 옳다고 생각하는 것에 모두 표시(v)하시오.

$$1=\frac{1}{1},\ \ 2=\frac{2}{1},\ \ 3=\frac{3}{1},\ \cdots$$

① '자연수는 분수이다'라고 말할 수 있다.

② $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \cdots$ 등은 분모가 1이므로 분수가 아니고 그냥 자연수이다.

③ 자연수가 분수로 표현되었을 뿐이다.

④ 분수가 자연수를 포함한다고 볼 수 있다.

⑤ 자연수는 순서(차례)가 있고 분수는 순서(차례)가 없다.

기타의견:________________

질문은 크게 '개념(1~4번)의 이해'와 '연산에 대한 추론(5~7번)' 항목으로 구분된다. 예를 들어, 예시 문항(문제1)과 같이 개념의 차이를 묻는 문항은 상황을 제시하고 이 상황으로부터 추론할 수 있는 주장들을 나열하여 복수로 응답하도록 하였다. 위의 예시는 학생들이 분수와 자연수(유리수)를 어떻게 구분하는지를 확인하기 위한 문항으로 개념과 표현의 차이를 매개로 학생들의 이해와 추론 성향을 분석하도록 작성되었다. 예를 들어, ①번이나 ④번을 선택한 학생들은 초등학교 과정에서 개념과 표현이 혼재된 상태로 도입된 분수의 수학적 특성이 정체되어 있는 상황으로 판단할 수 있다. 이런 학생들은 대개 분수를 유리수와 동일한 개념으로 파악하는 경향이 있고 $\sqrt{3}/2$이 분수인지를 묻는 질문에 적절히 답변하지 못하며 자신의 생각에 혼란을 일으킬 가능성이 높다. 한편, ②번을 선택한 학생들은 수 개념이 상황에 따라 수학적으로 다양하게 표현될 수 있다는 사실을 인정하지 않고 문맥에 상관없이 수학적 표현은 일정하며 한 가지 의미만 가져야 한다고 주장할 가능성이 높다. 반면에 ③번과 ⑤번만 선택한 학생들은 분수를 개념으로 보지 않고 하나의 표현형식으로 인식하면서 자연수나 유리수 등 수학적 개념과 표현 방식의 차이를 비교적 명확히 구분하고 있다고 볼 수 있다. 만일 유리수를 '정수/정수'로만 생각하고 분수와 유리수를 개념적으로 동일하게 인식한다면 분수가 순서가 있다고 생각하고 $\sqrt{3}/2$과 같은 수를 분수로 인정하지 않게 된다. $\sqrt{3}/2$과 같은 수를 분수로 인정하면서 ⑤번이 맞다고 인정하기는 힘들기 때문이다.

<표 2> 설문지 예시 문항(문제5)

**문제5.** 다음 계산을 설명하는 것으로 가장 좋다고 생각하는 방법을 순서대로 쓰고(1,2,3,...), 틀린 것에는 표시(v)하시오.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

___ ① 분모 2와 3의 최소공배수가 6이므로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$ 이다.

___ ② $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\times3+1\times2}{2\times3}=\frac{5}{6}$ 이므로, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$의 값은 $\frac{5}{6}$이다.

___ ③ 사과 두 개 중의 하나와 세 개 중의 하나를 더하면 결국 다섯 개 중 두 개이므로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$의 값은 $\frac{2}{5}$이다.

___ ④ $\frac{1}{2}$과 $\frac{1}{3}$을 동시에 측정 가능한 새로운 단위가 $\frac{1}{6}$이고, $\frac{1}{2}$은 $\frac{1}{6}$이 세 개, $\frac{1}{3}$은 $\frac{1}{6}$이 두 개이므로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$은 $\frac{1}{6}$이 다섯 개인 $\frac{5}{6}$가 된다.

