

개선된 피라미드 네트워크에서 토러스 부그래프의 사이클 확장성

장 정 환[†]

요 약

피라미드 그래프는 병렬처리 분야에서 정방형 메쉬와 트리 구조를 기반으로 하는 상호연결망 위상으로 잘 알려져 있다. 개선된 피라미드 그래프는 이러한 피라미드 그래프보다 성능을 향상시키기 위해 메쉬를 토러스로 대체시킨 구조를 말한다. 본 논문에서는 개선된 피라미드 그래프의 각 계층을 형성하고 있는 기반부-그래프로서의 정방형 토러스 그래프의 간선들을 두 개의 서로 다른 그룹으로 분류하는 전략을 채택한다. 토러스 그래프 내의 간선 집합은 해당 간선의 양 끝 정점들에 인접된 부모 정점들이 상위 계층에서 서로 인접하는지 아니면 공유하는 관계 인지에 따라 각각 *NPC*-간선과 *SPC*-간선이라 불리는 두 개의 서로 다른 부분집합으로 나누어 고려한다. 아울러 원래 그래프에서의 *SPC*-간선들을 압축된 결과 그래프에서는 압축된 슈퍼-정점 내부로 은닉시킴으로써 *NPC*-간선들에 대해서만 초점을 맞추도록 하기 위해 압축 그래프의 개념을 소개한다. 본 연구에서는 $2^n \times 2^n$ 2-차원 정방형 토러스 내에서 헤밀تون 사이클 구성 시 포함할 수 있는 *NPC*-간선 개수의 하한 및 상한이 각각 2^{2n-2} 와 $3 \cdot 2^{2n-2}$ 임을 분석한다. 이 결과를 개선된 피라미드 그래프로 확장시킴으로써 개선된 n -차원 피라미드 그래프 내에서 헤밀تون 사이클에 포함할 수 있는 *NPC*-간선의 최대 개수는 $4^{n-1} - 2n+1$ 개임을 증명한다.

Cycle Extendability of Torus Sub-Graphs in the Enhanced Pyramid Network

Jung-Hwan Chang[†]

ABSTRACT

The pyramid graph is well known in parallel processing as a interconnection network topology based on regular square mesh and tree architectures. The enhanced pyramid graph is an alternative architecture by exchanging mesh into the corresponding torus on the base for upgrading performance than the pyramid. In this paper, we adopt a strategy of classification into two disjoint groups of edges in regular square torus as a basic sub-graph constituting of each layer in the enhanced pyramid graph. Edge set in the torus graph is considered as two disjoint sub-sets called *NPC*(represents candidate edge for neighbor-parent) and *SPC*(represents candidate edge for shared-parent) whether the parents vertices adjacent to two end vertices of the corresponding edge have a relation of neighbor or sharing in the upper layer of the enhanced pyramid graph. In addition, we also introduce a notion of shrink graph to focus only on the *NPC*-edges by hiding *SPC*-edges within the shrunk super-vertex on the resulting shrink graph. In this paper, we analyze that the lower and upper bounds on the number of *NPC*-edges in a Hamiltonian cycle constructed on $2^n \times 2^n$ torus is 2^{2n-2} and $3 \cdot 2^{2n-2}$ respectively. By expanding this result into the enhanced pyramid graph, we also prove that the maximum number of *NPC*-edges containable in a Hamiltonian cycle is $4^{n-1} - 2n+1$ in the n -dimensional enhanced pyramid.

Key words: Torus(토러스), Enhanced Pyramid Graph(개선된 피라미드 그래프), Hamiltonian Cycle(헤밀تون 사이클), Shrink Graph(압축 그래프)

* 교신저자(Corresponding Author): 장정환, 주소: 부산광역시 남구 석포로 15 (608-738), 전화: 051)640-3409, FAX: 051)640-3575, E-mail: jhchang@pus.ac.kr

접수일: 2009년 11월 16일, 수정일: 2010년 4월 19일
완료일: 2010년 5월 7일

[†] 정회원, 부산외국어대학교 디지털미디어학부 부교수

1. 서 론

대규모 병렬처리시스템에서 다양한 응용분야의 알고리즘들을 효율적으로 수용하여 제 성능을 발휘할 수 있도록 하기 위해서는 시스템을 구성하고 있는 정점(vertex, node)들의 연결 구조를 그래프 형태로 표현한 상호연결망(interconnection network) 위상의 역할이 매우 중요한데, 그 이유는 해당 그래프에 대한 이론적인 특성에 해당 병렬처리시스템의 성능이 의존적일 수밖에 없기 때문이다. 일반적으로 상호연결망의 성능에 큰 영향을 미치는 그래프 이론적인 요소로는 지름(diameter), 연결도(connectivity), 고장 허용도(fault tolerance), 라우팅 알고리즘의 간결성 및 효율성 등이 중요하게 평가되고 있는데, 이러한 요소들을 비교 분석하여 보다 좋은 성능의 상호연결망을 설계하려는 시도는 그래프 이론 및 병렬처리 분야에서 많은 관심을 받고 있다. 뿐만 아니라 알고리즘에 내재된 자료구조를 실제 구현된 시스템 구조에 효율적으로 매핑시키거나, 상호연결망 상호간 시뮬레이션을 위한 체계적인 접근으로서 그래프 임베딩(embedding) 문제가 대두하게 되었다[1,2].

지난 수십 년 동안 많은 관심을 받아 온 대표적인 상호연결망으로는 하이퍼큐브(hypercube 또는 (이진) n -큐브)를 꼽을 수 있으며[3], 피라미드(pyramid)와 메쉬(mesh) 및 토러스(torus) 또한 병렬처리분야에서 비교적 잘 알려진 상호연결망 구조 중 하나로 널리 이용되고 있는 실정이다[4,5].

높이 N 인 피라미드(pyramid)는 각 계층이 4^k 형태의 크기를 갖는 서로 다른 메쉬 구조를 부그래프로 보유하는 N 개의 계층적 구조로 이루어짐으로써 자연스럽게 핵심 단위 영상처리 등과 같이 계층적 데이터 처리모델을 갖는 멀티미디어 응용분야 등에 효율적인 것으로 알려져 있을 뿐만 아니라 내재된 트리(tree) 및 메쉬(mesh) 구조의 특성을 활용한 그래프 관련 문제들의 해결에도 유용한 것으로 알려져 있다 [6-11].

2차원 토러스(2-dimension torus) 그래프는 비교적 널리 잘 알려진 2차원 메쉬(2-dimension mesh) (또는 grid)의 모서리 정점들에서의 규칙성 결여 문제 해결을 위해 랩어라운드 간선(wrap-around edge)을 추가시켜 확장한 상호연결망 모델 중 하나로써 구조가 비교적 단순하여 확장성이 뛰어날 뿐만 아니

라 효율적인 평면배치(layout) 등의 장점을 갖는 것으로 알려져 있다[4,5,12].

최근에는 피라미드(pyramid)의 기반 그래프를 형성하고 있는 메쉬 구조에서의 정점 상호간 비대칭성(asymmetry)을 개선하기 위해 메쉬를 토러스(torus) 구조로 대체시킨 개선된 피라미드(enhanced pyramid) 상호연결망이 제안되었으며 이와 관련된 여러 연구 결과들이 알려져 오고 있다[13,14].

