

# 대각행렬화된 근사 인수분해 기법을 이용한 3차원 비압축성 점성 흐름 해석

## Diagonalized Approximate Factorization Method for 3D Incompressible Viscous Flows

백중철\*

Paik, Joongcheol

### Abstract

An efficient diagonalized approximate factorization algorithm (DAF) is developed for the solution of three-dimensional incompressible viscous flows. The pressure-based, artificial compressibility (AC) method is used for calculating steady incompressible Navier-Stokes equations. The AC form of the governing equations is discretized in space using a second-order-accurate finite volume method. The present DAF method is applied to derive a second-order accurate splitting of the discrete system of equations. The primary objective of this study is to investigate the computational efficiency of the present DAF method. The solutions of the DAF method are evaluated relative to those of well-known four-stage Runge-Kutta (RK4) method for fully developed and developing laminar flows in curved square ducts and a laminar flow in a cavity. While converged solutions obtained by DAF and RK4 methods on the same computational meshes are essentially identical because of employing the same discrete schemes in space, both algorithms shows significant discrepancy in the computing efficiency. The results reveal that the DAF method requires substantially at least two times less computational time than RK4 to solve all applied flow fields. The increase in computational efficiency of the DAF methods is achieved with no increase in computational resources and coding complexity.

**Keywords** : *incompressible viscous flow, artificial compressibility, diagonalized approximate factorization, efficiency*

### 요 지

비압축성 점성 흐름을 수치해석하기 위한 효율적인 대각행렬화된 근사 인수분해(DAF) 알고리즘을 개발하였다. 압력에 근거한 인공압축성(AC) 기법을 이용하여 3차원 정상 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 계산한다. AC 형태로 변형된 지배방정식은 2차 정확도의 유한차분법을 이용하여 공간에 대해서 이산화하였다. 이산화된 방정식계를 2차 정확도로 분할하기 위해서 본 연구에서 개발한 DAF 기법을 적용한다. 이 연구의 목적은 이 DAF 기법의 계산상 효율성을 검토하는 것이다. 만곡부를 갖는 사각형 덕트에서 완전히 발달한 층류 흐름과 발달하는 층류흐름 그리고 공동에서의 층류흐름에 대한 DAF 기법의 해석결과를 잘 알려진 4단계 Runge-Kutta(RK4)기법에 의한 해석해와 상대적으로 비교평가 하였다. 공간에 대해서 동일한 이산화기법을 이용하므로 동일한 격자상에서 계산된 DAF기법과 RK4기법의 해는 근본적으로 동일한 반면에, 이들 두 기법의 계산상 효율성은 확연히 다른 것으로 나타났다. 본 연구에서 개발된 DAF기법은 적용한 모든 흐름 문제에 대해서 RK4기법에 비해 최소 2배 이상 적은 계산 시간만을 필요로 하는 것으로 나타났다. 이러한 DAF 기법의 계산상 효율성은 계산용량의 증가나 프로그래밍의 추가적인 복잡함이 없이 확보된다.

**핵심어** : 비압축성 점성 흐름, 인공압축성, 대각행렬화된 근사 인수분해, 효율성

### 1. 서 론

공학분야에서 흐름 문제를 수치모의하는데 있어 계산의 효율성(efficiency)과 강건성(robustness)을 확보하기 위해서는 계산량이 적으면서 합리적인 정확도를 가지는 수치기법을 이용하여야 한다. 아울러, 3차원 비압축 흐름의 계산유체동력학(CFD) 분야에서 어려운 문제 중 하나는 압력장과 유속장의 약한 결합(weak coupling) 때문에 발생한다. 압력장과

유속장의 결합은 유속의 발산항을 사라지게 함으로서 구현할 수 있다. 비압축성 흐름에서 유속-압력 결합을 조절하는 일반적인 방법으로는 압력항에 근거한(pressure-based, PB) 기법과 인공압축성(artificial compressibility, AC) 개념에 근거한 기법이 있다. AC 기법(Chorin, 1967)은 압력 프이송 방정식을 해석할 필요가 없으므로 효율적인 기법에 속한다고 볼 수 있다. 많은 연구들이 상향차분법(upwind differencing) 그리고 정상 및 비정상 비압축성 흐름을 해석하기 위한 기

\*정회원 · 강릉원주대학교 공과대학 토목공학과 조교수 (E-mail : paik@gwnu.ac.kr)

법으로 AC기법을 적용해왔다(예를 들면, Rogers, 1995; Yang 등, 1998). 양해 AC 기법(Merkle과 Tsai, 1986; Lin과 Sotiropoulos, 1997)에서는 연속방정식과 운동량방정식을 결합된 형식으로 시간에 대해서 동시에 해석을 진행한다. 지배방정식 결합의 주요 이점으로는 원래 압축성 흐름 방정식 해석을 위해서 개발된 공간이산화기법(스칼라와 행렬값 소산(dissipation) 모형, 플러스-치분 분할(splitting), 비선형 제한 기법 등)을 쉽게 비압축성 흐름 방정식 해석을 위해서 확장할 수 있다는 것이다(Rogers 등, 1991). 결합은 아울러 특성곡선법을 이용한 경계조건의 프로그램화를 용이하게 한다.

근사인수분해(approximate factorization, AF)를 이용하여 3차원 문제는 3개의 1차원 문제로 분해할 수 있다. AF기법은 ADI(alternating direction implicit) 기법의 일반적인 범주에 속한다(Beam과 Warming, 1978). 이들 기법들은 고주파의 수치진동을 제거하고 선형 안정 범위를 증대시키기 위해서 일반적으로 양해 또는 음해 4차의 분산항(fourth order dissipation term)을 포함한다. 그러나 큰 계산시간 간격을 이용하여 정상 상태에 도달하는 해를 구하기 위해서 ADI 인수분해 기법을 적용할 때 종종 많은 문제들이 발생한다. 이러한 문제들로는 1) 중간경계조건(intermediate boundary conditions)의 선택에 기인하며 작은 계산시간간격으로만 제어할 수 있는 수치 불안정(instability), 2) 큰 계산시간 간격에 대한 빈약한 수렴율(rate of convergence), 3) 일종의 불연속 초기 조건을 설정할 때 바람직하지 않은 2차 정도의 시간 정확도 등이다(Dukowicz와 Dvinsky, 1992; Briley와 McDonald, 2001). Crank-Nicholson기법에서 볼 수 있듯이, ADI 형식의 기법들은 큰 계산시간간격에 대해서 훌쩍 시간 간격 탈동조화(odd-even time step de-coupling) 때문에 계산에 어려움이 있다. 결과적으로 이들 해들은 큰 수치진동을 보이게 된다. 그러한 경우 수치 안정성과 수렴성을 확보하기 위해서 서로 다른 국부 시간 간격(local time steps)을 이용한 추가적인 수치다듬질(smoothing)이 필요하다.

이 연구에서는 3차원 비압축성 흐름에 대한 지배방정식인 Navier-Stokes 방정식 비압축성 흐름 방정식의 특성을 이용하여 AF(approximate factorization) AC알고리즘에 적합한 음해 잔차완화연산자(residual smoothing operator)를 개발하고자 한다. AF AC기법의 주요 장점은 입력항의 의사시간도함수(pseudo time derivative)를 연속방정식에 도입함으로써 지배방정식의 전체 시스템을 쌍곡선형(hyperbolic)-포물선형(parabolic)-형식의 시간중속 방정식계(system)로 변환하여 이들을 이산화하고 해석하는 기법으로, 압축성 흐름에 대해서 개발된 효율적인 기법들을 이용할 수 있다는 것이다. AC기법에 적합한 연산자는 표준 IRS(implicit residual smoothing) 연산자의 단순성과 계산상의 효율성을 가질 뿐만 아니라, 고주파(high frequency) 오차의 감폭(damping)을 증가시킬 수 있으므로 비압축성 흐름 해석을 위한 효율적인 다중격자 완화(multigrid smoothing) 연산자로서 이용될 수 있어야 한다. 이 연구에서는 PB 기법의 요소들을 결합(coupled) 음해 AC 공식들과 병합하기 위해서, AC 방정식계를 위한 시간 이산화기법을 PB기법에 근거한 방정식계에서의 시간 이산화기법으로 이용한다. 결과적으로 PB 기법들의 아이디어를 이용하여 음해 다단 AC 알고리즘의 수렴성을 가속화하기 위한

음해잔차완화 연산자를 개발한다. 연속방정식에서의 유속 도함수와 운동량방정식에서의 입력 경사항은 시간에 대해서 음해적으로 이산화한다. 이산화된 방정식계는 시간에 대해서 선형화되어 닮음변화(similarity transformation)에 의해서 대각행렬화되고 근사적으로 요소화된(diagonalized and approximately factorized, DAF) 음해연산자를 만들어 낸다. 결과적인 DAF 연산자는 기하학적 변환(geometric transformation) 행렬에만 종속되므로 해석이 효율적이고 쉽게 프로그램화 될 수 있다.

개발된 DAF 기법을 Humphrey 등(1977)과 Taylor 등(1982)이 실험을 통해서 연구한 만약 사각형 덕트에서의 층류 흐름에 적용하여 계산결과를 실험값들과 비교하고 제안된 기법의 감폭 특성과 수렴성을 분석한다. 아울러 공동(cavity)에서의 흐름 해석에 적용하여 추가적으로 수렴특성을 분석한다.