___ ⑤  이므로 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$의 값은 $\frac{5}{6}$이다.

분수의 연산에 대한 학생들의 추론 성향을 알아보기 위한 의도로 작성된 문항(5~7)은 제시된 연산과정에 대해 학생들이 가장 선호하는 해법을 순서대로 표시하도록 구성하였다. 예

시 문항(문제5)과 같이 주어진 문제를 해결하고 설명하는 여러 가지 방법을 제시하여 그들이 어느 방법을 선호하는지를 확인하고자 하였다. 위의 예시에서 ④와 ⑤번을 가장 선호하는 학생들은 연산과정이 갖는 의미를 바탕으로 절차를 받아들이려는 개념적 접근을 선호한다고 볼 수 있으며, ①과 ②번을 선호하는 학생들은 의미보다는 절차에 무게를 두는 성향을 가졌다고 판단할 수 있다. 한편, ⑤번을 가장 선호하면서도 ④번을 선호하지 않는 학생은 모델에 의존한 추론 성향을 가진 것으로 볼 수 있으며 ③번을 맞다고 인정하는 학생의 사고는 유리수 개념이 갖는 특정한 측면에 국한되어 있는 것으로 판단할 수 있다.

이와 같이 구성된 설문지를 활용하여 대학생들을 대상으로 자료를 수집하였다. 본 연구의 목적에 합당한 자료를 수집하기 위해서는 유리수의 제 측면을 모두 학습한 고등학생 이상의 수학적 사고 능력이 요구된다. 하지만 고등학생들의 경우는 위의 설문형태에 응답하는 것을 귀찮아하는 경향을 나타내어 본 연구에서는 대학생들에 국한하여 자료를 수집하기로 하였다. 설문조사에 참여한 인원은 모두 96명의 대학생들이며 자세한 정보는 다음과 같다.

<표 3> 설문조사 참여자

| 구분 | | 구성 | 인원 |
|---|---|---|---|
| A그룹 | A1 | 수학교육과 1학년 | 20 |
| | A2 | 수학교육과 3학년 | 13 |
| B그룹 | | 공학계열 1학년 | 35 |
| C그룹 | | 미국 이공계열1,2학년 | 28 |

설문조사 결과는 문항별로 분석하지만 1~4번 문항과 5~7번 문항을 구분하였다. 유리수 개념에 대한 진위여부를 묻는 1~4번 문항은 각 보기별 응답결과를 빈도수와 백분율로 정리(<표4>)하여 전체 혹은 그룹별 특성을 확인하는데 용이하게 하였다.

<표 4> '문제1'의 응답 결과

| 그룹 | | 응답결과(명,%) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ①∧③ |
| A (33명) | A1(20) | 15(75) | 2(10) | 11(55) | 16(80) | 3(15) | 7(35) |
| | A2(13) | 10(77) | 0 | 9(69) | 9(69) | 0 | 6(46) |
| | 소계 | 25(76) | 2(6) | 20(61) | 25(76) | 3(9) | 13(39) |
| B(35명) | | 23(66) | 8(23) | 30(86) | 18(51) | 3(35) | 19(54) |
| C(28명) | | 18(64) | 9(32) | 25(89) | 11(39) | 1(4) | 18(64) |
| 합계(96명) | | 66(69) | 19(20) | 75(78) | 54(56) | 7(7) | 50(52) |

이에 반해, 유리수 연산에 대한 다양한 해법을 각자가 선호하는 순으로 선택하게 한 문항(5~7)에 대해서는 각 보기에 대한 학생들의 선호 정도를 확인하기 위해 응답결과의 평균을 산출하였다(<표5>). 이 때, 해당 보기가 틀렸다고 응답한 학생수가 그룹의 20%를 넘는 경

우는 ( )안에 그 수를 표시하여 다른 그룹과 비교가 용이하도록 하였다. 또한, 해당 보기를 가장 선호한 학생수가 20%를 넘는 경우에도 [ ]안에 그 수를 표시하여 학생들의 응답결과를 전체적으로 파악하기 쉽게 자료를 정리하였다.

<표 5> '문제5'의 응답 결과

| 그룹 | | 응답결과(평균) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ |
| A (33명) | A1(20) | 2.15[9] | 2.85 | 3.50(18) | 2.47 | 2.50 |
| | A2(13) | 2.36 | 3.64 | 5.00(10) | 2.64 | 1.36[7] |
| | 그룹평균 | 2.25 | 3.25 | 4.25 | 2.56 | 1.93 |
| B(35명) | | 1.53[22] | 2.06 | 5.00(34) | 3.09 | 3.04(10) |
| C(28명) | | 1.50[20] | 2.39 | 3.00(22) | 3.12 | 2.85 |
| 평균 | | 1.76 | 2.57 | 4.08 | 2.92 | 2.61 |

이렇게 정리한 자료를 활용하여 각 문항에 대한 학생들의 응답결과를 그룹별, 사범대와 비사범대, 우리나라와 미국 등으로 구분하여 그 특성을 분류하였다. 이 과정에서 확인된 결과를 정리하고 통합하여 이 논문의 결론을 도출하고자 한다.