상호연결망 그래프에 내재된 사이클 특성을 분석한 연구들이 갖는 의의는 다양한 응용분야에 적용되고 있는 대부분 알고리즘들의 수행에 필요한 기본 자료구조일 뿐만 아니라 수많은 프로세서들로 구성된 다중컴퓨터 병렬처리시스템에서 사이클 기반의 방송 또는 멀티캐스팅 형태의 메시지 전달 과정을 필요로 하는 응용분야에서 하부구조로 사이클 특성을 활용하고 있는 점을 예로 들 수 있다[15].

다중 컴퓨터 병렬처리시스템에서 노드(node)를 구성하는 프로세서 상호간에 일-대-다(one-to-many) 통신을 수행하는 멀티캐스팅 형태의 정보교환 과정에서 요구되는 라우팅 기법 중에서 통신 자원 상호간에 교착상태(deadlock)가 발생하지 않도록 보장해주기 위한 기법 중 하나로 사용하는 경로-기반(path-based) 라우팅에서는 전체 노드를 포함하는 헤밀تون 사이클(Hamiltonian cycle) 구성이 전제가 될 때 이러한 경로를 차례로 방문하면서 내용을 전달하게 되는데 이러한 특성을 보장하기 위한 이론적인 관련 연구가 링 임베딩(ring embedding) 문제이며, 이는 고장이 없는 상황에서는 물론이고 프로세서나 통신 채널 상에서의 고장이 발생 가능한 상황에서도 해당 사이클이 존재할 수 있음을 밝히는 고장-허용 임베딩(fault-tolerant embedding)에 대한 연구로 확장되어 연구되고 있다.

본 논문에서는 개선된 피라미드 그래프의 기본 구조를 형성하고 있는 $2^n \times 2^n$ 2차원 정방형 토러스 그래프에서 헤밀تون 사이클을 구성함에 있어서 특별한 의미를 갖는 간선들을 얼마나 많이 포함시킬 수 있는지 그 개수의 하한 및 상한값을 분석함으로써 고장허용과 관련된 그래프 특성 분석에 활용가능한 연구 결과를 제시한다.

일반적으로 그래프 G 내에서 임의의 k 개 간선이 고장으로 제거된 상태에서도 헤밀تون 사이클을 구성할 수 있을 때 그래프 G 가 ' k -간선 고장-허용 헤밀تون

(*k-edge fault-tolerant Hamiltonian*)' 특성을 갖는다고 하는데, 최소 분지수(degree) d 인 그래프에서는 최소 분지수를 가지는 정점에 인접된 d 개의 간선들 중에서 최소한 2개의 간선은 고장 없이 남아 있어야만 해당 정점을 헤밀تون 사이클 구성 시 포함시킬 수 있기 때문에 ($d-2$)-간선 고장-허용 헤밀تون 특성을 보유하게 됨을 쉽게 알 수 있으므로 간선에서의 고장을 다루는 고장-허용 헤밀تون 사이클 임베딩 문제의 경우에 대상 그래프의 최소 분지수는 간선에서의 고장-허용 정도를 가늠할 수 있는 기본적인 척도가 되고 있는 셈이다[16].

그러나 이러한 분지수가 척도로 의미를 갖는 경우는 모든 고장이 최소 분지수를 갖는 정점에 인접된 주변의 간선들로 집중된 특별한 경우의 패턴에 한정된 사례일 뿐 현실적으로 발생 가능성이 희박하므로 이러한 척도는 이론적으로는 최악의 상황을 고려한 이상적인 값일지는 몰라도 현실적으로는 큰 의미를 부여하기 어렵다. 이런 비현실적인 고장-허용도를 극복하고 보다 현실적으로 의미 있는 한계값을 구하기 위한 노력의 일환으로 특별히 주어진 조건 하에서 보다 많은 정점 또는 간선에서의 고장에도 불구하고 남아있는 자원들만을 이용하여 헤밀تون 사이클을 구성할 수 있음을 밝히는 방향으로의 연구 결과들이 많이 제시되고 있는데[17-20], 본 논문에서도 이러한 접근법의 일환으로 사이클 구성 시 간선들의 우회 가능성 등 활용 역할에 따라 간선들을 분류하고, 분류된 특정 간선 그룹별로 고장-허용 관련 특성을 분석함으로써 보다 많은 간선에서의 고장-허용 정도를 보장할 수 있는 간선 그룹별 조건을 찾고자 하는 시도의 관점에서 간선들의 그룹화 인자 요소 발굴에 주목하게 되었다.

본 논문의 주관심 대상인 개선된 피라미드 그래프의 경우에 최소 분지수는 4이기 때문에 2-간선 고장-허용 헤밀تون 특성을 갖지만 세 개 이상의 간선에서 고장이 발생하는 경우라 하더라도 특정 조건만 회피한다면 대부분의 경우에 충분히 더 많은 고장을 감내 할 수 있기 때문에 이를 위한 체계적인 관점의 접근이 필요하다.

본 논문에서 주목하고 있는 피라미드 그래프에서 간선들은 크게 두 부류로 나눌 수 있는데 그 분류의 기준은 인접된 계층으로의 사이클 확장 가능성 여부에 따른 것이다. 이러한 요소의 중요성은 인접 계층

으로의 확장까지 가능한 경우에는 보다 많은 우회 경로 확보가 가능하지만 그 외의 간선들처럼 단일 계층에서의 확장만 가능한 경우에는 다양한 우회 경로를 만들기 어렵기 때문에 우회 경로의 확장 가능성 면에서 중요한 인자라고 판단하여 해당 간선의 개수가 고장-허용 헤밀تون 사이클 구성에 있어 중요한 고려사항이 될 수 있다고 판단한 것이다.

본 논문은 네 개의 절로 구성되는데, 이어지는 제2절에서는 본 논문에서의 주요 관심 그래프 모델에 해당하는 토러스 및 개선된 피라미드 그래프에 대한 정의와 사이클 관련 연산의 주요 개념들에 대해 살펴보고 제3절에서는 개선된 피라미드 그래프의 부그래프로서 2^n -정방형 토러스 그래프를 대상으로 고장 허용 관련 간선 특성을 분석하며, 마지막 제4절에서 결론을 맺는다.

2. 기본 그래프 특성

본 절에서는 주요 대상 그래프에 해당하는 2^n -정방형 토러스 및 개선된 피라미드 그래프에 대한 정의와 그래프 이론적 관점에서의 주요 특성들을 살펴보고자 한다.