## 2. 지배방정식

유체의 밀도  $\rho$  기준 유속  $U_0$ , 기준 길이  $L_0$ 로 무차원화된 3차원 비압축성 RANS(Reynolds-averaged Navier-Stokes) 방정식을, 유속장과 압력장의 결합을 위한 Chorin(1967)의 AC기법을 적용하여 변형한다. AC 변수와 압력항에 대한 시간도함수를 연속방정식에 추가함으로써, 방정식계에서 흐름 변수를 갱신하는 시간진행(time-marching) 기법을 이용할 수 있게 한다. 완전보존형으로 일반곡선좌표계( $\xi^1, \xi^2, \xi^3$ )에서 전개한 지배방정식은 텐서 기호로 표시하여 다음과 같으며, 여기서 반복 표기(repeated indices)는 합을 의미한다.

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\mathbf{F}^j - \mathbf{F}_v^j) = 0 \quad (1)$$

여기서

$$\Gamma = \text{diag}[0, 1, 1, 1]$$

$$\mathbf{Q} = [P, u_1, u_2, u_3]^T$$

$$\mathbf{F}^j = \frac{1}{\mathbf{J}} [U^j, u_1 U^j + p \xi_{x_1}^j, u_2 U^j + p \xi_{x_2}^j, u_3 U^j + p \xi_{x_3}^j]^T$$

$$\mathbf{F}_v^j = \frac{1}{\mathbf{J}} \left( \frac{1}{\text{Re}} + \nu_t \right) \left[ 0, g^{mj} \frac{\partial u_1}{\partial \xi^m}, g^{mj} \frac{\partial u_2}{\partial \xi^m}, g^{mj} \frac{\partial u_3}{\partial \xi^m} \right]^T$$

위의 식에서  $P$ 는 수정 압력항  $P = p/\rho + 2k/3$ 으로서 여기서  $p$ 는 피에조미터 압력이고  $k$ 는 난류운동에너지,  $u_i (i = 1, 2, 3)$ 는 직선좌표계에서의 유속 성분,  $x_n$ 는 직선좌표계에서의 좌표,  $\mathbf{J}$ 는 기하학적 변환의 자코비 행렬식(Jacobian),  $\xi_{x_j}^i$ 는 기하학적 변환 행렬식,  $U^j$  반변형 유속 성분  $U^j = u_i \xi_{x_j}^i$ ,  $g^{ij}$  반변거리텐서의 성분  $g^{ij} = \xi_{x_k}^i \xi_{x_k}^j$ , 그리고  $\text{Re}$ 는  $U_0$ 와  $L_0$ 에 근거한 레이놀즈 수 있다.

## 3. 수치기법

### 3.1 공간이산화(Spatial Discretization)

AC 형식의 지배방정식을 엇갈리지 않은(nonstaggered) 계산 격자에서 2차 정확도의 유한체적법을 이용하여 이산화하였다. 식 (1)의 반이산(semi-discrete) 근사화식으로 쓰면 다음과 같다.

$$\Gamma \frac{1}{\mathbf{J}} \frac{\partial \mathbf{Q}_{i,j,k}}{\partial t} + \delta_{\xi^l} (\mathbf{F}^l - \mathbf{F}_v^l)_{i,j,k} + \dots = 0 \quad (2)$$

여기서는 식을 간략하고 분명히 표시하기 위해서 반복되는 항은 제외하고  $\xi^l$  방향에서의 도함수 항만을 표시하기로 하여 이산 연산자  $\delta$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\delta_{\xi^l}(\cdot)_{i,j,k} = \frac{(\cdot)_{i+1/2,j,k} - (\cdot)_{i-1/2,j,k}}{\Delta \xi^l} \quad (3)$$

이류항(convective terms)에서의 운동량 플럭스는 QUICK 기법을 이용하여 다음과 같이 이산화 하였다.

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_v^1)_{i+1/2,j,k} &= \frac{U^{1+}}{8\Delta \xi^l} [3(u_1)_{i+1} + 3(u_1)_i - 7(u_1)_{i-1} + (u_1)_{i-2}]_{j,k} \\ &+ \frac{U^{1-}}{8\Delta \xi^l} [-3(u_1)_{i-1} - 3(u_1)_i + 7(u_1)_{i+1} - (u_1)_{i+2}]_{j,k}, \quad (l=1,2,3) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $U^{1\pm} = (U^1 \pm |U^1|)/2$  이다.

압력 경사항과 점성항은 중앙차분기법을 이용하여 이산화 하였다. 예를 들면, 계산격자의 중앙(half nodes,  $i \pm 1/2, j, k$ 에서의 수치 점성 플럭스의 계산은 다음과 같다.

$$(\mathbf{F}_v^1)_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mathbf{JRe}} \left( g^{m1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi^{m1}} \right)_{i+1/2,j,k} \quad (5)$$

식 (5)을 계산하기 위해서는 모든 3개 방향에서의 도함수들이 필요하다.  $\xi^l$  방향에서의 도함수를 2차 정확도의 중앙차분기법을 이용하여 이산화하면 다음과 같다.

$$\left[ \frac{\partial u_1}{\partial \xi^l} \right]_{i+1/2,j,k} = \frac{(u_1)_{i+1,j,k} - (u_1)_{i,j,k}}{\Delta \xi^l} \quad (6)$$

다른 두 개 방향에서의 도함수들은 관련된 전체 계산격자에서의 도함수를 다음과 같이 평균함으로써 계산된다.

$$\left[ \frac{\partial u_1}{\partial \xi^l} \right]_{i \pm 1/2,j,k} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial \xi^l} \right)_{i,j,k} + \left( \frac{\partial u_1}{\partial \xi^l} \right)_{i \pm 1,j,k} \right], \quad (l=2,3) \quad (7)$$

여기서 전체 계산 격자  $(i, j, k)$ 와  $(i \pm 1, j, k)$ 에서의 도함수는 2차 정확도의 중앙차분기법을 이용하여 이산화 한다. 예를 들어, 계산격자  $(i, j, k)$ 에서  $l=2$ 에 대한 도함수는 다음과 같이 계산된다.

$$\left[ \frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} \right]_{i,j,k} = \frac{(u_1)_{i,j+1,k} - (u_1)_{i,j-1,k}}{2\Delta \xi^2} \quad (8)$$

이 연구에서는 추가로 압력장(pressure field)에서의 홀짝 비결합(even-odd decoupling) 현상을 제거하기 위해서 압력 항에 대해서만 인공수치분산플럭스(artificial dissipation flux)를 적용한다. 이 인공수치분산항은 3차 행렬값에 의한 인공분산 모형(Lin and Sotiropoulos, 1997)을 이용하여 계산할 수 있으며 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$DISS_{i+1/2,j,k}^1 = \varepsilon_{ad} \delta_{\xi^l} |A^1| \delta_{\xi^l} \delta_{\xi^l} \mathbf{Q}_{i \pm 1/2,j,k} \quad (9)$$

여기서  $\varepsilon_{ad}$ 는 양의 상수값으로 수치분산의 양을 제어하며  $|A^1| = M_1 \Lambda M_1^{-1}$  이고,  $M_1$ 과  $\Lambda$ 는 자코비행렬식(Jacobian matrix)의 형식 행렬(modal matrix)과 고유값 행렬(eigenvalue matrix)을 나타낸다. 이 연구에서 수행한 모든 계산에서는  $\varepsilon_{ad}$ 의 값으로 0.01을 적용하였다.

이상에서 언급된 공간이산화 수치해석 기법은 다양한 환경수리학 문제에 대해서 적용되었고 정확도도 검증되었다(Paik

등, 2005, 2010; Khangaonkar 등, 2008; Tang 등 2008). 여기서 분명히 하고 싶은 것은, 이 연구 목적은 공간에 대한 이산화 기법의 정확도가 아닌, 다음 절에서 다루는 시간에 대한 이산화 기법의 효율성을 평가한다는 것이다.

### 3.2 대각행렬화된 근사 인수분해

본 연구에서는 공간상에서 이산화된 방정식을 해석하기 위해서 압력항에 근거한 인공압축성 알고리즘 형태의 지배방정식을 선형화하고, 반복계산을 효율적으로 수행하기 위해서 개발된 대각행렬화된 근사인수분해 기법을 이용한다. 이 기법은 먼저 식 (1)에서의 이류플럭스벡터를 선형부분과 비선형 부분으로 분리한다.

$$\mathbf{F}^j = \mathbf{F}_L^j + \mathbf{F}_N^j \quad (10)$$

선형 벡터  $\mathbf{F}_L^j$ 는 연속방정식에서의 유속항과 운동량방정식에서의 압력 경사항을 포함하며, 이것은 곡선좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{F}^j = \frac{1}{\mathbf{J}} [U^j, P_{\xi^1}^j, P_{\xi^2}^j, P_{\xi^3}^j]^T \quad (11)$$

비선형 벡터  $\mathbf{F}_N^j$ 는 나머지 이류항들을 포함한다. 따라서, 압력항에 근거한 인공압축성 알고리즘에서 이들 선형과 비선형 부분들은 각각 음해법과 양해법으로 처리된다. 음해 Euler 형태의 시간적분 기법을 이용하고 식 (10)을 병합하면, 지배방정식 (1)은 시간에 대해서 다음과 같이 이산화할 수 있다.

$$\frac{\Gamma^1 \Delta \mathbf{Q}_{i,j,k}}{\mathbf{J} \Delta t} + \delta_{\xi^l} [(\mathbf{F}_L^1)^{n+1} + (\mathbf{F}_N^1)^n - (F_v^1)^n]_{i,j,k} + \dots = 0 \quad (12)$$