## Ⅳ. 결과 분석

설문조사에 참여한 학생들의 응답결과는 전체 혹은 그룹별로 그 특성을 분석하였다. 이로부터 대학생들이 유리수 개념을 어떻게 이해하고 추론하는지를 끌어내고자 했다.

'문제1'(표1)은 개념과 표현방법의 차이를 학생들이 어떻게 인식하고 있는지를 확인하기 위해 개발된 문항으로 분수를 하나의 표현방법으로 간주하면 $\sqrt{3}/2$도 분수이므로 ③번과 ⑤번만 맞다고 답해야 한다. 하지만 전체 응답자 중에서 겨우 7명만이 ⑤번이 맞다고 응답하였다. 이는 학생들이 '분수가 표현방법인가 수개념인가'와 같은 의문을 가져본 경험이 없거나 분수를 '정수/정수'로 정의할 수 있는 유리수와 동일한 개념으로 인식하고 있음을 보여주는 것이다. 그룹별로는 많은 학생들이 ①,③,④를 선택하여 비슷한 성향을 나타냈지만 A그룹은 ①번과 ④번을 선택한 비율(①,③,④: 76%, 61%, 76%)이 높은 반면 B와 C그룹은 ①번과 ③번을 선택한 비율(①,③,④: 65%, 87%, 46%)이 높아 대조적이었다. 이는 A그룹 학생들이 분수를 자연수나 유리수와 같은 하나의 수 개념으로 인식하고 있음을 보여주는 것인데, A1그룹의 80% 학생들이 ④번을 선택하여 이러한 성향이 특히 더 강한 것을 보여주었다. 한편, 분수가 수학적 개념이면서 동시에 표현방법일 수는 없으므로 ①번과 ③번은 동시에 맞다고 인정할 수 없음에도 불구하고 전체의 52% 학생들이 이 두 가지를 모두 선택하여 이와 관련된 학생들의 개념이 제대로 정립되어 있지 않음을 보여주었다.

'문제2'와 '문제3'은 추상화된 형식적 표현으로서의 유리수가 갖는 다양한 의미를 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 확인하기 위한 의도로 작성되었다. '문제2'에서는 동치인 분수들($1/2=2/4=3/6=\cdots$)을, '문제3'에서는 상황과 관련된 유리수('사과 두 개중 하나'는 1/2이고, '사과 네 개중 두 개'는 2/4)를 제시하고 학생들이 '형식화된 표현'과 '문맥' 사이의 관

계를 어떻게 추론하는지를 확인하고자 하였다.

그 결과, 많은 학생들[4]이 동치인 분수들은 언제나 기약분수로 대체가능하고 그것을 하나의 소수로 표현한 것도 문제가 없다고 보았다. 특히, 각각 86%에 해당하는 C그룹 학생들이 동치분수는 언제나 기약분수 혹은 소수로 대체가능하다고 응답[5]하여 절반정도의 응답비율을 보인 우리나라 학생들과 큰 차이를 나타내었다. 이는 동치인 분수라도 그것이 활용된 상황에 따라 서로 다른 의미를 가질 수 있다는 사실('문제4' 참조)을 감안하면 매우 특이한 결과가 아닐 수 없다. 반면에, C그룹 학생들은 '구체적인 상황을 표현할 때는 동치분수라도 바꿀 수 없는 경우가 생긴다'는 주장에는 39%만이 동의해 수 개념을 구체적인 상황이나 문맥에 영향을 받지 않는 추상화된 형식적 실체로 인식하는 것을 확인할 수 있다. 이는 '동일한 전체에 대한 분할 된 양'이나 '비(비율)'로서는 동치분수들이 같은 의미를 갖는다고 응답한 비율이 각각 85%에 달하는 A그룹과 크게 대비되는 결과이다.