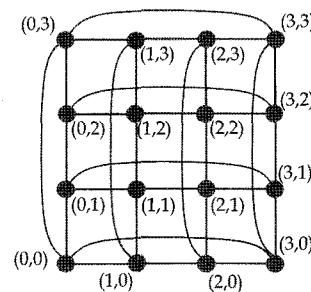


그림 1. 2^2 -정방형 토러스 ST^2

[정의 1] 한 변의 길이가 2^n ($n \geq 2$)인 2차원 정방형 토러스(*regular square torus*)(줄여서 2^n -정방형 토러스) ST^n 은 정점들의 집합 $V(ST^n)$ 과 간선들의 집합 $E(ST^n)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다(그림 1 참조).

$$1) V(ST^n) = \{(x,y) \mid 0 \leq x, y < 2^n\}$$

$$2) E(ST^n) = \textcircled{1} \cup \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} = \{((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mid |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1\}$$

$$\textcircled{2} = \{((x, 2^n-1), (x, 0)) \mid 0 \leq x < 2^n\}$$

$$\cup \quad \{((2^n-1, y), (0, y)) \mid 0 \leq y < 2^n\}$$

그림 1에서 확인할 수 있는 바와 같이 2^n -정방형 토러스 그래프는 동일 크기의 정방형 메쉬를 기반으로 하여 정점의 수는 동일하되 간선은 위 정의에서 ②로 주어진 랩어라운드(wraparound) 간선을 추가 시킴으로써 메쉬에서의 정점 상호간 분지수(degree) 분균형 문제를 해결해줌으로써 규칙성(regularity)을 보완한 구조로 이해할 수 있다.

[정의 2] 높이(height)가 $N(N>2)$ 인 개선된 피라미드 그래프(enhaned pyramid graph) EP^N 은 정점의 집합 $V(EP^N)$ 과 간선의 집합 $E(EP^N)$ 에 의해 다음과 같이 정의한다.

- 1) $V(EP^N) = \bigcup_{0 \leq l \leq N-1} \{(l, x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 2^{N-l-1}-1\}$
- 2) $E(EP^N) = \textcircled{1} \cup \textcircled{2} \cup \textcircled{3}$
- $\textcircled{1} = \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{((l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2)) \mid |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1\}$
- $\textcircled{2} = \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{((l, x, 2^l-1), (l, x, 0)) \mid 0 \leq x < 2^l\}$
- $\textcircled{3} = \bigcup_{0 \leq l \leq N-2} \{((l, x, y), (l+1, \lfloor x/2 \rfloor, \lfloor y/2 \rfloor)) \mid 0 \leq x, y < 2^{N-l-1}\}$

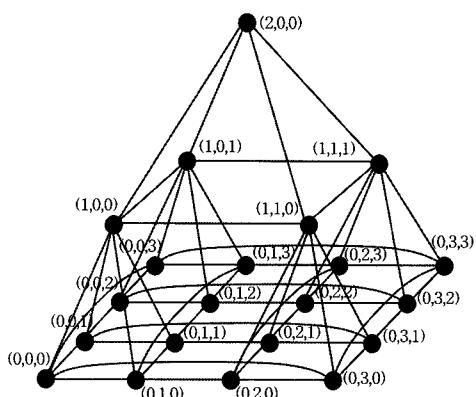


그림 2. 높이 3인 개선된 피라미드 그래프 EP^3

일반적으로 높이가 N 인 개선된 피라미드 EP^N 의 각 계층 $l(0 \leq l < N)$ 에는 4^{N-l-1} 개의 정점들로 구성된 2-차원 정방형 토러스 $2^{N-l-1} \times 2^{N-l-1}$ 구조로 이루어져 있어 가장 위 계층에 해당하는 계층 $N-1$ 의 1개의 정점으로 구성된 2-차원 토러스로부터 시작하여 가장 아래 계층에 해당하는 계층 0의 4^{N-1} 개로 구성된 2-차원 토러스까지 다양한 부그래프들을 포함하고 있음을 알 수 있다(그림 2 참조).

[정의 3] 임의의 그래프(graph) $G=(V,E)$ 에서의 경로(path)란 시작 정점 v_i 로부터 연속하여 인접된 간선을 따라 연속적으로 나열된 정점들의 정렬($v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$)을 의미하며, 특별히 간선의 중복 방문이 허용되지 않도록 각 구성 정점들의 분지수(degree)가 최대 2로 제한된 경로를 단순 경로(simple path)라고 일컫는다. 특별히 시작 정점과 마지막 정점 간에 연결 간선을 갖는 닫힌 단순 경로(closed simple path)를 사이클(cycle)이라고 하며 그래프 G 내의 모든 정점들을 포함하는 최대 길이의 단순경로를 헤밀تون 사이클(Hamiltonian cycle)이라고 일컫고 $HC(G)$ 로 표기한다.

주어진 경로의 길이(length)란 해당 경로를 구성하고 있는 간선들의 개수를 의미한다. 즉 n 개의 정점 $(v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n)$ 로 구성된 경로 T 와 해당 경로의 길이를 각각 $T = (v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n)$ 및 $|T|$ 로 표기하며, $|T|=n-1$ 이다.

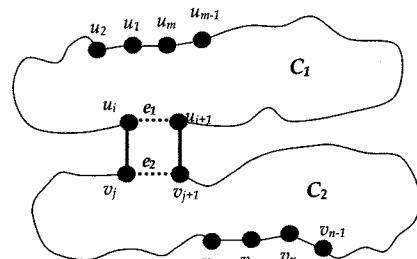


그림 3. 사이클 결합 연산

[정의 4] 그래프 G 내에서 길이가 각각 m 과 n 이고 $C_A \cap C_B = \emptyset$ 인 두 사이클 $C_A = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ 과 $C_B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ 에 각각 존재하는 두 간선 $e_1 = (u_i, u_{i+1}) \in C_A$ 과 $e_2 = (v_j, v_{j+1}) \in C_B$ 를 회생(제거)시키는 대신, 현재 C_A 와 C_B 의 어디에도 속해있지는 않지만 관련이 있는 두 간선 (u_i, v_j) 와 (u_{i+1}, v_{j+1}) 를 새롭게 사이클 소속 간선으로 참여시키는 매개로 이용하는 사이클 결합 연산(cycle merge operation) \oplus 를 다음과 같이 정의한다(그림 3 참조).

$$C_A(e_1) \oplus C_B(e_2) = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i v_j, v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_2, v_1, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{j+2}, v_{j+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{m-1}, v_m)$$

이러한 사이클 결합 연산의 결과로 새롭게 결합된 사이클 $C_A(e_1) \oplus C_B(e_2)$ 의 크기는 결합 전 각 사이클 크기의 합에 해당하는 $m+n$ 이 된다.

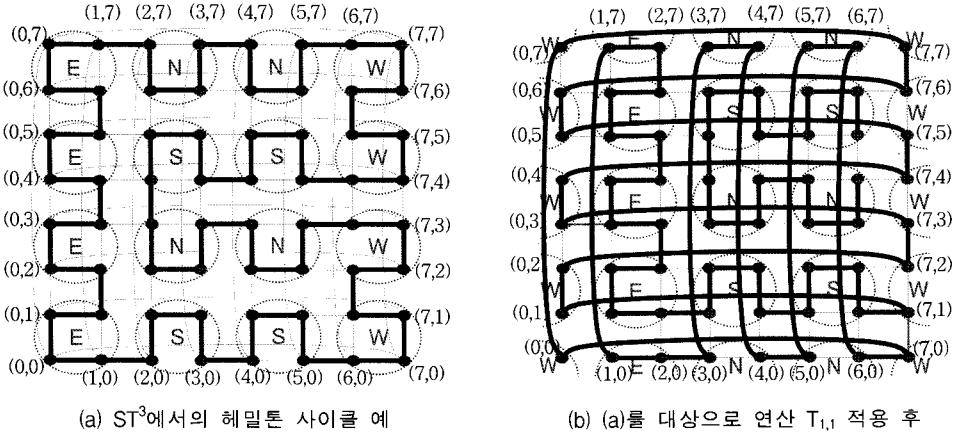


그림 4. 사이클 이동 연산

[정의 5] 임의의 $2^n \times 2^n$ 정방형 토러스 ST^n 내의 임의의 간선 $e=((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ 와 정수 a, b 에 대해 이동 (translation) 연산 $T_{a,b}(e)$ 는 간선의 양 끝 정점을 각각 x -축 및 y -축 방향으로 각각 a 및 b 만큼씩 좌표 이동시키는 연산으로 다음과 같이 정의한다.