여기서  $\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{n+1} - \mathbf{Q}$  이고  $n$ 은 시간단계(time level)를 나타낸다.  $\Delta \mathbf{F}_L = \mathbf{F}_L^{n+1} - \mathbf{F}_L^n$ 를 도입하면 식 (12)를 다음과 같이 단순화할 수 있다.

$$\left[ \Gamma + \Delta t \frac{\partial \mathbf{R}_L}{\partial \mathbf{Q}} \right] \Delta \mathbf{Q} = -\Delta t \mathbf{R}^{n,k} \quad (13)$$

또는

$$\left[ I + \Delta t \Gamma^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_L}{\partial \mathbf{Q}} \right] \Delta \mathbf{Q} = -\Delta t \Gamma^{-1} \mathbf{R}^{n,k} \quad (14)$$

여기서  $I$ 는 단위행렬이고  $\mathbf{R}^{n,k}$ 는 이산화된 Navier-Stokes 방정식의 우변항을 나타낸다.

$$\mathbf{R}^{n,k} = [\delta_{\xi^l} (\mathbf{F}^1 - \mathbf{F}_v^1)_{i,j,k} + \dots]^n = 0 \quad (15)$$

각 좌표방향에서  $\partial \mathbf{R}_L / \partial \mathbf{Q}$ 를 확장하면 다음과 같은 알고리즘을 얻게 된다.

$$\left[ I + \Delta t \left( \delta_{\xi^1} \tilde{A}_L^1 + \delta_{\xi^2} \tilde{A}_L^2 + \delta_{\xi^3} \tilde{A}_L^3 \right) \right] \Delta \mathbf{Q} = -\Delta t \tilde{\mathbf{R}}^{n,k} \quad (16)$$

여기서  $\tilde{A}_L^j = \Gamma^{-1} A_L^j$ 와  $\tilde{\mathbf{R}} = \Gamma^{-1} \mathbf{R}$ . 위 식에서  $\delta_{\xi^j}$ 는  $\xi^j$  방향에서의 중앙유한차분 연산자이며,  $A_L^j$ 는 선형이류플럭스 벡터의 자코비안 행렬로서 다음과 같이 주어진다.

$$A_L^j = \frac{\partial \mathbf{F}_L^j}{\partial \mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 0 & \xi_x^j & \xi_y^j & \xi_z^j \\ \xi_{x_1}^j & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{x_2}^j & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{x_3}^j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

위의 블록화된 음해 연산자의 효율적인 역변환(inversion)을 용이하게 하기 위해서, 본 연구에서 제안하는 모형에서는 다음과 같이 대각행렬화된 근사 인수분해 기법을 이용한다.

$$M_1 \mathfrak{S}_1 M_1^{-1} M_2 \mathfrak{S}_2 M_2^{-1} M_3 \mathfrak{S}_3 M_3^{-1} \Delta \mathbf{Q} = -\Delta t \tilde{\mathbf{R}}^{n,k} \quad (18)$$

여기서  $M_j$ 는 형태행렬이고 닳음변환  $\tilde{A}_L^j = M_j^{-1} \Lambda_j M_j$ 으로  $\tilde{A}_L^j$ 를 대각행렬화하는 자코비안 행렬이고,  $\Lambda_j$ 는  $\tilde{A}_L^j$ 의 고유값을 가지는 대각행렬이며,  $\mathfrak{S}_j$ 는 음해대각연산자이다. 이들 행렬과 연산자들은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathfrak{S}_j = [I + \Delta t \delta_{\xi^j} \Lambda_j] \quad (19)$$

$$\Lambda_j = \text{diag} \left[ 0, 0, \sqrt{g^{jj}}, -\sqrt{g^{jj}} \right] \quad (20)$$

$$M_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -(\xi_{x_2}^j + \xi_{x_3}^j) & \xi_{x_1}^j (\xi_{x_3}^j - \xi_{x_2}^j) & \xi_{x_1}^j & \xi_{x_1}^j \\ \phi^j & \phi^j \sqrt{g^{jj}} & \sqrt{g^{jj}} & \sqrt{g^{jj}} \\ \xi_{x_1}^j & g^{jj} + \xi_{x_2}^j (\xi_{x_3}^j - \xi_{x_2}^j) & \xi_{x_2}^j & -\xi_{x_2}^j \\ \phi^j & \phi^j \sqrt{g^{jj}} & \sqrt{g^{jj}} & \sqrt{g^{jj}} \\ \xi_{x_1}^j & g^{jj} - \xi_{x_2}^j (\xi_{x_3}^j - \xi_{x_2}^j) & \xi_{x_3}^j & -\xi_{x_3}^j \\ \phi^j & \phi^j \sqrt{g^{jj}} & \sqrt{g^{jj}} & \sqrt{g^{jj}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서

$$\phi^j = \sqrt{2g^{jj} - (\xi_{x_2}^j - \xi_{x_3}^j)^2} \quad (22)$$

위의 알고리즘의 안정성, 강건성(robustness) 그리고 수치 진동의 감폭(damping) 특성을 강화하기 위해서 다음과 같은 2차 차분 음해 잔차완화연산자를 병합하여  $\mathfrak{S}_j$ 를 수정한다.

$$\mathfrak{S}_j = \left[ I + \Delta t \left( \delta_{\xi^j} \Lambda_j - \rho(\tilde{A}_L^j) \varepsilon^j \delta_{\xi^j} \right) \right] \quad (23)$$

여기서  $\rho(\tilde{A}_L^j)$ 는  $\tilde{A}_L^j$ 의 스펙트럼반경(spectral radius)으로서 고유값의 최대 절댓값이며,  $\delta_{\xi^j}$ 는 2차 공간 도함수에 대한 3점2차 정확도 중앙차분연산자이다.  $\varepsilon^j$ 는 표준 음해 잔차완화계수로서 양의 상수이며 이 연구에서는 모든 방향에 대해서  $\varepsilon^j = 0.05$ 의 값을 적용하였다.

결과적으로 최종 입력항에 근거한 AC알고리즘은 다음과 같이 단계별로 계산된다.

$$\mathfrak{S}_{\xi^1} \Delta \mathbf{Q}^* = M_1^{-1} [-\Delta t \tilde{\mathbf{R}}^{n,k}] \quad (24)$$

$$\mathfrak{S}_{\xi^2} \Delta \mathbf{Q}^{**} = M_2^{-1} M_1 \Delta \mathbf{Q}^* \quad (25)$$

$$\mathfrak{S}_{\xi^3} \Delta \mathbf{Q}^{***} = M_3^{-1} M_2 \Delta \mathbf{Q}^{**} \quad (26)$$

$$\Delta \mathbf{Q}^{n,k+1} = M_3 \Delta \mathbf{Q}^{***} \quad (27)$$

### 3.3 수렴가속기법

#### 3.3.1 다중격자가속

지배방정식 해의 수렴을 가속하기 위해서 Jameson(1986)의 다중격자법(multigrid strategy)과 Brandt(1980)의 비선형 완전근사기법을 병합하였다. 일련의 연속적인 하위의 성긴 격자(coarser grid)는 두 개의 방향에서 격자 간격을 두 배로 설정(일명 semi-coarsening)함으로서 구성하였다. 가장 조밀한 격자에서의 먼저 산정된 흐름변수들은 하위의 성긴 격

자로 주입(injection)기법을 통해서 전달된다. 흐름 변수가 가장 성긴 격자까지 전달되게 되면, 각 격자에서 축적된 수정 값은 상위의 조밀격자에서 일련의 3방향 선형 보간(trilinear interpolation)법을 이용하여 가장 조밀한 격자까지 전달된다. 간격이 심하게 늘어나는(highly stretched) 격자상에서 이러한 보간기법은 고주파 오차를 발생시킬 수 있으며 수렴율을 저하시킨다. 이러한 오차를 제거하기 위해서 주어진 성긴 격자에서 흐름 변수의 수정을 음해 잔차완화 연산자를 이용하여 진행한다. 이 연구에서는 3개 수준의 V-순환을 각 시간단계에서 적용한다. 가장 조밀한 격자에서는 한 번 반복 계산, 두 번째 수준의 격자에서는 두 번 반복 계산 그리고 가장 성긴 격자에서는 세 번 반복계산을 각각 수행한다.

#### 3.3.2 국부시간단계법

이산화된 방정식의 시간진행 절차의 수렴율은 쌍곡선형(hyperbolic)과 타원형(parabolic) 안정기준(stability criteria)를 이용한 국부시간단계기법을 적용하여 강화하였다.

이 연구에서 적용하는 수치기법의 안정성은 Courant-Friedrich-Lewis(CFL)수와 Von-Newmann(VN) 수와 같은 무차원 수의 함수인 증폭인자(amplification factor)의 크기에 의존한다. 계산 시간 간격은 다음과 같이 모든 격자점에서 계산된다.

$$\Delta t = \min \left\{ \frac{CFL}{\max(\rho^1, \rho^2, \rho^3)}, \frac{VN}{Re \max(g^{11}, g^{22}, g^{33})} \right\} \quad (28)$$

여기서  $\rho^j$ 는 이류플럭스 벡터중 음해적으로 처리한 선형부분의 스펙트럼반경이다. 이 연구에서 다룬 모든 적용 문제의 계산에서 CFL 수와 VN 수는 각각 1.0과 0.5를 사용하였다.