한편, 문맥 속에 포함된 동치분수의 의미를 묻는 '문제3'에 대해 학생들은 명시적으로 비를 지칭하는 동치분수(보기⑤)는 같은 의미를 갖는다는 사실을 비교적 명확히(84%) 알고 있지만 '전체-부분'의 맥락에서는 어떻게 달라지는지를 잘 구분하지 못하는 것으로 드러났다. 다시 말해서, 학생들은 제시된 문맥이 동일한 전체를 전제하지 않았기 때문에 통상적인 '전체-부분'의 맥락에서 해석하면 서로 다른 양을 같다고 하거나 동치인 분수를 다르다고 해야 하는 딜레마[6]에 빠지게 되는 상황을 감지하지 못했다. 이것은 서로 양립할 수 없는 ②과 ⑤번('비'로서 같다)을 동시에 선택한 학생이 35%에 달하는 것에서도 확인된다. 결국 학생들은 문맥에 포함된 유리수가 어떤 의미를 갖는지를 고려하지 않고 추상화 단계인 동치류에 적용되는 알고리즘적 관점으로 모든 상황을 해석하려는 경향이 강하다는 것을 확인시켜 주었다. 어떤 학생은 기타의견으로 '수학교사가 언제나 간단한 형식(기약분수)을 요구했기 때문에 2/4＝1/2이다'라고 해, 학생들의 이러한 특성이 학교교육을 통해 몸에 익은 것임을 확인시켜 주었다.

'문제4'는 특정한 문맥[7] 속에 포함된 유리수(승률)가 분수나 소수로 표현될 때 그 의미가 어떻게 달라지는지와 관련된 학생들의 추론 성향을 확인하기 위한 목적으로 설계되었다. 분수로 표현된 유리수가 동치인 분수나 소수로 변환될 때 그것이 갖는 원래의 의미가 보존되는지와 관련된 일종의 패러독스를 접한 학생들은 다른 문제에서와 비슷한 추론 성향을 나타내었다. 즉, 구체적인 문맥에 상관없이 분수는 언제나 동치인 분수나 소수로 변환이 가능하다고 생각하는 경향이 매우 강했다[8]. 특히, C그룹 학생들 중 몇 명은 '게임 수가 다르기 때문에 비교하기 어렵다'는 기타의견을 제시했지만, 이것이 약분이나 소수표현과 어떻게 연계되는지를 고려하지 않아 단 두 명만 ③번을 선택했다[9]. 결국, 그들은 이 문제에서 제시한

---

4) 동치인 분수를 언제나 기약분수나 소수로 대체할 수 있다고 응답한 학생('문제2'의 ①,②번을 모두 선택한 학생) 수가 전체 학생의 53%에 달함.

5) C그룹 학생들은 기타의견으로 '비가 같으므로' 혹은 '간단한 형식이므로' 등의 의견이 많아 특정한 문맥에 한정한 의미를 수 개념 전체로 확대 해석하는 경향을 보였다.

6) ①번(두 개를 단위로 하면 결국 같다)과 ②번(이 상황에서는 두 수가 다르다) 응답율이 각각 50%와 48%로 비슷하게 나타남.

7) 두 해 A팀, B팀의 승률이 각각 2008년(80전40승, 20전12승), 2009년(20전4승, 80전24승)이라고 하자.

8) ③번(승률을 표시할 때는 약분하거나 소수로만 표현해서는 안 된다) 응답율이 17%이므로 83% 학생들이 문맥에 상관없이 분수는 약분하거나 소수로 표현할 수 있다고 생각한다.

9) 이러한 결과는 미디어의 영향일 수도 있다. 스포츠 중계에서 승률을 말할 때, '00전 00승이므로 승률이 5할에 가깝다'라는 표현이 흔히 등장하는데 이 때 소수로 표현된 뒷부분만으로도 의미가 훼

상황이 분수를 약분하거나 소수로 변환하면 그 결과가 달라지는 것을 여실히 보여주는데도 문맥에 따라 수학적 표현이 갖는 의미가 달라질 수 있음[10]을 인정하지 않았다. 전체적으로도 ②번[11]과 ⑤번을 동시에 선택한 학생 비율이 29%에 불과해 71%에 달하는 학생들이 분수(승률)를 소수로 변환했을 때, 본래의 의미가 훼손될 수 있음을 인식하지 못하는 것으로 나타났다.

