

NLL과 GMM을 중심으로 한 확산모형 추정법 비교

김대균¹ · 이윤동²

¹무림캐피탈, ²서강대학교 경영학부

(2011년 8월 접수, 2011년 11월 채택)

요약

현대금융공학에 있어서 확산모형은 중요한 역할을 담당하고 있다. 다양한 형태의 확산모형이 제안되어왔고 현실에 응용되어 왔다. 확산모형을 이용하여 금융자료를 분석하기 위하여는 확산모형의 모수를 추정하는 것이 필수불가결한 단계이다. 이들 모수에 대한 다양한 추정방법들이 제안되어 왔고, 많은 연구에서 이러한 추정방법들이 갖는 성질에 대하여 연구되어져왔다. 이 연구에서는 그 적용방법이 단순하여 가장 자주 사용되는 것으로 알려진, 오일러 근사법과 신국소근사법(NLL) 그리고 일반화 적률법(GMM)과 같은 세 가지 추정방법들에 대한 통계적 성질을 검토하게 될 것이다. 모의실험연구를 통하여 오일러근사법이나 NLL방법이 GMM 방법에 비하여 훨씬 좋은 성질을 가지고 있음을 보이게 된다. 특히 GMM은 적용방법이 단순할 뿐만 아니라 강건성(robustness)이라는 좋은 성질을 가지고 있는 것으로 알려져 있어서 많은 연구에서 매우 자주 사용되는 추정방법이다. 그러나 본 연구에서 확인해 본 바와 같이 GMM은 그 사용법이 오히려 더욱 단순한 NLL이나 오일러방법에 비하여 열등한 통계적 성질을 보여주고 있었다. 특히나 확산계수에 추정모수가 포함된 경우에 GMM은 매우 좋지 못한 성질을 보이게 된다.

주요어: 확산모형, 신국소근사법, 일반화 적률법, 기하브라운운동, Vasicek model.

1. 서론

확산모형은 금융현상의 확률적 해석을 위하여 자주 사용되는 모형이다. 수리적으로 확산과정 X_t 는 추세함수 $f(x_t, t)$ 와 확산함수 $g(x_t, t)$ 를 갖는 확률미분방정식

$$dX_t = f(X_t, t)dt + g(X_t, t)dW_t$$

의 해로 주어지는 연속형 표본경로를 갖는 강한 마코프 확률과정이다. 특히 $f(X_t, t)$ 와 $g(X_t, t)$ 가 시간을 의미하는 변수 t 에 무관한 경우 이를 이또확산모형이라고 한다. 즉, 이또확산과정은

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW_t \quad (1.1)$$

의 해로서 주어지는 연속시간 확률과정이다. 이를 적분형태로 표현하면,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dW_s$$

이다. 추세함수와 $f(x)$ 와 확산함수 $g(x)$ 가 전역립쉬(global Lipschitz) 조건과 선형증가(linear growth) 조건을 만족하는 경우 유일한 강해가 존재한다. 즉, 모든 $t \geq 0$ 와 x, y 에 대하여

$$|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$$

이 연구는 한국연구재단 2010년 기초연구지원사업의 지원을 받아 수행된 연구입니다(NRF-2010-327-B00267).

²교신저자: (121-742) 서울시 마포구 신수동1번지, 서강대학교 경영학부, 교수. E-mail: widylee@sogang.ac.kr

이고

$$|f(x)|^2 + |g(x)|^2 \leq K^2 (1 + |x|^2)$$

인 조건을 만족하는 K 가 존재하고, 초기값 ξ 가 $E|\xi|^2$ 이 유한하게 되는 확률변수로 주어지는 경우 식 (1.1)을 만족하는 유일한 강해 X_t 가 존재한다 (Karatzas와 Shreve, 1998, 5장).

Bachelier (1900)와 Samuelson (1965)이 브라운운동과 기하브라운운동을 통하여 금융현상을 설명한 이후로, 금융현상을 설명하기 위하여 다양한 형태의 추세함수 $f(X_t)$ 와 확산함수 $g(X_t)$ 가 고려되었고, 이에 따라 다양한 확산모형이 제안되었다. Vasicek (1977)은 Ornstein-Uhlenbeck확률과정을 이용하여 단기이자율 과정을 설명하였으며 Cox 등 (1985)은 이자율 구조를 구하기 위하여 CIR(Cox-Ingersoll-Ross) 모형을 제안하였고, Chan 등 (1992)은 베시첵모형이나 CIR 모형 등 기존에 제안되었던 모형을 일반화하여 미국 이자율 시장 연구를 위하여 CKLS라 불리는 모형을 제안하였다. Black과 Scholes (1973)가 확산과정인 기하브라운운동(geometric Brownian motion; GBM)으로 주가의 움직임을 모형화하고 이로부터 옵션 가격을 도출한 이후, 확산모형은 자산가격결정 분야의 주요 수리적 모형화 방법론으로 자리를 잡게 되었고, 확산과정은 대다수 자산의 가격 및 이자율의 움직임을 모형화하고 분석하기 위한 방법으로 사용되고 있다. 특정 자산의 가격을 모형화하기 위하여 확산모형을 사용하는 이유는, 자산가격이 연속시간 확률과정인 브라운운동으로부터 유도된 확률적 특성을 갖게 되면서 시간에 대하여 연속적인 모형설정이 가능하기 때문이다. 금융자산이 갖는 특징을 잘 설명할 수 있도록 다양한 형태의 추세함수와 확산함수를 도입하여 다양한 확산모형 설정이 가능하기 때문이기도 하다. 또한 수학적으로 잘 정립되어 있는 확산모형에 대한 연구결과를 잘 활용할 수 있기 때문이다.