## 4. 적용

이 장에서는 DAF 기법의 해석결과를 다단(multistage) 반복기법중 대표적으로 이용되고 있는 양해 Runge-Kutta AC 반복기법을 적용한 해석결과와 비교하여 수렴 특성을 분석한다. 이 연구에서 비교 목적으로 사용한 기법은 Jameson 등(1981)이 개발한 4단 Runge-Kutta(four-stage Runge-Kutta, 이하 RK4 이라 함) 알고리즘으로서 큰 CFL 수의 사용이 가능하고, 기법의 강건함(robustness)이 강화되고 시간단계절차의 전반적인 오차 감폭(damping) 특성을 개선한 것이다(Swanson 등, 2007; Haelterman 등, 2009). 수렴특성은 다음과 같은 흐름변수 잔차의 시간 변화를 이용하여 분석하였다.

$$\text{Residual} = \frac{1}{N} \sum_{i,j,k} \Delta \phi_{i,j,k}$$

여기서,  $N$ 은 총 격자수이고,  $\phi$ 는 흐름변수,  $\Delta$ 는 반복계산에서 각 시간단계 사이의 흐름변수 값의 차이이다.

DAF와 RK4기법의 차이는 지배방정식의 시간 적분과 관련된 서로 다른 반복 시간 진행(iterative time marching)기법이며, 모든 공간이산화 기법은 정확하게 동일하므로 동일 격자상에서 수행한 계산을 통해 구한 해가 수렴을 하였을

경우 흐름장(flow fields)에 대한 계산 결과는 두 기법 모두 동일하다. 따라서 이 연구에서는 두 기법에 의한 해의 수렴성을 비교에 중점을 둔다.

#### 4.1 만곡부에서 완전 발달한 흐름

첫번째 적용에는 사각형 단면을 갖는 만곡 덕트에서의 층류흐름을 예측하는 것이다. Humphrey 등(1977)은 90°로 강하게 휘어지는 사각형 만곡 덕트에서 흐름을 실험적으로 관측하였는데, 이 때 덕트의 수리직경  $H$ 와 총괄유속(bulk velocity)에 근거한 레이놀즈 수는  $Re=790$ 이고 상응하는 Dean 수는  $De=368$ 이었다. 실험에서는  $45H$  길이의 긴 직선 유입수로를 이용하여 만곡부 유입부분에서 완전히 발달한(fully developed) 흐름을 구현하였다. 본 연구의 수치해석에서는 계산영역의 상류단 경계를 만곡부 시작 단면으로부터  $2.5H$  길이의 상류부에 위치시켰으며, 여기서 White (2005)의 해석해를 이용하여 완전 발달한 유입부 흐름을 적용하였다. 계산영역의 출구는 만곡부가 끝나는 단면의  $5H$  하류부에 설정하였다.

대상 계산영역과 계산 격자의 형상을 보여주는 그림 1에서 나타난 바와 같이, 덕트의 기하학적 형상은  $z$ -축에 대해서 대칭이며, 입력 유속 분포 또한 대칭이므로,  $z$ -축에 대해서 덕트의 반만을 계산에서 고려하였다. 계산은 흐름방향 격자수의 세밀화에 따른 계산결과에 영향을 평가하기 위해서 흐름방향, 횡방향 그리고 연직방향으로  $99 \times 41 \times 21$ 의 격자수를 갖는 격자망에서 수행하였다. 계산격자는 만곡부 내에서 흐름방향 격자 간격이 각각  $1.5^\circ$ 가 되도록 설정하였다. 횡단 평면상에서 격자점은 늘림비율(stretching ratio)이 1.25를 초과하지 않도록 하여 쌍곡선 접선(hyperbolic tangent) 늘림함수를 사용하여 분포시켰다.

계산영역의 유입단면에서는 해석해에 의한 유속성분 그리고 벽면에서는 비활(no-slip)조건을 부과하였다. 유입부와 벽경계에서의 압력은 선형 외삽법에 의해서 계산하였으며, 대칭평면( $z=0$ )에서 압력의 수직도함수는 0으로 설정하였다. 유출경계에서 압력과 3개의 유속성분은 비반사, 음해, 특성곡선에 근거한 경계조건(Paik 등, 2005)을 이용하여 계산하였다. 대칭면에서 유속의 수직성분은 0으로 설정하고 접선방향 성분들은 Neumann 대칭조건(수직도함수 = 0)을 이용하여 계산하였다.

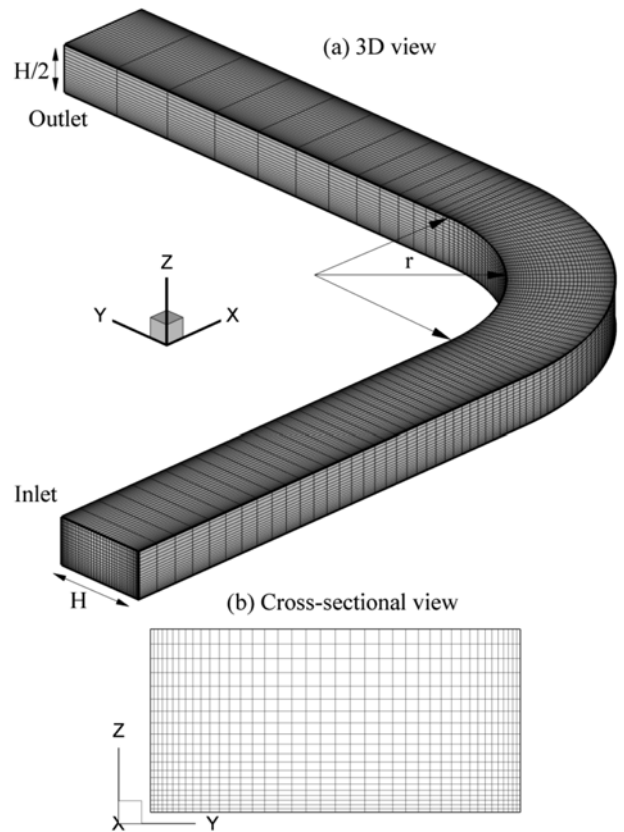


Fig. 1 Computation grid and coordinate system for duct flow of Humphrey *et al.* (1977)

전 계산 구간에서의 흐름을 보면 이 흐름의 특성을 명확하게 이해할 수 있다. 이 덕트에서 이차류(secondary flow)의 형성을 보여주기 위하여 그림 2에서 선정된 3개의 대표 단면에서 횡방향 유속벡터와 흐름방향 등유속선을 도시하였다. 이 그림에서 유속벡터는 한 쌍의 이차 와류(secondary vortices)의 형성을 보여주는데, 이것은 흐름이 만곡부를 통해서 흐를 때 만곡 외측 벽면을 따라서 발생하는 큰 압력값에 의해서 발생한다.

이 이차류로 인하여 중앙부 흐름(core flow)은 압력을 받는 벽면으로부터 이동하게 되며, 옆 벽면으로부터 떨어져 나온 낮은 운동량의 경계층 유체는 만곡 내측 벽면에 축적된다. 그림 2에서 보인 바와 같이, 이들 와류의 중심은  $\theta=30^\circ$ 와  $60^\circ$  사이에서 만곡 내측 벽면을 향해서 이동하는 것

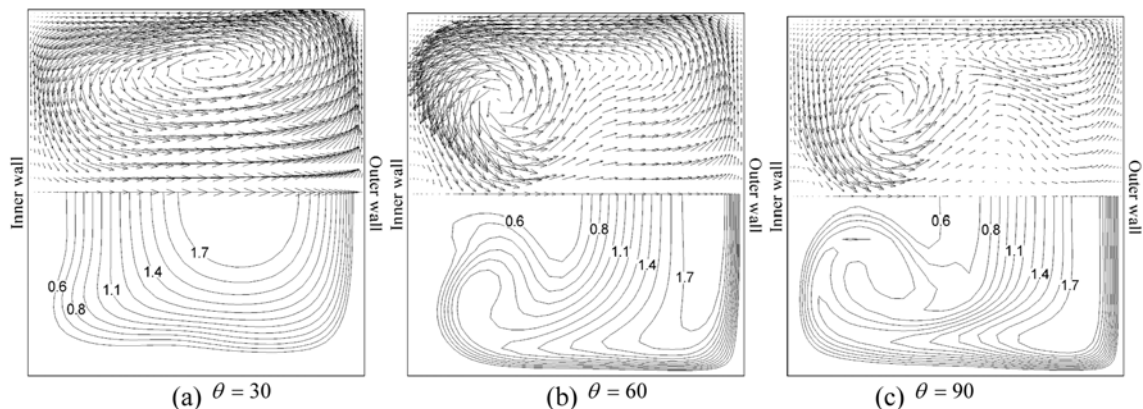


Fig. 2 Computed cross-sectional velocity vectors and streamwise velocity contours at three representative cross sections of duct of Humphrey *et al.* (1977)

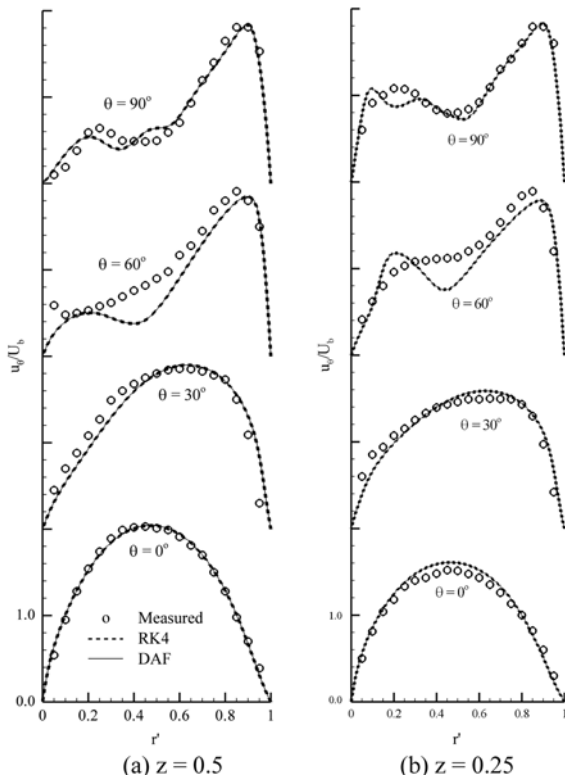


그림 3. Humphrey 등(1977)의 흐름 계산영역내 두 개의 대표 수평 단면( $z = 0.5$ 와  $0.25$ )에서 흐름 방향 유속에 대한 계산값과 실험값의 비교

으로 보인다. 이 외류는 하류로 이동할수록 수로 중앙부로 이동하려는 경향이 있다. 이러한 이차류는 혼합과 열전달계수를 증가시킬 뿐만 아니라 만약 덕트에서 발생하는 보다 높은 압력과 마찰 손실을 초래하게 된다(Humphrey 등, 1977).