유리수 개념의 이해와 관련된 문항(1~4)에서는 그룹들 사이에 응답 성향이 크게 차이나지 않은 반면, 주어진 연산의 해법을 각자가 선호하는 순으로 선택하게 한 문항(5~7)에 대한 응답결과는 그룹들 사이에 큰 차이가 나타났다. 우리나라 공과대학 학생들로 구성된 B그룹은 미국 대학생로 구성된 C그룹 학생들과 비슷한 응답 성향을 나타낸 반면, 이들 그룹과 우리나라 사범대학생들로 구성된 A그룹의 응답 성향은 상당한 차이를 보였다. 전체적으로는 B,C그룹 학생들이 메커니즘적 방법을 포함한 전형적인 알고리즘적 해법을 선호한 반면에 A그룹 학생들은 알고리즘 처리 이유가 포함된 개념적 접근을 더 선호하였다.

'문제5'는 유리수 덧셈($1/2+1/3$)에 대한 해법의 선호 정도를 묻는 문항(표2)으로, ①,②번은 이유가 설명되지 않은 알고리즘적 접근 방법, ④,⑤번은 통분하는 이유를 포함한 해법을 제시하였다. 그 결과, ③번은 그룹에 상관없이 대부분의 학생들이 틀렸다고 응답하였지만 B,C그룹이 ①,②번을 선호한 반면, A그룹은 ⑤번을 가장 선호하였다[12]. 사범대학 3학년 학생들로 구성된 A2그룹은 ⑤번에 대한 선호정도(1.36)가 가장 커 B그룹(3.04)이나 C그룹(2.85)[13]과 큰 차이를 나타냈다. 한편, ④번과 ⑤번은 구조적으로 같음에도 불구하고 A2그룹은 말로 설명된 ④번(2.64)보다는 ⑤번(1.36)을 훨씬 더 선호하여 사범대학생들이 모델을 활용한 지도방법에 익숙해지는 경향을 나타내었다.

'문제6'은 유리수 나눗셈($2\div 2/3$)에 대한 다양한 해법을 제시한 후에 선호 정도를 묻는 문항으로 ①번은 이유가 설명되지 않은 메커니즘적 방법(역수를 취해 곱하는 방법)이고 다른 네 개는 연산수행 과정에 논리적 근거가 포함되어 있다. 하지만, 전체적으로 학생들은 메커니즘적 방법(①번)을 가장 선호[14]하였다. 이런 성향은 A그룹(2.05)에 비해 B,C그룹(각각 1,29, 1.52)에서 더 강하게 나타났다. 그림을 활용한 나눗셈의 원리[15]에 의해 문제를 해결한 ④번에서도 A그룹(2.26)과 B,C그룹(각각 3.09, 3.11) 사이에 인식 차이를 확인할 수 있다. 뿐만 아니라, B,C그룹의 59% 학생들은 이 방법이 틀렸다고 응답함으로써 유리수 연산 도입과정에서 모델을 활용한 학습경험이 거의 없었거나 이들의 이해가 전형적인 형식적 알고리즘에 한정되어 있음을 보여주었다. 특히, ⑤번의 경우는 ①번의 결과가 도출되는 이유를 설명하고 있음에도 C그룹 학생들의 ①번(1.52)과 ⑤번(3.75)에 대한 응답결과는 극과 극의 양상을 나타내어 이들이 연산 원리보다는 기계적인 암기에 의존한 기호처리에 익숙해져 있음을 확인시켜 주었다.

'문제7'은 비례식($5/6=x/9$)에 대한 다양한 해법을 제시한 후에 선호 정도를 묻는 문항

---

손되지 않는다고 생각할 수 있다.

10) C그룹의 ⑤번(분수와 소수가 변환되면 안 되는 것을 보여주는 좋은 예이다) 응답율이 32%에 불과함.

11) 두 해 모두 B팀 승률(소수)이 높지만 합계에서 A팀 승률이 높으므로 A팀이 더 잘한다.

12) A그룹과 B,C그룹의 응답 결과(평균) 비교: ①(2.25:1.52), ②(3.25:2.23), ④(2.56: 3.10), ⑤(1.93: 2.94).

13) 상당수의 C그룹 학생들은 ⑤번에서 제시한 그림이 잘못되었다는 기타의견을 제시하였다.

14) '문제6'에 대한 응답 결과(평균) 비교: ①(1.62), ②(3.05), ③(2.60), ④(3.07), ⑤(3.38).