확산과정을 이용하여 자산가격결정에 적용하기 위해서는 모형 모수의 값을 미리 특정하여야 할 필요가 있다. 이를 위하여 관측된 자료를 바탕으로 확산과정의 모수를 추정하는 절차가 필요하다. 그 추정 결과가 있어야 파생금융상품의 가격 또는 이자율 기간구조 등을 구체적으로 한정할 수 있으나 확산과정 추정에 있어서 사용하는 모형은 연속시간 모형인데 반해 우리가 관측할 수 있는 자료는 이산적으로 기록될 수 밖에 없다. 때문에 이산적으로 관측된 자료를 바탕으로 연속시간 과정인 확산모형을 추정하는 방법의 연구가 필요하다. 이산적으로 관측된 자료를 바탕으로 연속시간 모형을 추정하는 경우 오차가 발생하는데 이러한 이유로 추정에서 발생하는 오차를 “이산화 편의(discretization bias)”라고 한다. Elerian 등 (2001)은 지수함수 형태의 추세함수가 이산화편의가 있는 경우 선형함수로 추정되는 예를 보여준다.

근래에 이러한 이산화 편의를 줄이고 확산모형 모수들을 정확하게 추정하기 위해 다양한 방법들이 연구, 제안되어 왔다. 1985년 이후 확산모형에 대한 다양한 추정방법들이 제안되어 왔다. 본 연구에서는 확산모형 추정 방법 중 Shoji와 Ozaki (1998)가 제안한 NLL(New Local Linearization) 추정법과 Hansen (1982)이 제안한 GMM(Generalized Method of moment) 추정법을 중심으로 살펴보게 된다. Hurn 등 (2007)은 확산모형 추정에 사용될 수 있는 다양한 추정법에 대한 종합적인 비교연구를 실시하였다. 이 연구에서 오일러근사법, NLL 추정법, GMM 추정법은 상대적으로 다른 추정방법들에 비하여 그 적용이 매우 쉽고, 또한 그 추정결과가 비교적 우수하다는 장점을 가지고 있음을 보였다. 본 논문에서는 금융현상 설명을 위하여 자주 사용되는 여러 확산모형들에 대하여, NLL 추정법과 오일러근사법, GMM 추정법을 중심으로 각 추정방법들의 특징을 모의실험을 통하여 살펴보게 될 것이다. 모의실험을 이용한 성능비교 결과 GMM 방법의 경우 확산함수에 개입되어 있는 모수가 추정되어야 하는 경우 다른 방법들에 비하여 MSE가 커지는 성질이 있었다.

2. 확산모형

확산모형으로는 매우 다양한 모형들이 제안되어 왔다. 본 연구에서는 오일러근사법, GMM 추정법,

NLL 추정법의 비교를 위하여 다음과 같은 확산모형을 기준으로 하여 그 성능을 비교하게 된다.

기하브라운운동은 연속복리 이자계산방법에 브라운운동을 삽입하여 얻어지는 확산모형으로 블랙-숄즈 옵션가격 공식에서 기초자산인 주가가격의 움직임을 모형화하는데 이용되었다. 기하브라운운동은 다음과 같은 확률미분방정식으로 표현된다.

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t.$$

기하브라운운동은 그 주변분포가 대수정규분포를 따르는 모형에 해당하기 때문에 음수 값을 갖지 않는 특성이 있고, 음수값을 갖지 않는 금융자산의 가격을 모형화하기 적합한 특성을 갖고 있다. 뿐만 아니라 기하브라운운동은 특정기간에서의 가격의 차이에 대한 모형화가 아니라, 가격의 비율에 대한 모형화를 통하여 얻어지고 이는 현실에서 자산의 가격변화 방식을 보다 잘 설명하고 있기 때문이다.