이 연구에서 대상흐름에 대해서 적용한 수치기법의 예측 정확도를 검토하기 위해서 그림 3에 두 개의 수평 단면  $z = 0$ (대칭단면)과  $z = 0.25$ 상에서의 선정된 4개의 단면에서 흐름방향 유속성분의 계산값을 Humphrey 등(1977)의 관측값과 비교하였다. 그림 4에서는 3개의 대표 단면에서 선정된 5개의 연직선에서 계산된 유속분포를 관측값과 비교하였다.

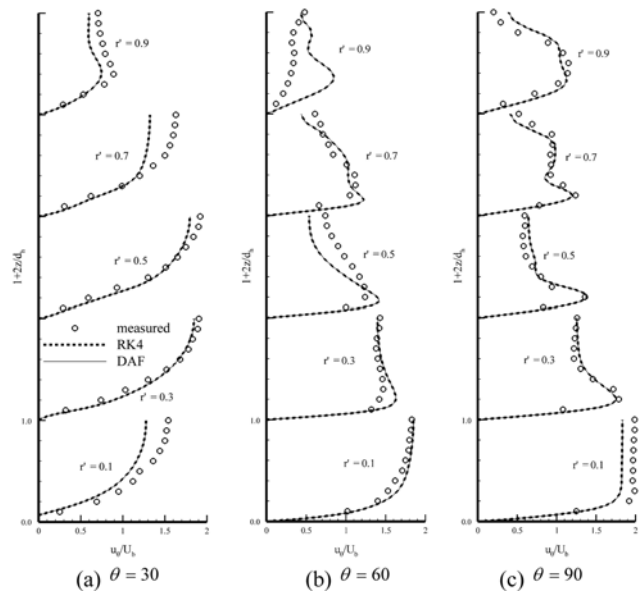


그림 4. Humphrey 등(1977)의 흐름 계산영역내 대표 선택지점,  $r' = (r-r_0)/(r_i-r_0)$ , 연직선상에서 흐름 방향 유속의 계산값과 실험값 비교

앞서 언급했듯이, 이 연구에서 적용하는 두 개의 수치기법 RK4와 DAF는 동일한 2차 정확도의 공간차분기법을 이용하므로 해가 수렴하는 비율은 다르지만, 결국 해가 수렴하게 되면 흐름의 예측값은 거의 동일하게 된다. 따라서, 수렴된 예측값을 도시한 그림 2에서 보인 바와 같이 RK4와 DAF의 수렴된 계산값은 근본적으로 동일하다. 두 기법의 수렴율은 다음 단락에서 검토하기로 하고, 우선 이 연구에서 적용한 2차 정확도의 공간차분기법의 계산결과를 보자. 그림 3에서 보면  $\theta = 0^\circ$ 와  $30^\circ$  단면에서 계산값은 관측값과 양호하게 일치하고 있다. 하지만, 이보다 하류의 단면에서는 일부 차이를 보이고 있다.  $\theta = 60^\circ$ 의 단면의 중앙부분에서 계산된 유속은 관측값 보다 느리게 계산된 것으로 나타났으며, 이로 인하여  $\theta = 90^\circ$  단면에서도 계산값과 관측값에 일부 차이가 발생하는 것으로 나타났다. 이러한 결과는 Humphrey 등의 흐름을 고려한 다른 수치해석 연구들(Tamamidis 등, 1996, Ekaterinaris, 2004)에서 구해진 결과와 유사한 것으로 나타

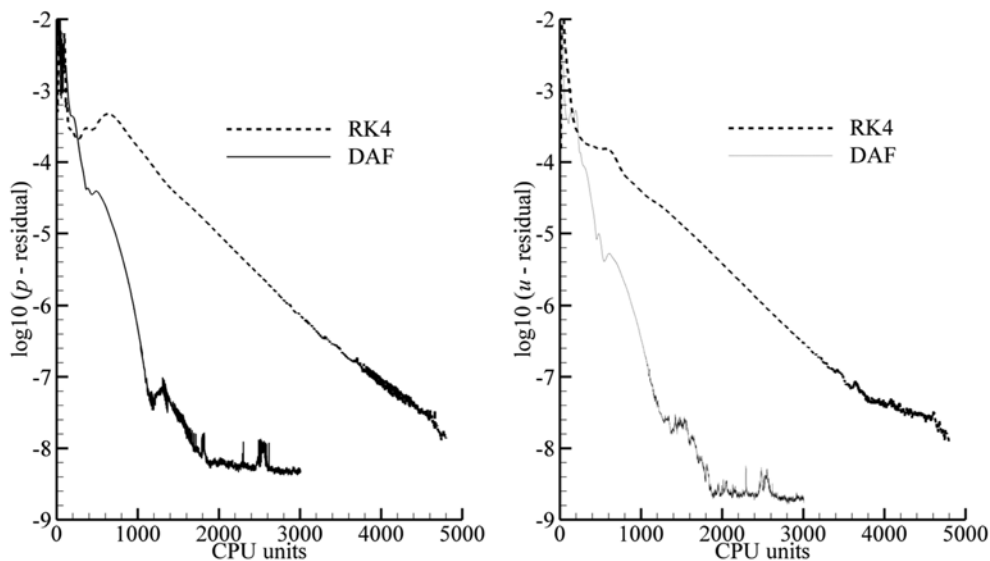


그림 5. Humphrey 등(1977)의 흐름에 대한 수치해의 수렴을 비교

났다.

그림 5에서는 RK4와 DAF 알고리즘의 성능을 평가하기 위해서, 계산된 입력과 흐름방향 유속의 수렴 이력을 도시하였다. 주어진 정상상태 흐름문제에 대해서 수렴기준으로 잔차가  $10^{-7}$ 인 시점을 정한다면, 그림 5에서 보인 바와 같이 DAF 기법이 일관성 있게 RK4 기법보다 약 3배 이상 빠른 수렴율을 가짐을 보여준다. 이러한 결과는 DAF기법이 실제 적용문제에서 매우 효율적인 기법임을 보여준다.

#### 4.2 만곡부에서 발달하는 흐름

Taylor 등(1982)은  $Re = 790$ ,  $De = 368$  조건의 만곡부에서 발달하는(developing) 흐름을 실험적으로 관측하였다. 이 덕트의 기하학적 형상은 Humphrey 등(1977)이 실험에서 이용한 수로와 거의 유사하며, 유일한 차이는 만곡부 입구에서 얇은 경계층이 발달하도록 유입 수로의 길이를 짧게 설정하였다는 것이다. 계산은 흐름방향, 측면방향 그리고 연직방향으로  $69 \times 41 \times 21$ 의 격자수를 갖는 계산격자상에서 수행하였다. 만곡부에서 흐름방향 격자의 간격은  $3^\circ$  이다.

계산의 시작은 실험 수로의 규격에 맞게 만곡부 시작 단면으로부터  $7.5 H$  상류부 지점에서 시작하였으며, 입구경계 조건으로 등류(uniform, plug) 유속분포를 설정하였다. 하지만, 사실 이 지점에서의 등류 분포의 설정은 실험조건을 정확하게 표현하지는 못한다. 왜냐하면, 실험수로에서는 이미 수로 유입부에서 경계층 발달이 시작했기 때문이다. 일례로 Govindan 등(1991)의 연구결과를 보면, 실험에서 관측된 입구단면에서의 경계층 두께를 고려하기 위해서는 만곡부 시작점에서 상류부로  $8.5 H$  지점에서 계산을 시작하여야 한다. 이 연구에서는 계산결과의 정확도 보다는 알고리즘의 효율성(수렴율)을 분석하는 것이 핵심이므로 이러한 입구 길이(entrance length)가 계산결과에 미치는 영향은 고려하지 않았다. 계산영역의 출구경계는 만곡부가 끝나는 단면으로부터  $7H$  하류부에 위치하며, 이전 절에서 언급한 바와 같이 출구에서는 특성곡선에 근거한 비반사 경계조건을 설정하였다.