15) 여섯 개의 1/3로 구성된 2에서 2/3가 강조된 사각형 모델.

으로 연산원리를 설명한 다른 보기와는 다르게 ③번(분모와 분자를 교차해서 곱하는 방법)은 원리가 포함되지 않은 메커니즘적인 해법이다. 그럼에도 불구하고, B그룹과 C그룹은 각각 46%, 68% 학생들이 ③번을 가장 선호하는 방법으로 선택하여 비슷한 성향을 나타낸 반면 A그룹(2.30)과는 상당한 차이를 보였다. 특히, 상당수의 C그룹 학생들은 '교차곱셈(cross multiply)'이 이런 문제를 푸는 가장 간단하고, 가장 쉬운 방법이라는 기타의견을 제시함으로써 전형적 해법을 암기하고 활용하려는 성향을 보여주었다. 이에 반해, A그룹은 등식의 성질을 이용한 ②번 해법(양변에 9를 곱한 방법)을 가장 좋다고 생각한 학생이 58%(A1:50%, A2: 69%)로 평균이 1.77에 달해 C그룹(2.22)과는 차이가 나면서 B그룹(1.96)과 비슷한 성향을 나타내었다. 이는 ②번 해법이 우리나라 수학교과서에서 많이 소개된 것에 따른 것으로 보인다. 한편, ②번과 ④번(양변에 6/5를 곱한 방법)은 구조적으로 같은 방법임에도 불구하고 학생들의 응답결과에는 큰 차이가 나타나 학생들이 원리에 의한 개념적 접근보다는 유형별 전형적인 풀이법에 종속적으로 사고하는 것을 확인할 수 있었다.

무엇보다 '문제7'과 관련된 놀라운 결과는 ①번과 ⑤번에 대한 학생들의 반응이다. 이 문제에서 제시한 상황은 비례식으로, 가장 수학적인 접근은 비례추론(두 분모의 관계가 두 분자의 관계와 같다)에 의한 것이다. 그리고 이 비례추론에 가장 충실한 풀이가 ①번과 ⑤번이다[16]. 그럼에도 불구하고, 학생들은 이 두 방법을 선호하지 않았다. 특히, 수학교육과 3학년들로 구성된 A2그룹의 46% 학생들이 ①번이 틀렸다고 응답하고 ⑤번에 대한 각 그룹의 선호도가 현저히 낮은 것은 비례식 지도가 비례추론을 활용하여 개념적으로 접근되지 않고 등식의 성질에 의하거나 메커니즘적 방법으로 지도되었음을 추정할 수 있게 한다.

## V. 결 론

많은 학생들은 '유리수는 무엇인가?'라는 질문에 '정수/정수'라고 답변하고 스스로 만족스러워 한다. 그 이유를 물으면, 대부분의 학생들은 그것이 정의이기 때문이라고 답변한다. 이 때, '유한소수나 순환소수'라고 정의하면 안 되는지를 물으면 고개를 갸우뚱하면서 곤란하다는 표정을 짓는다. 학생들뿐만 아니라 수학교사들도 수학적 개념과 그 개념을 특정한 방식으로 규정한 정의를 동일시하려는 경향이 있다. 이는 '아무개가 누구인가?'라고 물을 때, 그 사람의 이름이나 주민번호를 알려주고 충실하게 답변했다고 만족스러워하는 것과 크게 다르지 않다. 사람의 이름이 그 사람을 아는 것의 한 척도는 될 수 있지만 전부는 아니다. 그 사람을 잘 알고 있다는 것은 그 사람의 성격, 가치관, 관심사, 성장배경, 직업, 가족관계.. 등등 상황에 따라 그 사람을 설명할 수 있는 많은 정보들을 알고 있다는 것이다. 이러한 정보가 통합되어 그 사람을 의미하게 되는 것이다. 그 사람의 자녀를 알지도 못하는데 '그 사람은 000의 아빠야'라고 설명한다면 그것은 별 의미 없는 정보이다. 마찬가지로, '정수/정수'는 유한소수나 순환소수가 될 수밖에 없으며 그 역도 성립한다는 사실을 알기까지는 고개를 갸우뚱하는 학생들의 의문점은 풀리지 않을 것이며, 유리수를 '정수/정수'로 설명하는 것도 의미가 없다. 더구나 유리수라는 용어는 정수보다 훨씬 더 긴 역사를 가지고 있다는 것을 고려하면 오히려 이런 설명이 논리적으로 맞지 않을 수도 있다. 유리수를 탐구하는 것은 한 사람을 탐구하는 것과 같이 다양한 정보를 필요로 한다. 한 사람의 직업이나 성장배경을 같

16) ①번: $9=6\times3/2$이므로 $x=5\times3/2=15/2$이다.
⑤번: $5/6=5\times15/6\times15=75/90=7.5/9$ 이므로 $x=7.5$이다.