베시책모형은 선형확산모형의 특수한 경우로 단기 이자율을 모형화하는 과정에서 자주 사용되는 확산과정이다. 이를 제안자의 이름을 따서 Ornstein-Uhlenbeck 과정 혹은 OU 확산모형 등으로 부르고 있다. 베시책모형을 확률미분방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma dW_t.$$

위의 식에서 $\alpha > 0$ 인 경우를 고려하면 X_t 값이 장기평균 β 보다 큰 값이라면 $\alpha(\beta - X_t)$ 가 음수 값을 갖게 되어 음수추세항을 갖는 확산모형이 되므로 X_t 값은 β 로 복귀한다. 마찬가지로 X_t 값이 장기평균 β 보다 작은 경우는 확산모형의 추세항이 양수가 되어 결과적으로 X_t 값은 장기평균(long-run mean) 값 주위에 분포하게 된다. 모수 α 는 평균복귀속도(mean-reversion speed)라고 부르며, 이 값이 클수록 평균으로 빨리 수렴하는 경향이 있다.

CIR 모형은 Cox 등 (1985)에 의하여 제안된 확산과정으로 펠러제곱근과정(Feller's square-root process)으로 불리기도 한다. CIR 모형을 확률미분방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t.$$

CIR 모형의 추세함수는 베시책모형의 추세함수와 같다. 즉, CIR 모형 역시 베시책모형과 같은 평균회귀과정이다. 따라서 β 는 장기평균이 되며 α 는 평균복귀속도가 된다. 베시책모형에서는 확산함수에 상태변수 X_t 가 개입되지 않지만 CIR 모형에서는 확산함수가 상태변수 X_t 에 비례한다. 베시책모형에서는 이자율의 변동성이 이자율의 수준에 비례하지 않고 상수로 표현되며, CIR 모형에서는 이자율의 변동성이 이자율의 제곱근 수준에 비례하게 된다.

Chan 등 (1992)은 CIR 모형을 확장하여 이자율 과정의 변동성이 이자율 수준의 멱함수가 되는 CEV 모형의 일종으로 다음과 같은 확률미분방정식에 의하여 표현되는 모형을 고려하였다.

$$dX_t = \alpha(\beta - X_t)dt + \sigma X_t^\gamma dW_t.$$

Chan 등 (1992)은 GMM(Generalized Method of Moment)을 이용하여 위 모형을 추정할 것을 제안하였다. 위의 모형을 이 연구를 수행했던 연구자들의 머리글자를 따서 CKLS(Chan, Karolyi, Longstaff, Sanders) 모형이라고도 부른다.

3. 확산모형의 추정방법

확산과정의 추정을 위하여 고려되는 방법으로 가장 단순한 방법이 단순한 방법에 의하여 연속적인 시간의 값을 이산적인 값으로 바꾸어 모형을

$$X_{t+\Delta} = X_t + f(X_t)dt + g(X_t)dW_t$$

과 같이 이산화하여 접근하는 오일러-마루야마 근사방법이다. 이를 보통 그냥 오일러근사법이라고 부러기도 한다. 오일러 근사법은 그 적용방법이 단순하면서도 잘 알려진 모형들에 대하여 비교적 좋은 추정값을 제공한다는 장점을 가지고 있기는 하나, 연속적인 확산모형을 이산적인 모형으로 바꾸어 접근한다는 근원적 한계에서 비롯되는 연속시간 확률과정의 추정방법에 대한 본원적 문제제기로부터 자유롭지 못한 단점을 가지고 있다.

3.1. NLL 방법에 대하여

Shoji와 Ozaki (1998)에 의하여 제안된 NLL 방법은 오일러근사법을 확장하여 접근하는 방법으로 다음과 같이 요약된다. 식 (1.1)은 확산항 안정변환

$$\varphi(x) = \int^x dv/g(v)$$

에 의하여 변환된 확률과정 $y_t = \varphi(x_t)$ 를 고려하는 경우 이또 보조정리에 의하여 다음과 같이 확산함수가 상수되는 확률미분방정식으로 변환이 가능하다.

$$dy_t = a_y(y_t)dt + \sigma_0 dW_t,$$

$$a_y(y_t) = f \frac{d\varphi}{dx} + \frac{g^2}{2} \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

이와 같은 이유로 NLL에 대한 추정법에 대한 설명은

$$dx_t = f(x_t, t)dt + \sigma dW_t \quad (3.1)$$

인 경우에 대하여 설명하는 것으로 충분하다. 여기서 추세함수를 x_t 에 대한 선형함수로 국소근사(locally approximate)시키기 위하여 이또공식을 적용하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$df = \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx.$$

이로부터 f 를 x_t 와 t 에서 선형화하여 근사하면 다음과 같다.

$$f(x_t, t) - f(x_s, s) = \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) (t - s) + \frac{\partial f}{\partial x} (x_t - x_s).$$