그림 7은 대상 수로내의 두 개  $x-y$  평면 ( $z = 0.25H$ 와  $z = 0.5H$ )에서 계산된 유속벡터도를 보여준다. 앞서 언급했듯

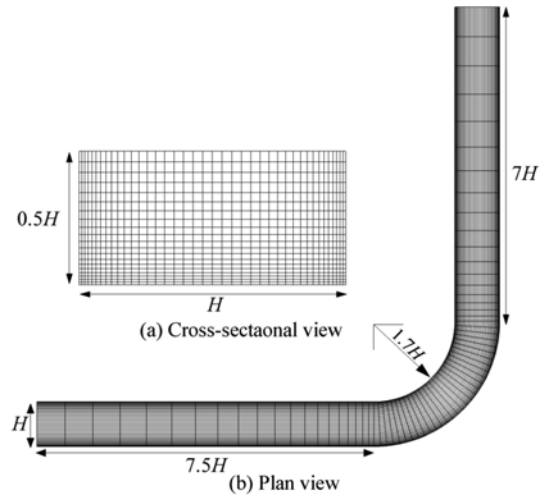


그림 6. Computation grid and coordinate system for duct flow of Taylor et al. (1982)

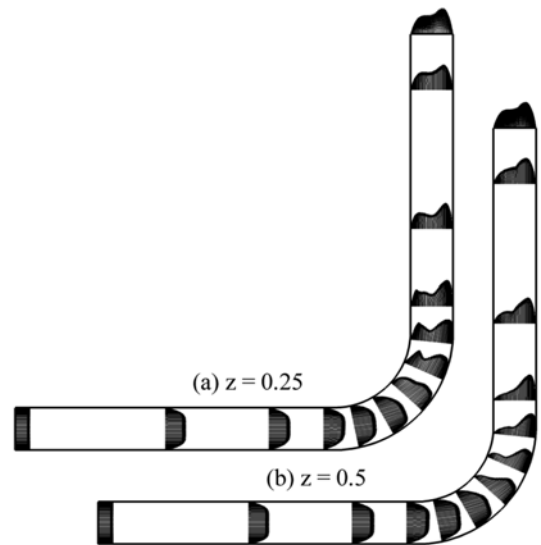


그림 8. Taylor 등(1982)의 만곡 덕트내 선정된 단면에서 계산된 흐름방향 등유속도

이 RK4 기법과 DAF 기법 모두 동일한 공간 이산화 기법을 이용하므로 수렴된 계산결과는 근본적으로 동일하다. 이 그림은 유입단면에서 설정된 균일 유속을 갖는 흐름이 만곡

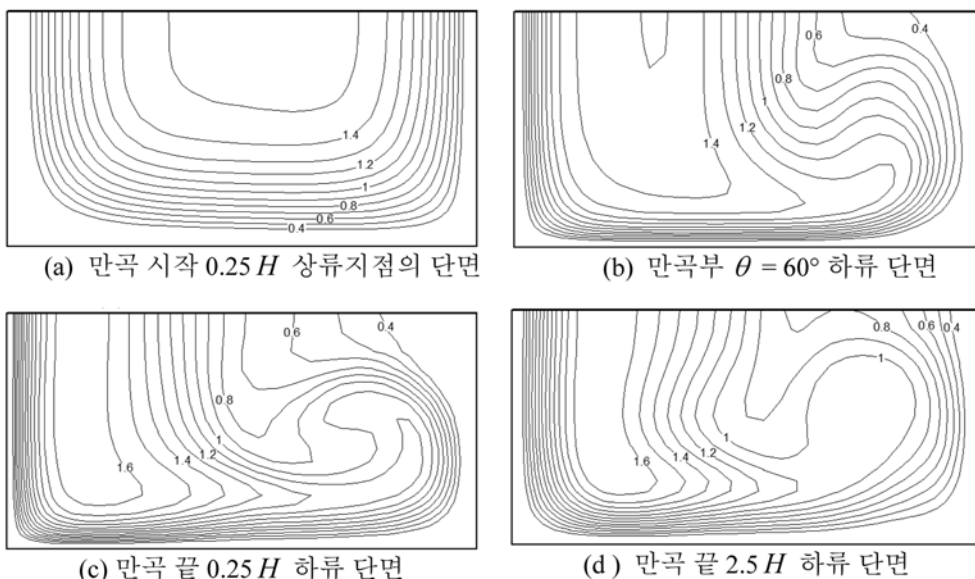


그림 8. Taylor 등(1982)의 만곡 덕트내 선정된 단면에서 계산된 흐름방향 등유속도

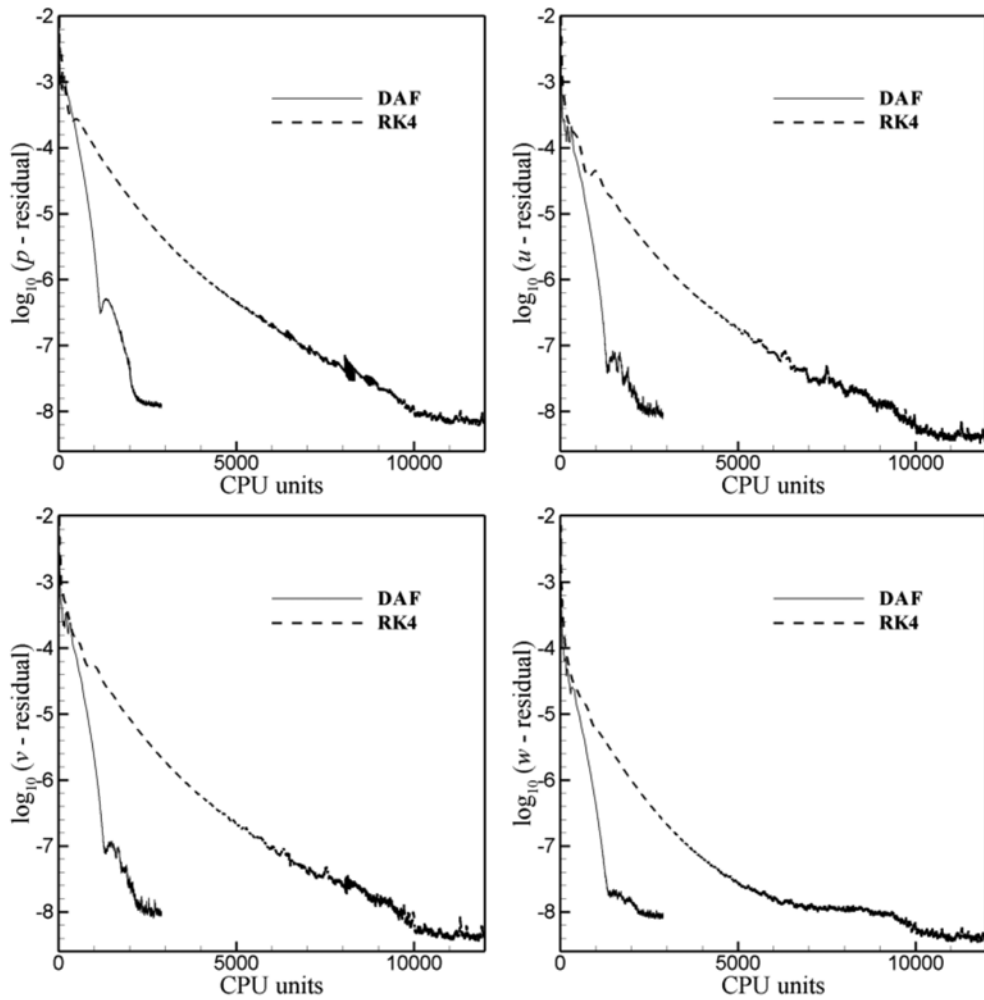


그림 9. Taylor 등(1982)의 흐름에 대한 수치해의 수렴을 비교

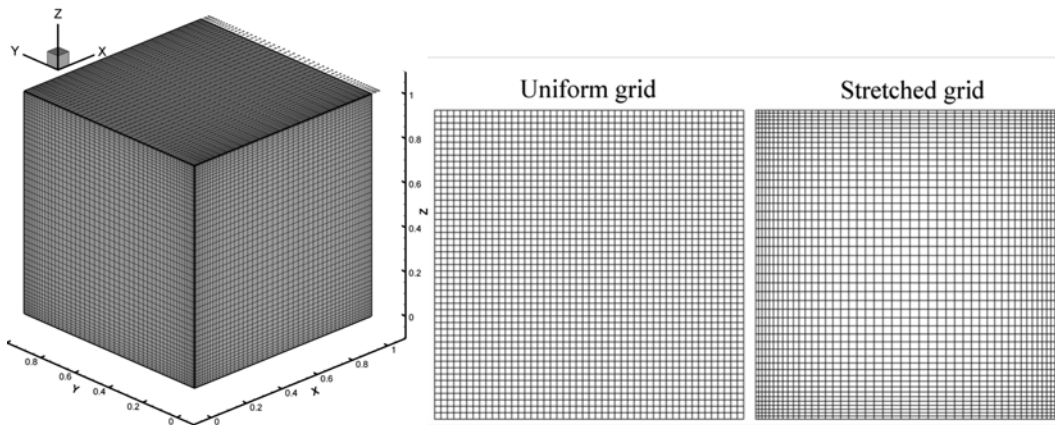


그림 10. 공동(cavity)에서의 흐름해석을 위한 계산격자와 수면에 경계조건으로 설정한 유속벡터

부를 통과하면서 발달하는 과정을 잘 보여주고 있다. 즉, 만곡부를 통과하면서  $z = 0.25$  단면에서는 종방향 유속분포가 두 개의 정점을 형성하는 반면에, 대칭단면( $z = 0.5$ )에서는 하나의 정점이 두드러지면서 만곡부 내측에서의 유속분포가 감소함을 보여준다. 이러한 유속분포의 발달형태는 Taylor 등(1982)의 관측값과 일치한다. 그림 8은 선정된 4개의 단면에서 계산된 흐름방향등유속도를 보여준다. 전반적인 계산결과의 정확도는 Sotiropoulos 등(1994)의 결과와 유사함을 보이며, 만곡부를 통과하면서 발달하는 흐름방향 유속분포와 이차류의 형태는 앞 절에서 다룬 Humphrey 등(1982)의 덕트 흐름에서의 형태와 근본적으로 같음을 알 수 있다(Tamamidis

등, 1996).