$$T_{a,b}(e) = (((x_1+a)\%2^n, (y_1+b)\%2^n), ((x_2+a)\%2^n, (y_2+b)\%2^n))$$

아울러 길이 $m (\geq 2)$ 인 단순 경로 $P=(e_1, e_2, \dots, e_m)$ 에 대한 이동 연산 $T_{a,b}(P)$ 역시 P 에 속한 각 간선 e_i 에 대한 이동 연산들로 확장 해석할 수 있다([그림 4] 참조).

[정의 6] 개선된 피라미드 그래프 $EP^N (N > 2)$ 의 계층 l 을 형성하고 있는 부그래프(sub-graph)에 해당하는 $2^{N-l-1} \times 2^{N-l-1}$ 2차원 정방형 토러스 S 내에 소속된 간선 $e=((l, x_1, y_1), (l, x_2, y_2))$ 의 양 끝 정점에 해당하는 두 정점 (l, x_1, y_1) 과 (l, x_2, y_2) 가 아래의 조건 중 하나를 만족하는 경우에 간선 e 를 인접-부모 간선(NP-간선; Neighbor-Parent edge)이라고 한다.

- (1) $\lfloor x_1/2 \rfloor - \lfloor x_2/2 \rfloor = 1 \quad \&\& \quad y_1 = y_2$
- (2) $\lfloor y_1/2 \rfloor - \lfloor y_2/2 \rfloor = 1 \quad \&\& \quad x_1 = x_2$

위의 조건 (1) 및 (2)를 만족하는 간선들을 각각 행-방향(row-direction) NP-간선 및 열-방향(column-direction) NP-간선이라고 한다.

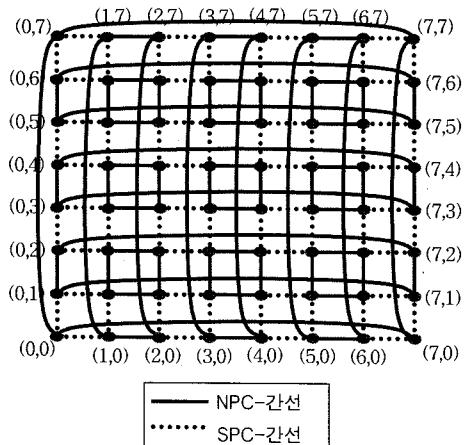
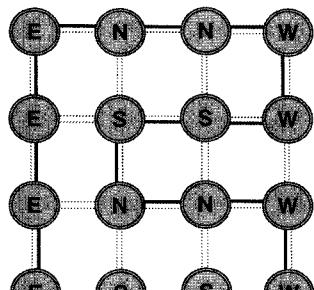
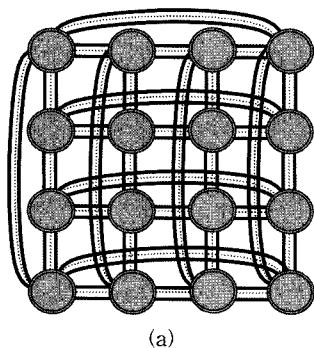
개선된 피라미드 그래프의 특정 계층 l 을 구성하고 있는 부그래프에 해당하는 정방형 토러스 S 에 속한 간선 $e=(u,v)$ 가 NP-간선이라는 의미는 e 의 양 끝 정점 u 및 v 와 각각 인접하고 있는 차상위 계층

$l+1$ 에 속한 두 정점이 서로 인접되어 있다는 뜻으로 해석할 수 있다. 그리고 S 에 속한 간선들 중 NP-간선들을 제외한 나머지 간선들은 공통-부모 간선(SP-간선; Shared-Parent edge)으로 분류함으로써 S 에 속한 정점 상호간 연결된 간선 집합을 두 개의 부분 집합에 해당하는 NP-간선들과 SP-간선들로 양분할 수 있다.

한편 이러한 개념 자체는 개선된 피라미드 그래프 내에서만 의미를 갖는 개념이지만 논문 전개의 편의를 위해 정방형 토러스 그래프를 대상으로 하는 논문 내용 전반에 걸쳐 토러스 내에 존재하는 간선들에게로 이러한 개념을 확장시키는 과정에서 혼란을 방지하기 위해 토러스에서는 NP-간선 및 SP-간선을 대신하여 각각 인접-부모 후보 간선 (NPC-간선; Neighbor-Parent Candidate edges) 및 공통-부모 후보 간선(SPC-간선; Shared-Parent Candidate edge)이라고 부르기로 한다(그림 5 참조).

[정의 7] 주어진 토러스 $ST^n = (V, E)$ 에 내재된 부-그래프(sub-graph)에 해당하는 $2^k \times 2^k$ 메쉬 그래프를 각각 하나의 슈퍼-정점(super node)로 매핑시키고, 슈퍼-정점에 속한 정점들간의 간선 연결을 해당 슈퍼-정점 상호간의 슈퍼-간선(super-edge) 개념으로 확장시켜 생성한 그래프를 k -압축 그래프 (k -shrink graph)라고 한다(그림 6 (a) 참조).

본 논문의 관심 그래프인 정방형 토러스 내에 구성 가능한 해밀تون 사이클을 이러한 압축 그래프 표현 방식을 이용하여 그림 6 (b)와 같이 나타낼 수 있으

그림 5. ST^3 내의 NPC-간선 및 SPC-간선

● : 2x2 sub-mesh

그림 6. SM^3 의 1-압축 그래프 표현 및 헤밀톤 사이클 구성 예

며, 이러한 구성에서 각 슈퍼-정점의 연결 유형을 분류해보면 [그림 7]와 같이 다양한 부류를 형성할 수 있음을 알 수 있다.