또한 이를 간략히 나타내면,

$$L_s = \frac{\partial f}{\partial x}(x_s),$$

$$M_s = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_s, s) + \frac{\partial f}{\partial t}(x_s, s),$$

$$N_s = f(x) - L_s x_s - M_s s$$

라 할 때, $f(x_t) = L_s x_t + M_s t + N_s$ 로 표현할 수 있다. 결국 식 (3.1)은

$$dx_t = (L_s x_t + M_s t + N_s)dt + \sigma dW_t \quad (3.2)$$

와 같이 표현된다. 여기에 거사노프(Girsanov) 정리를 적용하여, $\gamma(u) = -1/\sigma(M_s u + N_s)$ 라 하고 $\widetilde{W}_t = W_t - \int_s^t \gamma(u)du$ 라하면 \widetilde{W}_t 가 브라운운동이 되도록 하는 확률측도가 존재한다. 즉 다음과 같은 확률미분방정식에서의 전환이 가능하다.

$$dx_t = L_s x_t dt + \sigma d\widetilde{W}_t.$$

이 때, 이 식에 변수 x_t 를 $y_t = e^{-L_s t} x_t$ 로 변환하면, 위 식은 다음과 같이 y_t 에 대한 식으로 표현 된다.

$$y_t = y_s + \int_s^t (M_s u + N_s) e^{-L_s u} du + \int_s^t e^{-L_s u} dW_u$$

이를 x_t 에 대하여 다시 정리하면,

$$x_t = x_s + \frac{f(x_s)}{L_s} \left(e^{L_s(t-s)} - 1 \right) + \frac{M_s}{L_s^2} \left\{ \left(e^{L_s(t-s)} - 1 \right) - L_s(t-s) \right\} + \sigma \int_s^t e^{L_s(t-u)} dW_u$$

이다. 이때, x_t 는 분산이

$$\sigma^2 \left(\frac{e^{2L_s(t-s)} - 1}{2L_s} \right)$$

인 정규분포가 된다. 이에 따라 결합분포함수(joint density function) $p(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 로부터 얻어지는 로그-우도함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \log(p(x_1, x_2, \dots, x_N)) &= \sum_{n=1}^{N-1} \log(p(x_{n+1}|x_n)) + \log(p(x_1)) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \frac{(x_{n+1} - E_n)^2}{V_n} + \log(2\pi V_n) \right\} + \log(p(x_1)), \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, t_n), \\ M_n &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_n, t_n) + \frac{\partial f}{\partial t}(x_n, t_n), \\ E_n &= x_n + \frac{f(x_n, t_n)}{L_n} \left(e^{L_n \Delta t} - 1 \right) + \frac{M_n}{L_n^2} \left(e^{L_n \Delta t} - L_n \Delta t \right), \\ V_n &= \frac{(e^{2L_n \Delta t} - 1)}{2L_n} \sigma^2 \end{aligned}$$

이다.

Shoji와 Ozaki의 방법은 임의의 확산과정에 대하여 정규분포의 밀도함수에 근거한 근사적 전환확률을 고려하는 방법을 제공한다는 현실적인 의미 이외에, 확산과정의 전환확률이 $t \rightarrow s$ 임에 따라서 정규분포의 확률밀도함수로 바뀌게 되는 원인을 잘 보여주고 있다.

3.2. GMM에 대하여

Hansen (1982)은 적률추정법을 확장하여 다음과 같은 일반화 적률법(GMM)을 제안하였다. w_t 를 t 시점에 관측한 크기 b 인 열벡터(vector)이고, θ 를 크기 a 인 열벡터이며, $h(\theta, w_t)$ 를 $h; (R^a \times R^b) \rightarrow R^r$ 인 함수라 하자. 만약 θ_{true} 가 θ 의 참 값일 때, 다음 식을 만족하다고 가정하자.

$$E \{h(\theta_{true}, w_t)\} = 0.$$

$y_N = (w'_N, w'_{N-1}, \dots, w'_1)'$ 가 N 개의 관측값을 모두 포함하는 크기 Nh 인 열벡터이고 $g(\theta; y_N)$ 이 $h(\theta, w_t)$ 의 표본 평균의 함수 즉,

$$g(\theta; y_N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N h(\theta, w_t)$$

일 때, GMM은 표본적률인 $g(\theta; y_N)$ 와 모형으로부터 얻어지는 모수의 적률이 일치하도록 만드는 θ 를 추정량으로 선택하는 것이다. 그래서 GMM 추정량 $\hat{\theta}_N$ 은 다음의 식을 최소화 하는 θ 의 값이 선택된다.

$$Q(\theta; y_N) = [g(\theta; y_N)]' W_N [g(\theta; y_N)].$$

관측된 자료로부터 얻어진 표본적률 $\bar{g}(\theta; y_N)$ 로 부터 얻어지는 GMM의 추정치량 $\hat{\theta}_N$ 이 좋은 추정량이 되기 위해서는 가중행렬 W_N 를 잘 선택하여야 한다. 가중행렬(optimal weighting matrix) W_N 을 구하는 결정하기 위한 방법으로 다음과 같은 방법이 사용된다. 표본적률 $g(\theta; y_N)$ 에 대한 점근공분산행렬 S 는 다음과 같이 주어진다.