은 방식으로 설명하기 힘들듯 유리수의 여러 가지 측면을 설명할 때도 다양한 문맥이 필요하다.

유리수의 '전체-부분'의 측면을 상징한 분수가 유리수와 동일시 될 수 있다면 유리수라는 용어가 필요 없게 된다. 그렇다고 분수를 개념화하여 유리수와 동일한 것으로 취급하는 것은 유리수가 갖는 다양한 측면을 드러내는데 한계가 있다. 그래서 수학적 표현과 개념적 측면을 동시에 갖는 분수로 시작하여 동치류로 형식화하는 학습과정에서 학생들은 여러 측면이 통합된 유리수 개념의 수학적 특성을 이해해야 한다. 그런 다음, 학생들은 분수는 소수처럼 하나의 표현방식이라는 것을 이해할 수 있어야 한다. 그럼에도 불구하고, 대부분의 학생들이나 수학교사들은 이런 일련의 과정에 의문을 제기하지 않으며 정의에 의존한 형식적 알고리즘을 기억하는데 많은 에너지를 소비한다. 이러한 불합리함을 실제로 확인하여 유리수 지도의 방향을 설정하는데 도움을 얻기 위해 설계된 본 연구에서는 이미 유리수 개념의 제 측면을 학습한 대학생들을 대상으로 설문조사를 실시하여 관련 자료를 수집하였다.

그 결과, 대부분의 학생들은 분수와 유리수를 개념적으로 구분하지 못했으며 유리수를 '정수/정수'로만 생각하는 경향이 강했다. 특히, 분수를 자연수나 유리수와 같은 수학적 개념으로 보기도 하고 표현방법으로 해석하기도 하는 등 개념이 제대로 정립되지 않고 혼란스러운 상태임을 보여주었다.

학생들은 유리수 개념이 갖는 '전체-부분', '비나 비례' 등의 측면과 관련된 문맥 속에서도 유리수의 최종적 추상화 단계인 '동치류' 측면으로 이해하려고 하였으며 이들 측면이 어떻게 다른지를 전혀 감지하지 못하고 형식화된 표현에 집착하는 경향을 나타냈다.

특히, 유리수가 분수나 소수로 표현될 때 그 의미가 달라질 수 있는 상황을 마주하고도 이런 표현들이 어떤 상황에서나 변환될 수 있다는 비논리적인 추론 성향을 나타내었다.

한편, 유리수 연산과 관련된 학생들의 추론은 그룹별로 큰 차이를 나타냈다. 미국대학생들과 우리나라 공과대학생들은 논리적 근거보다는 기억에 의존하는 성향을 강하게 드러냈다. 그들은 논리적 근거가 포함된 해법보다 메커니즘적으로 접근한 해법을 선호하였으며, 논리적 관계를 따지기보다 최대한 간단한 풀이를 선호하는 성향을 드러냈다. 반면에, 사범대학생들은 메커니즘적 방법보다는 모델을 활용한 추론을 선호하여 위의 두 그룹과 크게 대비되었다.

설문조사에 참여한 대학생들은 유리수가 갖는 제 측면과 관련된 상황에 대해 각 측면이 갖는 고유한 기준으로 추론하지 못했다. 대부분의 학생들이 전체-부분, 비, 동치류 등과 관련된 상황을 구분하지 못해 이율배반적인 추론을 하였다. 특히, 비례식 상황에서 비례추론에 의한 논리적 접근 방식보다는 기계적인 접근 방법을 더 선호하였으며 많은 학생들이 비례추론에 의한 방법이 틀렸다고 응답함으로써 이들이 비례 개념을 학습하는 과정에서 개념적 접근이 이뤄지지 않았음을 보여주었다.