[보조정리 1] $n \geq 2$ 를 만족하는 2^n -정방형 토러스 ST^n 내에 존재하는 SPC-간선 및 NPC-간선들의 집합을 각각 E_S 와 E_N 이라고 할 때, 임의의 행-간선

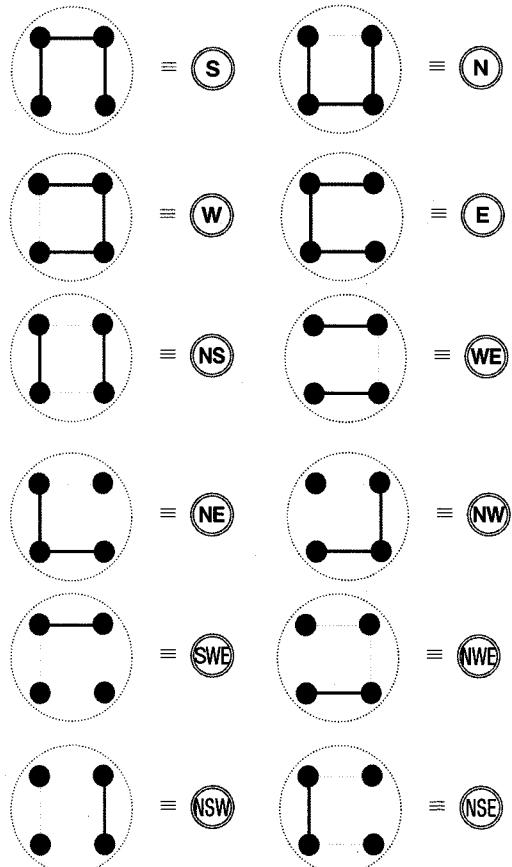


그림 7. 1-압축 그래프 생성 시 구성 가능한 슈퍼-정점 유형 예

$e_C=((x,y), ((x+1)\%2^n, y)) \in E_S$ 이면 $T_{2i+1, 2j+1}(e_C) \in E_N$ 이 되고, $e_C \in E_N$ 이면 $T_{2i+1, 2j+1}(e_C) \in E_S$ 이 된다.

[증명] 그림 5에서 확인할 수 있는 바와 같이 동일한 y -좌표값을 갖는 행 간선들은 구조상 NPC-간선과 SPC-간선이 서로 번갈아 가면서 분포되어 있음을 알 수 있다. 따라서 임의의 행 간선 e_C 를 x -축을 따라 쪽수만큼 이동 연산을 적용한 결과에 해당하는 간선 $T_{2i, 0}(e_C)$ 는 원래 간선과 동일한 성질을 지니게 되지만 쪽수만큼 이동시킨 간선들에 해당하는 $T_{2i+1, 0}(e_C)$ 는 원래 간선과 서로 다른 성질을 지니게 된다. 즉, $e_C \in E_N$ 이면 $T_{2i, 0}(e_C) \in E_N$ 이지만, $T_{2i+1, 0}(e_C) \in E_S$ 이다.

그리고 행 간선 e_C 를 y -축을 따라 이동시키는 경우를 살펴보면, $e_C \in E_N$ 이면 $T_{0, 2i}(e_C) \in E_N$ 이고, $T_{0, 2i+1}(e_C) \in E_N$ 이다.

따라서 $e_C \in E_N$ 인 경우에 이동 연산 결과에 해당하는 간선 $T_{2i+1, 2j+1}(e_C)$ 는 x -축을 따라 이동한 거리에

해당하는 $2i+1$ 값의 짹수 혹은 홀수 여부에 따라 각각 원래 성질 유지 또는 반전으로 변화됨을 알 수 있다. \square

위 보조정리가 의미하는 바는 행 간선의 경우 x -축을 따라 이동한 거리의 홀수 또는 짹수 여부에 따라 성질이 변할 수 있을 뿐이고, y -축을 따라 이동시킨 거리와는 무관하다는 사실을 나타내고 있다.

[보조정리 2] $n \geq 2$ 를 만족하는 2^n -정방형 토러스 ST^n 내에 존재하는 SPC-간선 및 NPC-간선들의 집합을 각각 E_S 와 E_N 이라고 할 때, 임의의 열-간선 $e_R = ((x, y), (x, (y+1)\%2^n)) \in E_S$ 이면 $T_{2i+1, 2j+1}(e_R) \in E_N$ 이 되고, $e_R \in E_N$ 이면 $T_{2i+1, 2j+1}(e_R) \in E_S$ 이 된다.

[증명] 위 (보조정리 1)과 동일한 논리에 의해 임의의 열 간선을 y -축을 따라 이동 변환 적용 시 y -축을 따라 이동한 거리가 이동 후 간선의 성질에 변화를 유도할 수 있으며, 이동 거리에 해당하는 값의 짹수 또는 홀수 여부에 따라 각각 원래 성질 유지 또는 반전으로 변화될 수 있음을 그림 5를 통해 쉽게 확인할 수 있다. \square

3. 개선된 피라미드의 토러스 부그래프 특성

본 절에서는 개선된 피라미드 그래프의 기반 구조를 형성하고 있는 2^n -정방형 토러스를 대상으로 NPC-간선들의 특성을 분석하고자 한다. NPC-간선은 토러스 그래프 자체만을 고려할 때에는 SPC-간선과 동등하게 여러 간선들 중 하나일 뿐이지만 개선된 피라미드 그래프의 부-그래프로서 역할을 수행하는 경우에는 보다 중요한 특성을 가진다. 즉, 그림 1과 그림 2를 비교해보면 알 수 있는 바와 같이 SPC-간선들의 경우는 고장 등으로 인해 불가피하게 우회를 해야 하는 경우에 대신할 수 있는 간선들이 동일 계층이나 하위 계층에만 분포하는 특성을 갖는 반면에 NPC-간선들의 경우는 동일 계층이나 하위 계층은 물론이고 상위 계층을 통해서도 우회할 수 있는 특성을 보유하고 있어 사이클 구성의 확장 가능성 및 고장-허용 특성 등의 관점에서 고려해볼 때 중요한 의미를 갖는다고 판단된다.

[보조정리 3] $n \geq 2$ 를 만족하는 2^n -정방형 토러스 ST^n 내에서 구성 가능한 헤밀톤 사이클에 포함할 수 있는 NPC-간선의 총 개수는 최소 2^{n-2} 개이다.

[증명] 토러스의 대칭성(symmetric property)을

이용하면 모양은 다르지만 서로 동형(isomorphic)인 다양한 구성이 가능하다. 헤밀톤 사이클을 구성하는 다양한 방법 중에서도 NPC-간선들을 가능한 적게 포함되도록 구성하기 위해서는 해당 토러스 그래프의 압축 그래프를 대상으로 슈퍼-정점 상호간을 연결해주는 슈퍼-간선에 대응하는 간선들에 초점을 기울일 필요가 있으며, 이러한 슈퍼-정점 상호간 연결 간선들의 개수를 가능한 최소화시켜 연결 상태는 유지시켜 헤밀톤 사이클을 구성할 수 있을 정도의 필수적인 개수의 간선들만 포함시키는 전략이 필요하다. 따라서 이러한 유형에 해당하는 그림 8에 주어진 $n=3$ 일 경우의 예를 참조하여 일반적인 경우로 확장시키는 방법을 통해 NPC-간선의 최소 개수를 분석할 수 있다.

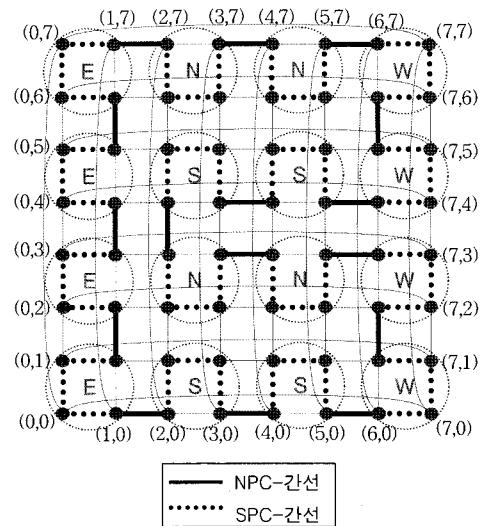


그림 8. ST^3 에서 최소 NPC-간선 보유 헤밀톤 사이클 구성 예

임의의 ST^n 을 대상으로 헤밀톤 사이클 구성 시 포함될 NPC-간선들의 유형을 행-간선과 열-간선으로 나누어 분석한다.