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} N \cdot E \{ [g(\theta_{true}; y_N)] [g(\theta_{true}; y_N)]' \}.$$

이때 행렬 S 는 추정해야할 모수인 θ 의 함수가 되므로, 모수 θ 대신 어떤 추정량 $\hat{\theta}$ 을 대입하기로 하면

$$\hat{S}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [h(\hat{\theta}_N, w_t)] [h(\hat{\theta}_N, w_t)]'$$

인 행렬을 얻게 된다. 공분산행렬에 대한 추정행렬 \hat{S}_N 은 대입되는 추정량 $\hat{\theta}$ 이 일치성을 갖게 되면 마찬가지로 공분산행렬 S 로 수렴하는 일치성(consistency)을 갖게 된다. 이때 GMM 추정량 $\hat{\theta}_N$ 에 대한 점근적분산은 다음과 같이 표현된다.

$$Q(\theta; y_N) = [g(\theta; y_N)]' S^{-1} [g(\theta; y_N)].$$

GMM 추정량 $\hat{\theta}_N$ 은 위의 $Q(\theta; y_N)$ 을 최소화하는 $\hat{\theta}_N$ 을 선택함으로써 얻을 수 있다.

이로부터 Hansen 등 (1996)은 다음과 같은 반복정 추정방법을 제안하였다. 먼저 $W_N = I$ 라 하여 구한 추정량 $\hat{\theta}_N$ 을 $\hat{\theta}_N^{(0)}$ 라 하자. 다음으로 $\hat{\theta}_N^{(0)}$ 을 대입하여 \hat{S}_N 을 구하고 $W_N = \hat{S}_N^{-1}$ 라 두고 다시 $\hat{\theta}_N$ 을 추정하여 $\hat{\theta}_N^{(1)}$ 이라 하자. 이와 같은 방법을 $\hat{\theta}_N^{(i)}$ 과 $\hat{\theta}_N^{(i+1)}$ 값이 만족할 만큼 가까워질 때까지 반복적으로 수행한다.

GMM 방법을 적용하는데 있어서 가장 중요한 것은 적률조건을 정의하는 것이다. 확률미분방정식의 모수를 추정하기 위하여 가능한 적률조건은 여러 가지 방법이 있다. Chan 등 (1992)은 확률미분방정식의 오일러-마루야마 근사에 의한 다음과 같은 적률조건 방법을 제시하였다. $X_{t+\Delta}$ 가 정규분포를 따르며 평균이 $X_t + \mu(X_t; \theta)\Delta$ 이고 분산이 $g^2(X_t; \theta)\Delta$ 일 때, 다음과 같은 두 가지 적률조건을 확률미분방정식의 오일러-마루야마 근사에 의해 직접 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi_1(X; \theta) &: E [d(X_{t+\Delta}, X_t)] = 0, \\ \psi_2(X; \theta) &: E [d(X_{t+\Delta}, X_t)^2 - g^2(X_t; \theta)\Delta] = 0, \end{aligned}$$

여기서 $d(X_{t+\Delta}, X_t) = X_{t+\Delta} - X_t - \mu(X_t; \theta)\Delta$ 이다. 이 적률조건을 이용하여 다음과 같은 관계를 가지는 적률조건들을 만들어 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi_{2j+1}(X; \theta) &= \psi_1(X; \theta)X^j, \\ \psi_{2j+2}(X; \theta) &= \psi_2(X; \theta)X^j, \end{aligned}$$

여기서 $j = 1, 2, \dots$ 이다. 예를 들면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \psi_3(X; \theta) &: E [d(X_{t+\Delta}, X_t)X_t] = 0, \\ \psi_4(X; \theta) &: E [(d(X_{t+\Delta}, X_t)^2 - g^2(X_t; \theta)) X_t] = 0. \end{aligned}$$

4. 모의실험 결과의 비교

모의실험 연속시간과정의 표본을 만들어야 한다면 실제 연속시간모형을 따르는 확산과정을 생성해내는 것은 매우 어려운 일이고 최근 이에 대한 연구가 수행되고 있다 (Beskos와 Robert, 2006). 본 연구에서는 극히 작은 시간간격 δ 단위로 오일러근사법에 근거하여 반복적인 방법으로 확산과정에 대한 표본을 생성하였다. 실제 표본에서 고려되는 관측시간의 최소간격 Δ 를 0.05 정도라고 볼 때, 모의실험을 위하여 표본을 생성할 때는 관측값들 사이의 시간간격 δ 를 0.005 이하와 같이 매우 작은 값을 사용하였다.