RK4와 DAF 알고리즘의 계산 성능을 평가하기 위해서, 대상 문제에 대해서 계산된 압력 잔차와 3개 방향 유속 잔차의 수렴 이력을 그림 9에서 도시하였다. 주어진 정상상태(steady state) 흐름문제에 대해서 수렴기준으로 잔차가  $10^{-7}$  인 시점을 정한다면, 그림에서 보인 바와 같이 DAF 기법이 일관성 있게 RK4 기법보다 약 2.5배 정도 빠르게 수렴하는 것으로 나타났다.

### 4.3 공동 내에서의 흐름

이 절에서는 개발된 DAF 기법의 계산상 효율성을 추가적



으로 평가하기 위해서 상부의 벽이 일정한 속도로 이동하는 정육면체 공동(cavity)에서의 층류 흐름을 다룬다. 세로, 높이가 모두  $H$ 인 공동에서의 흐름을 상부 유속과  $H$ 에 근거한  $Re=100$ 의 조건에서 RK4와 DAF 기법을 이용하여 계산하고 결과의 수렴율을 비교하였다. 이 적용 문제에서는 격자의 균일함과 불균일함이 계산 속도에 미치는 영향을 분석하기 위해서 두 개의 격자, 즉 균일 격자 간격과 그렇지 않은 격자망을 이용하여 계산을 수행하였다. 각 방향으로 격자수는  $49 \times 49 \times 49$ 이다. 그림 10은 계산영역, 격자망, 좌표계 그리고 경계조건인 상부에서의 균일 유속 벡터를 보여준다. 계산영역에서 상부를 제외한 모든 방향의 경계는 벽면으로 구성되어있다. 상부에서 경계조건으로  $u=1$ 이며  $v=w=0$ 이다.

그림 11은  $x-z$  대칭( $y=0.5$ ) 평면과  $y-z$ ( $x=0.5$ ) 평면에서의 유속벡터도와 유선을 보여준다. 이 흐름의 가장 큰 특징은 공동의 중앙에서 폐합된 유선으로 보여지는 재순환(recirculation) 유체 거동인 제1와(primary vortex)과 상부 경계면으로부터 멀리 떨어진 모퉁이들에서 주고 모퉁이 와들(corner vortices) 라고 하는 작은 규모의 재순환 흐름이

발생하는 것이다(Prasad와 Koseff, 1989). 이러한 일반적인 3차원 공동흐름의 특성이 그림 11에 잘 나타나 있다.

두 개의 서로 다른 격자(균일 및 불균일 간격 격자)에서 RK4와 DAF 기법을 이용한 수치실험의 효율성을 비교하기 위해서 그림 12에 두 기법에 의해서 계산된 결과(압력과 흐름방향 유속)의 시간단계별 잔차의 이력을 도시하였다. 그림에서 보면, 먼저 균일 격자에서 계산된 값들이 불균일 격자에서 계산된 값들보다 두 수치기법 모두 계산 결과의 수렴이 빨리 이루어짐을 알 수 있다. 이러한 결과는 균일 격자를 사용할 경우 벽면 근처에서의 격자 간격이 상대적으로 커져서 모퉁이 외의 정확한 형상과 이들의 발달 과정을 무시하고 모의하기 때문이다. 불균일 격자를 사용할 경우, 벽면 부근에서 상대적으로 조밀한 격자망을 사용하기 때문에 작은 규모의 모퉁이 와들의 형상과 이들의 시간에 따른 발달 과정을 보다 현실적으로 재현할 수 있게 되므로 상대적으로 계산시간이 균일 격자를 이용했을 경우 보다 더 걸리게 된다. 한편, 그림 12의 결과들은 모든 경우에 있어서 DAF 기법의 수렴율이 RK4기법에 비해서 약 2배 정도 우수함을 보여준다.

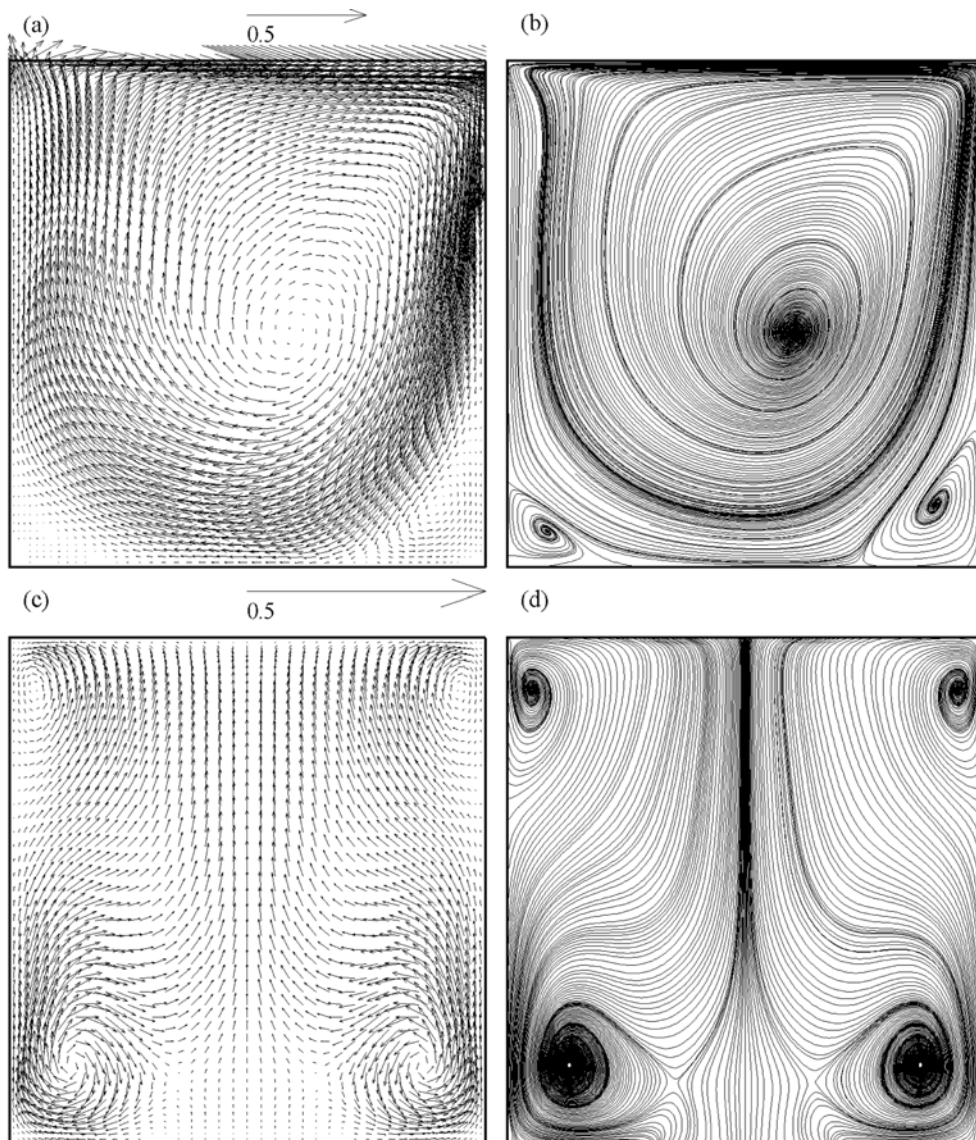


그림 11. 계산된 공동에서의 흐름: (a)와 (b) 흐름방향 대칭  $x-z$ ( $y=0.5$ )단면에서의 유속벡터와 유선, (c)와 (d) 연직 중앙  $y-z$ ( $x=0.5$ ) 평면에서의 유속벡터와 유선