(1) 열-간선은 다음과 같이 표현되는 세 부분 NPC-간선 그룹들의 합으로 표현할 수 있다.

$$\textcircled{1} E_{C1} = \{((1, 2j+1), (1, 2j+2)) \mid 0 \leq j < 2^{n-1}-1\}$$

$$\textcircled{2} E_{C2} = \{((2, 4j+3), (2, 4j+4)) \mid 0 \leq j < 2^{n-2}-1\}$$

$$\textcircled{3} E_{C3} = \{((2^i-2, 4j+1), (2^i-2, 4j+2)) \mid 0 \leq j < 2^{n-2}\}$$

(2) 행-간선 역시 다음과 같이 표현되는 네 부분 NPC-간선 그룹들의 합으로 표현할 수 있다.

$$\textcircled{1} E_{R1} = \{((2i+1, 0), (2i+2, 0)) \mid 0 \leq i < 2^{n-1}-1\}$$

$$\textcircled{2} E_{R2} = \{(2i+1, 4j), (2i+2, 4j) \mid 1 \leq i < 2^{n-1}-1 \text{ } \& \& \\ 0 \leq j < 2^{n-2}-1\}$$

$$\textcircled{3} E_{R3} = \{(2i+1, 4j+3), (2i+2, 4j+3) \mid 1 \leq i < 2^{n-1}-1 \text{ } \& \& \\ 0 \leq j < 2^{n-2}-1\}$$

$$\textcircled{4} E_{R4} = \{(2i+1, 2^n-1), (2i+2, 2^n-1) \mid 0 \leq i < 2^{n-1}-1\}$$

따라서 열-간선의 합과 행-간선의 합을 각각 S_C 와 S_R 라고 하면 다음 식으로 계산이 가능하다.

$$\begin{aligned} S_C &= |E_{C1}| + |E_{C2}| + |E_{C3}| \\ &= (2^{n-1}-1) + (2^{n-2}-1) + (2^{n-2}) = 2^n - 2 \\ S_R &= |E_{R1}| + |E_{R2}| + |E_{R3}| + |E_{R4}| \\ &= 2 * (2^{n-1}-1) + 2 * (2^{n-2}-1) * (2^{n-1}-2) \\ &= 2^{2n-2} - 2^n + 2 \end{aligned}$$

따라서 최종적으로 헤밀톤 사이클에 남아있는 NPC -간선들의 개수는 S_C 와 S_R 의 합에 해당하므로 최악의 경우에도 2^{2n-2} 개는 존재하게 됨을 확인할 수 있다. \square

유사한 방법을 이용하여 정방형 토리스 내에서 구성되는 헤밀톤 사이클 내에 포함 가능한 NPC -간선의 상한값(upper bound)도 확인할 수 있다.

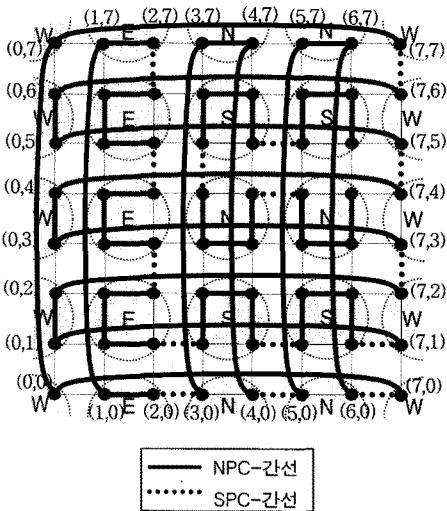


그림 9. ST^3 에서 최대 NPC -간선 보유 헤밀톤 사이클을 구성 예

[보조정리 4] $n \geq 2$ 를 만족하는 2^n -정방형 토리스 ST^n 내에서 구성 가능한 헤밀톤 사이클에 포함할 수 있는 NPC -간선의 총 개수는 최대 $3*2^{2n-2}$ 개이다.

[증명] (보조정리 1) 및 (보조정리 2)에 의해 ST^n 에 서의 최소 NPC -간선을 갖는 헤밀톤 사이클을 구성 예를 G 라 가정할 때, G 를 x -축 및 y -축 방향으로 훌수 크기만큼 이동 연산을 적용시킨 결과 그래프를

의미하는 $T_{2i+1, 2j+2}(G)$ 는 최대 개수의 NPC -간선을 보유한 경우가 됨을 알 수 있다.

따라서 위 (보조정리 3)에서 언급한 바 있는 $n=3$ 인 경우의 최소 NPC -간선을 보유한 구성을 예인 그림 8의 헤밀톤 사이클 구성을 예를 H 라고 할 때, $T_{1,1}(H)$ 에 해당하는 그림 9에 주어진 경우를 기반으로 하여 일 반적인 n 의 경우로 확장시키는 방법을 이용하여 임의의 ST^n 을 대상으로 헤밀톤 사이클 구성을 시 포함될 NPC -간선들의 유형을 행-간선과 열-간선으로 나누어 분석한다.

(1) NPC -간선들 중 열-간선은 다음과 같이 정의되는 간선의 집합 형식으로 표현할 수 있다.

$$\textcircled{1} E_{C1} = \{((1, (2j+1)\%2^n), (1, (2j+2)\%2^n)) \mid 0 \leq j < 2^{n-1}\}$$

$$\textcircled{2} E_{C2} = \{((0, (2j+1)\%2^n), (0, (2j+2)\%2^n)) \mid 0 \leq j < 2^{n-1}\}$$

$$\textcircled{3} E_{C3} = \{(((2i+1)\%2^n, (2j+1)\%2^n), ((2i+1)\%2^n, (2j+2)\%2^n)) \mid 1 \leq i < 2^{n-1}-1 \text{ } \& \& 0 \leq j < 2^{n-1}\}$$

$$\textcircled{4} E_{C4} = \{(((2i+2)\%2^n, (2j+1)\%2^n), ((2i+2)\%2^n, (2j+2)\%2^n)) \mid 1 \leq i < 2^{n-1}-1 \text{ } \& \& 0 \leq j < 2^{n-1}\}$$

(2) NPC -간선들 중 행-간선 역시 다음과 같이 정의되는 간선집합 형식으로 표현할 수 있다.

$$\textcircled{1} E_{R1} = \{((1, (j+1)\%2^n), (2, (j+1)\%2^n)) \mid 0 \leq j < 2^n\}$$

$$\textcircled{2} E_{R2} = \{((2^n-1, (j+1)\%2^n), (0, (j+1)\%2^n)) \mid 0 \leq j < 2^n\}$$

$$\textcircled{3} E_{R3} = \{(((2i+1)\%2^n, (4j+3)\%2^n), ((2i+2)\%2^n, (4j+3)\%2^n)) \mid 1 \leq i < 2^{n-1}-1 \text{ } \& \& 0 \leq j < 2^{n-2}\}$$

$$\textcircled{4} E_{R4} = \{(((2i+1)\%2^n, (4j+2)\%2^n), ((2i+2)\%2^n, (4j+2)\%2^n)) \mid 1 \leq i < 2^{n-1}-1 \text{ } \& \& 0 \leq j < 2^{n-2}\}$$