다음으로 각 모형에서 관측된 자료들의 간격은 0.05를 시작으로 0.1, 0.15, 0.2까지 0.05의 간격을 가지는 4개의 구간으로 가정하였다. 이를 통하여 관측된 자료의 간격 Δ 의 차이에 의한 각 방법론들의 영향을 비교하고자 하였다. 마지막으로 각 경우 관측된 자료의 수는 모두 Shoji와 Ozaki (1998)가 실험한 바와 같이 모든 경우 관측된 자료의 수가 2000이 되도록 가정하였다. 예를 들면, Δ 가 0.05인 경우 총, 0.005 시간 간격으로 생성된 20000개 이상의 자료로부터 변인을 위하여 초기 상당량을 제거하고 매 10개 단위로 관측치를 생성하여 2000개의 관측치를 구성하였다.

이와 같은 방법으로 각 확산모형에 대한 표본을 생성하고 각각의 추정법을 적용하여 추정량을 구하는 방법을 1000회 반복하여 추정량이 갖는 분포를 모의실험으로 구하였다. 이를 통하여 추정량의 표본분포가 실제 표본 생성시에 사용된 실제값과 어떤 차이를 보이게 되는지를 살펴볼 것이다. 각 추정량의 성능 비교를 위하여 RMSE(Root Mean Square Error)를 제시하였다. 결과로 제시된 상자그림에서 E.05 혹은 G.10은 $\Delta = 0.05$ 일 때의 오일러추정법(E), $\Delta = 0.1$ 일 때의 GMM추정법(G) 등과 같이 추정방법의 영문 첫글자와 Δ 값을 결합하여 나타낸 것이다.

4.1. 기하브라운운동에 대한 비교

기하브라운운동 모형은 다음과 같은 전이밀도함수를 갖기 때문에 이를 이용하여 정확한 최대우도 추정량(Exact Maximim Likelihood Estimator; EML)을 구할 수 있다.

$$f(X_{t+\Delta}X_t; \theta) = \frac{1}{\sigma X \sqrt{2\pi\Delta}} \exp \left[-\frac{\{\log(X_{t+\Delta}) - \log(X) - (\mu - \sigma^2/2)\Delta\}^2}{2\sigma^2\Delta} \right].$$

표 4.1과 그림 4.1에 제시된 모의실험 결과를 살펴보면, 기하브라운운동의 참값이 0.1과 0.08로 설정된 두 모수 μ, σ 의 추정에 있어서 오일러근사법과 NLL 추정법은 큰 차이가 존재하지 않으며 오일러근사법이 NLL 추정법에 비해서 모수에 더욱 근접하는 경향을 보인다. 다만 최대우도법을 이용하여 구한 모수의 추정치와는 NLL 추정법이 거의 일치하는 특징을 보여주고 있다. 그러나 GMM 추정법은 Δ 가 증가함에 따라 μ 의 추정오차가 커지고 있음을 알 수 있다. 또한, μ 와 σ 에 대하여 RMSE(Root Mean Square Error)가 오일러근사법과 NLL 추정법에 비하여 크다는 것을 확인 할 수 있다. 즉, 기하브라운운동의 추정에는 오일러근사법과 NLL 추정법이 GMM 추정법에 비하여 좀 더 정확한 추정치를 제공할 수 있다.

4.2. 베시책모형에 대한 비교

베시책 모형의 확률전이밀도함수는 다음과 같다.

$$f(X_{t+\Delta}X_t; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V}} \exp \left[-\frac{(X_{t+\Delta} - \bar{x})^2}{2V} \right],$$

$$V = \frac{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha\Delta})}{2\alpha}, \quad \bar{x} = \beta + (X_\Delta - \beta)e^{-\alpha\Delta}.$$

표 4.1. 기하브라운운동 결과

Δ	추정법	RMSE	
		$\mu = 0.1$	$\sigma = 0.08$
0.05	Euler	0.0001	-0.0001
		0.0083	0.0013
	NLL	-0.0002	-0.0003
		0.0082	0.0013
	GMM	-0.0030	0.0001
0.0180		0.0040	
0.1	Euler	-0.0002	-0.0003
		0.0082	0.0013
	NLL	0.0001	0.0000
		0.0055	0.0013
	GMM	-0.0004	-0.0004
0.0054		0.0014	
0.15	Euler	-0.0197	0.0006
		0.0231	0.0058
	NLL	-0.0004	-0.0004
		0.0054	0.0014
	GMM	-0.0003	0.0000
0.0047		0.0012	
0.2	Euler	-0.0010	-0.0006
		0.0048	0.0014
	NLL	-0.0010	-0.0006
		0.0048	0.0014
	GMM	-0.0010	-0.0004
0.0048		0.0014	
0.2	Euler	0.0000	0.0000
		0.0039	0.0013
	NLL	-0.0010	-0.0008
		0.0040	0.0015
	GMM	-0.0198	0.0014
0.0232		0.0080	
EML	-0.0010	-0.0008	
	0.0040	0.0015	

최대우도법을 이용하여 구한 해와 오일러방법, NLL 방법, GMM 방법 3가지 방법을 통하여 구한 해를 비교해보았을 경우 NLL 추정법이 최대우도법을 이용하여 구한 해와 가장 가까이 일치함을 알 수 있었다.