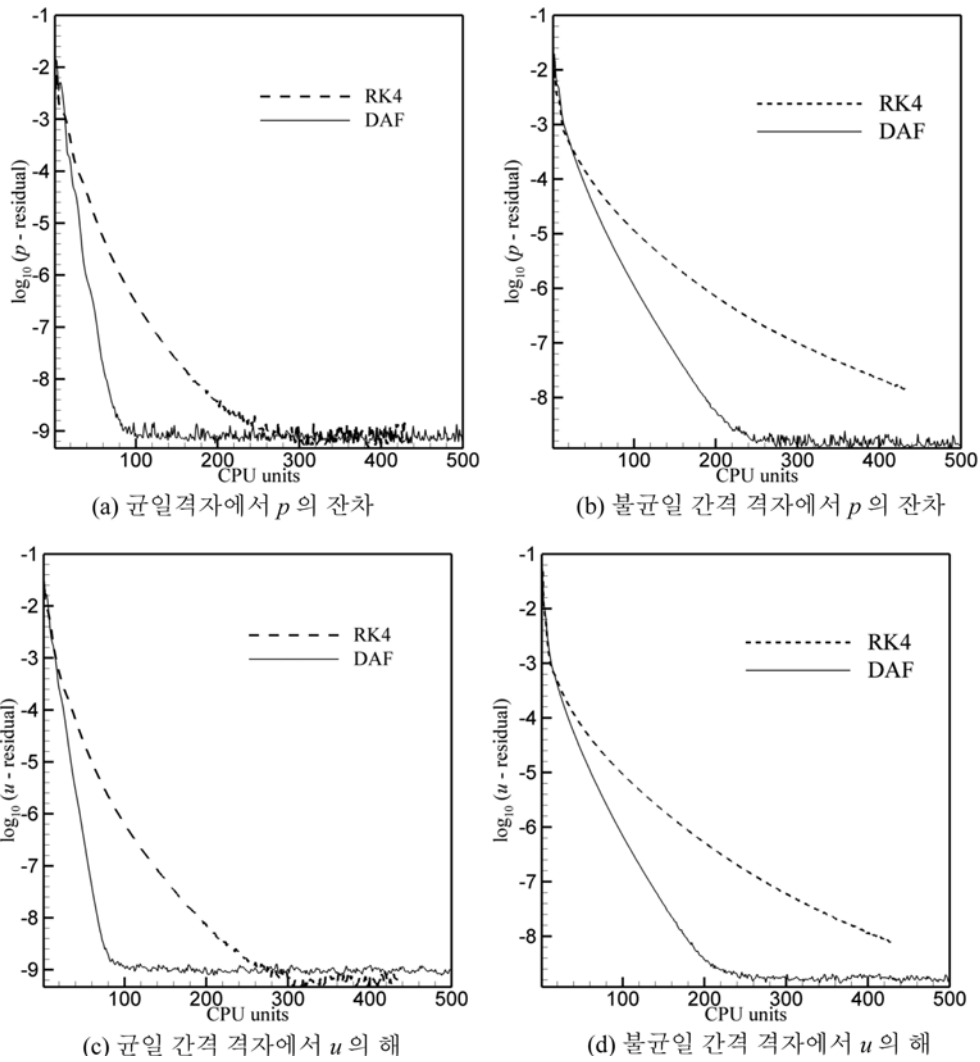


그림 12. 공동흐름에 대한 수치해의 수렴을 비교

## 5. 결 론

비압축성 점성 흐름을 효율적으로 모의하기 위해서 압력 항에 근거한 알고리즘과 인공압축성 알고리즘을 이용한 음해 대각행렬화된 근사 인수분해 기법을 개발하였다. 개발된 DAF 기법은 차분 예조건 행렬로서 큰 CFL수를 사용할 수 있고 수치적으로 안정적이며, 시간단계 기법의 전반적인 수치분산 특성을 개선하는 음해잔차완화 연산자를 이용하며, 기본적인 반복기법의 성능 향상에 큰 영향을 주는 효율적인 다중격자 알고리즘과 국부시간단계법을 병합한 것이다. 개발된 수치기법을 만족부를 갖는 사각형 덕트에서 완전 발달한 흐름과 발달하는 흐름 그리고 공동에서의 3차원 흐름을 모의하여 계산결과를 분석하였다. 폭 넓게 이용되고 있는 4단계 Runge-Kutta 기법과 비교한 결과, 이 연구에서 개발된 기법이 3차원 비압축성 점성 흐름을 효율적으로 해석할 수 있음을 보여준다. 적용 경우 별로 보면, DAF 기법은 RK4 기법에 비해서, Humphrey 등(1977)의 흐름에 대해서는 약 3배이상, Taylor 등(1982)의 흐름에 대해서는 약 2.5배 이상 그리고 공동흐름 해석에 대해서는 약 2배 이상 수렴된 해를 빠르게 계산할 수 있는 것으로 나타났다. 따라서 해석결과는 DAF기법이 계산시간을 크게 단축시키고, 수렴성이 우수한 수치기법임을 보여준다. 개발된 대각행렬화된 근사 인수분해

기법은 단지 스칼라 삼중대각행렬의 전환만이 필요하므로 낮은 계산량으로 해를 구할 수 있으며, 프로그램화가 간단하고, 수렴성이 비교 기법보다 최소 2배 이상 우수하므로, 일반 PC로는 감당하기 힘들 정도인 3차원 비정상 흐름문제 해석을 더욱 용이하게 할 수 있으며, 병렬계산을 위한 전환이 어렵지 않으므로 공학적인 문제를 해석하는데 도움을 줄 수 있다.

## 감사의 글

이 논문은 2010년 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(NRF-2010-0015404). 이 연구의 일부는 2009년도 강릉원주대학교 기성희 학술연구 조성비 지원에 의해 이루어 졌음.

## 참고문헌

- Beam, R. and Warming, R.F. (1978) An implicit scheme for the compressible Navier Stokes equations, *AIAA J.*, Vol. 16, No. 4, pp. 393-402.
- Brandt, A. (1980) Multilevel adaptive computations in fluid dynamics, *AIAA J.* Vol. 18, No. 10, pp. 1165-1172.
- Briley, W.R. and McDonald, H. (2001) An overview and general-

- zation of implicit Navier-Stokes algorithms and approximate factorization, *Computer and Fluids*, Vol. 30, No. 7-8, pp. 807-828.
- Chorin, A. (1967) A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. of Comput. Phys.*, Vol. 2, pp. 12-26.
- Dukowicz, J.K. and Dvinsky, A.S. (1992) Approximate Factorization as a high order splitting for the implicit incompressible flow equations, *J. of Comput. Phys.*, Vol. 102, pp. 336-347.
- Ekaterinaris, J.A. (2004) High-order accurate numerical solutions of incompressible flows with the artificial compressibility method, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 45, No. 11, pp. 1187-1207.
- Govindan, T. R., Briley W. R. and McDonald, H. (1991) General three dimensional viscous primary/secondary flow analysis, *AIAA J.*, Vol. 29, pp. 361-370.
- Haelterman, R., Vierendeels, J., and Van Heule, D. (2009) A generalization of the Runge-Kutta iteration, *J. of Comput. Appl. Math.*, Vol. 224, No. 1, pp. 152-167.
- Humphrey, J.A.C., Taylor, A.M.K., and Whitelaw, J.H. (1977) Laminar flow in a square duct of strong curvature. *J. Fluid Mech.*, Vol. 83, pp. 509-527.
- Jameson, A. (1986) Multigrid algorithms for compressible flow calculations, Second European Conference on Multigrid Methods, *Report MAE 1743*, Princeton University, NJ.
- Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E. (1981) Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. *AIAA Paper 81-1259*, 1981.
- Khangaonkar, T., Yang, Z., Paik, J., and Sotiropoulos, F. (2008) Simulation of hydrodynamics at stratified reservoirs using a staged modeling approach. *J. of Coastal Research*, Vol. SI52, pp. 79-86.
- Lin, F.B. and Sotiropoulos, F. (1997) Assessment of artificial dissipation models for three-dimensional incompressible flow solutions. *J. of Fluids Eng.*, Vol. 119, No. 2, pp. 331-340.
- Merkle, C.L. and Tsai, P.Y.-L. (1986) Application of Runge-Kutta schemes to incompressible flows. *AIAA Paper 86-0553*.
- Paik, J., Sotiropoulos F., and Sale, M.J. (2005) Numerical simulation of swirling flow in a complex hydro-turbine draft tube using unsteady statistical turbulence models. *ASCE J. of Hydraulic Eng.* Vol. 131, No. 6, pp. 441-456.
- Paik, J., Escauriaza, C., and Sotiropoulos, F. (2010) Coherent structure dynamics in turbulent flows past in-stream structures: some insights gained via numerical simulation, *ASCE J. of Hydraul. Eng.*, Vol. 136, No. 12, pp. 981-993.
- Prasad, A.K. and Koseff, J.R. (1989) Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow, *Physics of Fluids*, Vol. 1, No. 2, pp. 208-218.
- Rogers, S., Kwak, D., and Kiris, C. (1991) Steady and unsteady solutions of the incompressible Navier-Stokes equations. *AIAA J.* Vol. 29, No. 4, pp. 603-610.
- Rogers, S. (1995) Comparison of implicit schemes for the incompressible Navier-Stokes equations. *AIAA J.* Vol. 33, pp. 2066-2072.
- Sotiropoulos, F., Kim, W.J., and Patel, V.C. (1994) A computational comparison of two incompressible Navier-Stokes solvers in three-dimensional laminar flows, *Computers & Fluids*, Vol. 23, No. 4, pp. 627-646.
- Swanson, R.C., Turkel, E., and Rossow, C.C. (2007) Convergence acceleration of Runge-Kutta schemes for solving the Navier-Stokes equations, *J. of Comput. Phys.*, Vol. 224, No. 1, pp. 365-388.
- Tamamidis, P., Zhang, G., and Assanis, D.N. (1996) Comparison of pressure-based and artificial compressibility methods for solving 3D steady incompressible viscous flows. *J. of Comput. Phys.*, Vol. 124, pp. 1-13.
- Tang, H.S., Paik, J. Sotiropoulos, S., and Khangaonkar, T. (2008) Three-dimensional numerical modeling of initial mixing of thermal discharges at real-life configurations. *ASCE J. of Hydraul. Eng.*, Vol. 134, No. 9, pp. 1210-1224.
- Taylor, A.M.K.P., Whitelaw, J.H., and Yianneskis, M. (1982) Curved ducts with strong secondary motion: Velocity measurements of developing laminar and turbulent flow, *J. of Fluid Eng.*, Vol. 104, pp. 350-359.
- Yang, J.Y., Yang S.C., Chen, Y.N., and Hsu, C.A. (1998) Implicit weighted ENO schemes for three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *J. of Comput. Phys.* Vol. 146, pp. 464-487.
- White, F.M. (2005) *Viscous Fluid Flow*, McGraw-Hill Science, New York.

(접수일: 2011.2.7/심사일: 2011.3.11/심사완료일: 2011.3.11)