따라서 열-간선의 합과 행-간선의 합을 각각 S_C 와 S_R 라고 하면 NPC -간선의 총 개수는 다음과 같이 집합의 크기를 이용해 계산 가능하다.

$$\begin{aligned} S_C &= |E_{C1}| + |E_{C2}| + |E_{C3}| + |E_{C4}| \\ &= 2 * 2^{n-1} + 2 * 2^{n-1} * (2^{n-1}-2) \\ &= 2^n + 2^{2n-1} - 2^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_R &= |E_{R1}| + |E_{R2}| + |E_{R3}| + |E_{R4}| \\ &= 2 * 2^n + 2 * 2^{n-2} * (2^{n-1}-2) \\ &= 2^{n+1} + 2^{2n-2} - 2^n \end{aligned}$$

따라서 최종적으로 헤밀톤 사이클에 남아있는 NPC -간선들의 개수는 S_C 와 S_R 의 합에 해당하므로 최선의 경우에 최대 $3*2^{2n-2}$ 개까지 포함될 수 있음을 확인할 수 있다. \square

위의 두 보조정리들의 내용을 종합하면 다음과 같은 사실을 확인할 수 있다.

[정리 1] 한 변의 길이가 $2^n (n \geq 2)$ 으로 주어진 2차원 정방형 토러스 ST^n 내에서 구성 가능한 헤밀톤 사이클에 포함할 수 있는 NPC -간선의 총 개수 T 의 범위는 $2^{2n-2} \leq T \leq 3*2^{2n-2}$ 이다. \square

(정리 1)의 내용을 기반으로 하여 개선된 피라미드 그래프로 확장 적용시켜 해석해보면 아래 (정리 2)와 같은 결론을 얻을 수 있다.

[정리 2] $n \geq 2$ 를 만족하는 개선된 n -차원 피라미드 그래프 EP^n 내에서 구성 가능한 헤밀톤 사이클에는 최대 $4^{n-1} - 2n + 1$ 개까지의 NPC -간선이 포함될 수 있다.

[증명] (정의 2)에 의하면 개선된 n -차원 피라미드 그래프에는 계층 0부터 $n-1$ 까지 총 n 개의 계층적 구조를 형성하고 있으며, 각 계층 l 은 한 변의 길이가 2^{n-l-1} 인 정방형 토러스에 해당하는 구조임을 알 수 있다.

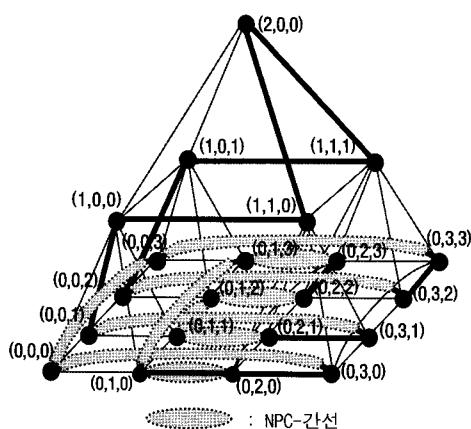
한편 (정리 1)에 의하면 ST^n 내에서 구성 가능한 헤밀톤 사이클에 포함할 수 있는 NPC -간선의 총 개수 T_n 의 범위는 $2^{2n-2} \leq T_n \leq 3*2^{2n-2}$ 이므로, 각 계층에서 독립적으로 헤밀톤 사이클을 구성한 다음 (정의 4)의 사이클 결합 연산을 이용하여 계층간을 연결시켜 확장해나가는 과정을 통해 전체 EP^n 의 헤밀톤 사이클을 구성할 수 있으며 이 과정에서 불가피하게 회생되는 NPC -간선의 개수를 최소화하는 전략을 고려할 필요가 있다.

최상위 두 계층에 해당하는 계층 $n-1$ 과 $n-2$ 에는 NPC -간선이 존재하지 않으며, $0 \leq l \leq n-3$ 에 해당하는 계층 l 에서 하나의 인접계층과의 사이클 확장을 위해서는 해당 계층 내에서 최소한 하나의 NPC -간선을 제거하여 계층간 연결 간선으로 대체시켜야 하므로 각 계층에서는 인접계층마다 최소한 하나씩의 NPC -간선이 회생될 수밖에 없음을 알 수 있다. 따라서 각 계층과의 인접계층의 개수에 관심을 기울일 필요가 있는데 특별히 최하위 계층에 해당하는 계층 0에서는 인접계층이 상위계층 하나만 존재하고, 나머지 계층 1부터 $n-3$ 까지는 모두 상위 및 하위 계층으로 각각 두 개씩의 인접계층과 연결이 필요하므로 이에 상응하는 NPC -간선이 제거되어야 한다.

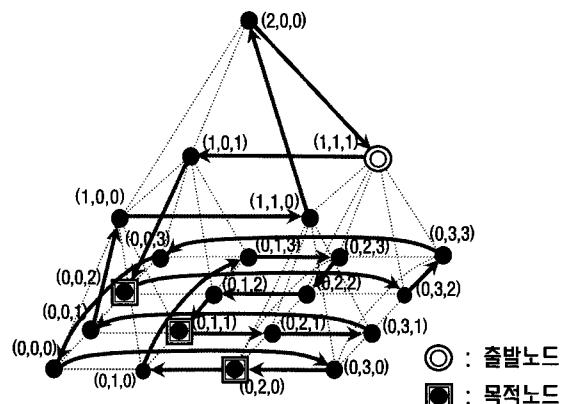
이러한 고려사항들을 반영하여 EP^n 내에서 헤밀톤 사이클 구성과정에서 남게 될 NPC -간선의 최대 개수를 수식화하여 정리해보면 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-3} (3*2^{2(n-l-1)-2}) - 2(n-3) &= 1 \\ &= 3 * \frac{4^{(n-2)-1}}{3} - 2n + 5 \\ &= 4^{n-1} - 2n + 1 \end{aligned} \quad \square$$

그림 10 (a)는 개선된 3-차원 피라미드 그래프 내에서 최대 NPC -간선을 보유하도록 헤밀톤 사이클을 구성한 예를 보여주고 있는데 수식 대입을 통해 확인할 수 있는 바와 같이 11개의 NPC -간선을 보유하고 있음을 확인할 수 있다.