참값이 각각 0.2, 0.08, 0.03인 모수 α , β , σ 를 베시책 모형에 대한 모의실험 결과는 표 4.2와 그림 4.2에 나와 있다. 표와 그림을 살펴보면 α 에 대해서는 오일러근사법과 GMM 추정법의 결과가 우수하지만 편기는 3가지의 추정법 모두 비슷한 것을 알 수 있다. 그리고 β 의 추정치에 대해서는 3가지의 추정법 모두 큰 차이가 존재하지 않으며 그 편기 또한 비슷하다. 다만 α 의 추정에 있어서 NLL 추정법이 다른 추정법들에 비하여 우수하며 EML 추정법과 가장 비슷하다.

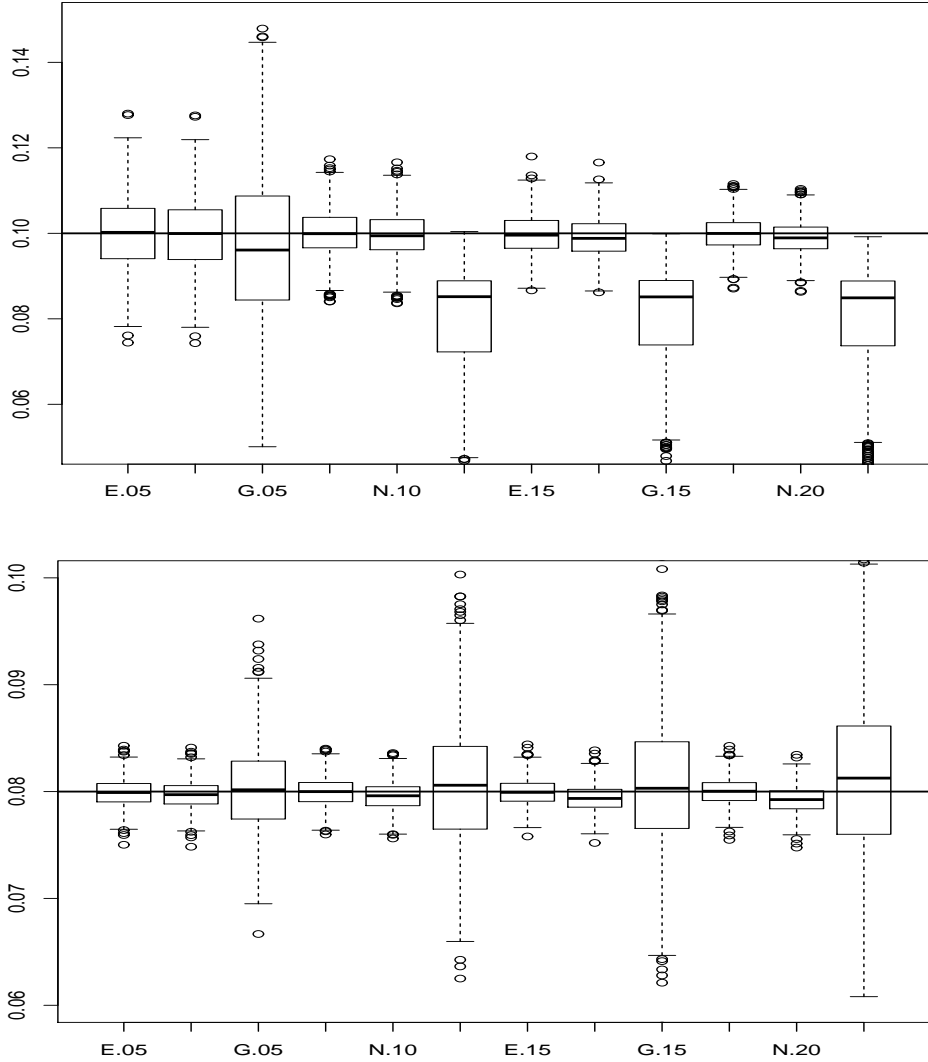


그림 4.1. 기하브라운운동에서의 두 모수 μ (위)와 σ (아래)에 대한 각 추정량의 분포

4.3. CEV 모형에 대한 비교

CEV 모형의 경우도 확산함수가 상수인 형태가 아니기 때문에 이에 대한 조정이 필요하다. 또한, GMM 추정법을 적용하기 위한 적률 조건은 CIR 모형과 같이 Chan 등 (1992)이 제안한 4가지의 적률 조건을 이용하였으며 GMM 추정법에 사용한 적률 조건은 다음과 같다.