유리수 개념은 다른 설명 없이 '정수/정수'라고 간단하게 설명할 수 있는 단순한 개념이 아니라 여러 가지 측면이 통합된 추상화된 개념이다. 유리수의 이런 특성으로 인해, 유리수를 최후의 추상화되고 형식화된 모습으로 도입하면 이 연구에서 확인된 것처럼 학생들에게 많은 논리적 오류를 유발시킬 수 있다. 따라서, '전체-부분'의 측면으로 도입되어 '동치류'의 측면으로 확장되어 갈 때 교사들은 학생들이 이전에 배운 측면과 새로 도입한 측면이 어떻게 같고 혹은 어떤 측면에서 달리 해석될 수 있는지를 탐구할 기회를 제공해야 한다. 이런 과정을 통해 학생들은 최후의 형식화된 표현이 구체적인 상황 속에서 어떤 의미를 갖게 되는지를 진지하게 고민하는 자세를 배워야 한다. 교사들은 이 과정에 활용할 수 있는

많은 예[17]들을 확보해야 한다. 이렇게 할 때만 우리 학생들이 '계산은 하되 그것이 무엇을 의미하는지 모르는 계산의 달인'이 되는 상황을 막을 수 있다.

## 참고문헌

Ball, D. L. (1992). Magical hope: Manipulatives and the reform of math education. American Educator, 16,14-18.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? In P. Trafton (Ed.), New directions for elementary school mathematics (pp. 156-167). Reston, VA: NCTM.

Carpenter, T. P. (1986). Conceptual knowledge as a foundation for procedural knowledge. In J. Hiebert (Ed.), Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics (pp. 113-132). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cramer, K., & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition of fractions. In B. Litwiller (Ed.), Making sense of fractions, ratios, and proportions (pp. 41-48). Reston, VA: NCTM.

Cramer, K., Post, T., delMas, R. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 33, 111-144.

Cramer, K., & Wyberg, T. (2007). When getting the right answer is not always enough: Connecting how students order fractions and estimate sums and differences. In E. Portia (Ed.), The learning of mathematics (pp. 205-220). Reston, VA: NCTM.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fraction operation sense. In B. Litwiller (Ed.), Making sense of fractions, ratios, and proportions (pp. 72-78). Reston, VA: NCTM.

Kamii, C., & Warrington, M. A. (1999). Teaching fractions: Fostering children's own reasoning. In L. V. Stiff (Ed.), Developing mathematical reasoning in grade K-12(pp. 82-92). Reston, VA: NCTM.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. J. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades(pp. 162-181). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers Mathematics. (2000). Principles and standards for school

17) 본 연구에서 개발된 설문조사 문항과 같은 예.

mathematics. Reston, VA: NCTM.

Smith, J. P. III. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller (Ed.), Making sense of fractions, ratios, and proportions (pp. 3-17). Reston, VA: NCTM.

Thompson, R., Austin, A., & Beckmann, E. (2002). Using literature as a vehicle to explore proportional reasoning. In B. Litwiller (Ed.), Making sense of fractions, ratios, and proportions (pp. 130-137). Reston, VA: NCTM.

Towsley, A. (1989). The use of conceptual and procedural knowledge in the learning of concepts and multiplication of fractions in grades 4 and 5. Unpublished doctoral dissertation, University of Michigan.

# University Students' Understanding and Reasoning about Rational Number Concept

Kang, Yun Soo[18] · Chae, Jeong-Lim[19]

## Abstract

The purpose of this paper is to investigate the dispositions of university students' understanding and reasoning about rational number concept. For this, we surveyed for the subject groups of prospective math teachers(33), engineering major students(35), American engineering and science major students(28). The questionnaire consists of four problems related to understanding of rational number concept and three problems related to rational number operation reasoning. We asked multi-answers for the front four problem and the order of favorite algorithms for the back three problems. As a result, we found that university students don't understand exactly the facets of rational number and prefer the mechanic approaches rather than conceptual one. Furthermore, they reasoned illogically in many situations related to fraction, ratio, proportion, rational number and don't recognize exactly the connection between them, and confuse about rational number concept.

Key Words : Fraction, Ratio, Proportion, Rational number, University students' understanding and reasoning

---

18) Sunchon National University (yskang@sunchon.ac.kr)
19) University of North Carolina at Charlotte (jchae@uncc.edu)