(a) 헤밀톤 사이클 구성 예



(b) 라우팅에서의 활용 예

그림 10. EP^3 에서 최대 NPC -간선 보유 헤밀톤 사이클 구성 및 활용 예

이러한 과정을 통해 구성된 헤밀톤 사이클을 기반 구조로 활용하는 다중 병렬시스템에서의 멀티캐스팅 예로 그림 10 (b)와 같은 경우를 가정해보자. 높이 3인 개선된 피라미드 그래프에서 발신지 노드 (1,1,1)에서 특정 메시지를 보유한 패킷을 목적지로 지정된 노드 (0,0,2), (0,1,1) 및 (0,2,0)에 해당하는 세 개의 노드들에게 각각 전달해야 한다고 가정할 때, 미리 구성된 헤밀톤 사이클을 따라 노드들을 차례로 방문하면서 출발 후 두 번째 만나게 되는 노드[(0,0,2)]와 여덟 번째 만나게 되는 노드[(0,2,0)] 그리고 열네 번째 만나게 되는 노드[(0,1,1)]에 지정된 패킷을 전달함으로써 멀티캐스팅을 수행하게 된다. 이러한 기법에서는 전달해줄 노드의 개수에 관계없이 단일 경로를 따라 방문하게 함으로써 복수의 개별 경로를 통한 멀티캐스팅 과정에서 발생가능성이 있는 간선(통신 채널)에서의 충돌현상을 예방할 수 있게 된다.

4. 결 론

본 논문에서는 상호연결망 토플로지 중의 하나인 개선된 피라미드 그래프의 부그래프로서 기반구조를 형성하고 있는 2차원 토러스 그래프의 관점에서 해당 그래프에 내재된 사이클 합병과 관련된 간선의 특성을 분석하였다.

토러스 그래프에 존재하는 간선들은 그래프 자체 만으로 해석되는 경우에서는 모두 동등한 의미를 보유하고 있지만 개선된 피라미드 그래프의 부그래프로서의 관점에서는 간선의 유형별로 그 의미가 서로 다르다. 즉, 특정 간선의 양 끝 정점들과 인접된 상위 계층의 부모 정점들의 연결 형태에 따라 동일 부모를 공유하는 경우(SPC-간선)와 인접된 부모를 갖는 경우(NPC-간선)의 두 유형으로 나눌 수 있는데 특히 NPC-간선들은 사이클 확장 및 고장허용 특성과 관련하여 다양성을 제공한다는 관점에서 중요한 의미를 갖는다.

피라미드 그래프의 기반 구조를 형성하고 있는 2^n -정방형 토러스 그래프 내에서 구성 가능한 헤밀톤 사이클에 포함될 수 있는 NPC-간선 개수의 범위는 하한과 상한이 각각 2^{2n-2} 와 $3 \cdot 2^{2n-2}$ 임을 증명하였다. 아울러 이 결과를 확장시켜 개선된 n -차원 피라미드 그래프 내에서 헤밀톤 사이클 구성 시 최대 $4^{n-1} - 2n+1$ 개까지의 NPC-간선을 포함시킬 수 있음을

보였다.

이와 같이 상호연결망 내에서의 사이클 특성과 관련된 연구가 갖는 의의는 그래프 이론적인 의미뿐만 아니라 다중 프로세서들로 구성된 병렬처리시스템 상에서 프로세서 상호간 방송 또는 멀티캐스팅 형태의 메시지 전송과정에서 사이클을 하부 구조로 이용하게 되는 응용 등에서 활용이 가능할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

- [1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," *J. of Parallel and Distrib. Comput.*, Vol.4, pp. 439-458, 1987.
- [2] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," *Computing Supplement*, Vol.7, pp. 257-282, 1990.
- [3] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," *IEEE Trans. on Comput.*, Vol.37, pp. 867-872, 1988.
- [4] F. T. Leighton, *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*, Morgan Kaufmann Pub., CA., 1992.
- [5] J. Xu, *Topological structure and analysis of interconnection networks*, Kluwer, Netherlands, 2002.
- [6] R. Miller and Q. F. Stout, "Data Movement Techniques for the Pyramid Computer," *SIAM J. on Comput.*, Vol.16, No.1, pp. 38-60, 1987.
- [7] Q. F. Stout, "Mapping Vision Algorithms to Parallel Architectures," Proc. of the IEEE, pp. 982-995, 1988.
- [8] D. M. C. Ip, C. K. Y. Ng, L. K. L. Pun, M. Hamdi, and I. Ahmad, "Embedding Pyramids into 3D Meshes," Proc. of 1993 Int'l Conf. on Paral. and Distrib. Sys., pp. 348-352, 1993.
- [9] K. -L. Chung and Y. -W. Chen, "Mapping Pyramids into 3-D Meshes," *Nordic J. of Computing*, Vol.2, No.3, pp. 326-337, 1995.
- [10] 장정환, "피라미드의 3-차원 메쉬로의 신장을

- 개선 임베딩,” 정보처리학회논문지-A, Vol.10-A, No.6, pp. 627-634, 2003.
- [11] 장정환, “피라미드 그래프의 해밀톤 특성,” 정보처리학회논문지-A, Vol.13-A, No.3, pp. 253-260, 2006.
- [12] K. W. Tang and S. A. Padubidri, “Diagonal and toroidal mesh networks,” *IEEE Trans. Comput.*, Vol.43, No.7, pp. 815-826, 1994.
- [13] Y. -C. Chen, D. -R. Duh and H. -J. Hsieh, “On the enhanced pyramid network,” Proc. 2004 International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications, Las Vegas, Nevada, pp. 1483-1489, 2004.
- [14] Y. -C. Chen and D. -R. Duh, “Proof that enhanced pyramid networks are 2-edge-Hamiltonicity,” Proc. The 23rd Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory, Changhua, Taiwan, Nevada, pp. 76-84, April 2006.
- [15] Y. C. Tseng, D. K. Panda and T. H. Lai, “A Trip-based Multicasting Model in Wormhole-routed Networks with Virtual Channels,” *IEEE Trans. on Paral. and Distrib. Sys.*, Vol.7, No.2, pp. 138-150, 1996.
- [16] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory with Applications*, North-Holland, 1980.
- [17] S. -Y. Hsieh, “Fault-tolerant cycle embedding in the hypercube with more both faulty vertices and faulty edges,” *Parallel Computing*, Vol.32, No.1, pp. 84-91, 2006.
- [18] J. -S. Fu, “Conditional fault-tolerant Hamiltonicity of star graphs,” *Parallel Computing*, Vol.33, No.7-8, pp. 488-496, 2007.
- [19] T. -L. Kueng, T. Liang, L. -H. Hsu, and J. J. M. Tan, “Long paths in hypercubes with conditional node faults,” *Information Sciences*, Vol.179, No.5, pp. 667-681, 2009.
- [20] P. -Y. Tsai, J. -S. Fu, and G. -H. Chen, “Fault-free longest paths in star networks with conditional link faults,” *Theoretical Computer Sciences*, Vol.410, No.8-10, pp. 766-775, 2009.



장 정 환

1979년 3월 ~ 1983년 2월 경북대학교 전자공학과 공학사
 1983년 3월 ~ 1985년 2월 한국과학기술원(KAIST) 전산학과 공학석사
 1993년 3월 ~ 1998년 8월 한국과학기술원(KAIST) 전산학과 공학박사
 1985년 4월 ~ 2000년 8월 (주)케이티(KT) 연구원, 집중운용보전시스템 개발
 2000년 9월 ~ 현재 부산외국어대학교 디지털미디어학부 부교수
 관심분야: 그래프이론 응용, 통신망 보안, 개방형시스템 소프트웨어 등