$$\psi_1(X; \theta) : E[d(X_{t+\Delta}, X_t)] = 0,$$

표 4.2. 베시책모형의 추정결과

Δ	추정법	RMSE	RMSE	RMSE
		$\alpha = 0.2$	$\beta = 0.08$	$\sigma = 0.03$
0.05	Euler	0.0382	-0.0005	-0.0001
		0.0845	0.0151	0.0005
	NLL	0.0392	-0.0005	0.0000
		0.0857	0.0151	0.0005
	GMM	0.0399	-0.0005	-0.0010
		0.0852	0.0151	0.0074
	EML	0.0392	-0.0005	0.0000
		0.0857	0.0151	0.0005
0.1	Euler	0.0173	-0.0005	-0.0003
		0.0505	0.0107	0.0006
	NLL	0.0195	-0.0005	0.0000
		0.0522	0.0107	0.0005
	GMM	0.0175	-0.0005	-0.0004
		0.0506	0.0108	0.0027
	EML	0.0195	-0.0005	0.0000
		0.0522	0.0107	0.0005
0.15	Euler	0.0114	0.0000	-0.0004
		0.0414	0.0088	0.0006
	NLL	0.0149	0.0000	0.0000
		0.0439	0.0088	0.0005
	GMM	0.0116	0.0001	-0.0007
		0.0414	0.0088	0.0038
	EML	0.0195	-0.0005	0.0000
		0.0522	0.0107	0.0005
0.2	Euler	0.0047	0.0003	-0.0006
		0.0310	0.0076	0.0008
	NLL	0.0091	0.0003	0.0000
		0.0332	0.0076	0.0005
	GMM	0.0048	0.0003	-0.0006
		0.0312	0.0076	0.0008
	EML	0.0091	0.0003	0.0000
		0.0332	0.0076	0.0005

$$\psi_2(X; \theta) : E [d(X_{t+\Delta}, X_t)^2 - g^2(X_t; \theta)] = 0,$$

$$\psi_3(X; \theta) : E [d(X_{t+\Delta}, X_t) X_t] = 0,$$

$$\psi_4(X; \theta) : E [(d(X_{t+\Delta}, X_t)^2 - g^2(X_t; \theta)) X_t] = 0.$$

이상의 조건을 가지고 CEV 모형에 대한 모의실험을 하였으며 결과는 표 4.3이다. 모의실험을 위하여 사용된 모수의 참값은 $\alpha, \beta, \sigma, \gamma$ 각각에 대하여 0.2, 0.08, 0.1, 0.5였다.

CEV 모형에 대한 추정 결과를 살펴보면 α 에 대해서는 오일러근사법이 가장 정확한 추정을 하고 있으며, β 에 관해서는 3가지 방법의 차이가 크지 않다. 또한 σ 와 γ 에 대한 추정 결과는 NLL 추정법이 가장 우수하다는 것을 볼 수 있다. GMM 추정법을 통한 확산함수의 σ 와 γ 에 대한 추정은 오일러근사법이나 NLL 추정법에 비해서 상당히 그 성능이 떨어지고 있다는 것을 알 수 있다. CEV 모형을 비교할 때 차

표 4.3. CEV 모형의 추정결과

Δ	추정법	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
		$\alpha = 0.2$	$\beta = 0.08$	$\sigma = 0.1$	$\gamma = 0.5$
0.05	Euler	0.0422	0.0002	0.0005	0.0028
		0.0879	0.0144	0.0080	0.0292
	NLL	0.0449	0.0003	0.0000	-0.0013
		0.0904	0.0143	0.0079	0.0289
	GMM	0.0540	0.0002	-0.0293	-0.1536
		0.1016	0.0143	0.0351	0.1980
0.1	Euler	0.0183	0.0002	0.0010	0.0064
		0.0564	0.0105	0.0077	0.0282
	NLL	0.0221	0.0003	0.0002	-0.0008
		0.0589	0.0105	0.0075	0.0271
	GMM	0.0267	0.0003	-0.0273	-0.1341
		0.0669	0.0105	0.0305	0.1564
0.15	Euler	0.0091	-0.0001	0.0017	0.0113
		0.0396	0.0083	0.0081	0.0301
	NLL	0.0148	0.0001	0.0005	0.0003
		0.0426	0.0083	0.0077	0.0275
	GMM	0.0168	0.0001	-0.0264	-0.1270
		0.0477	0.0083	0.0294	0.1528
0.2	Euler	0.0172	-0.0009	0.0013	0.0104
		0.0558	0.0097	0.0075	0.0287
	NLL	0.0230	-0.0007	0.0000	-0.0010
		0.0585	0.0097	0.0071	0.0257
	GMM	0.0265	-0.0007	-0.0269	-0.1300
		0.0645	0.0097	0.0311	0.1586

이가 존재하는 부분은 확산 함수이다. CEV 모형에서는 모수 γ 에 대한 추정이 필요하다. γ 가 갖는 추정오차는 σ 의 추정에도 영향을 미치게 된다. GMM 방법을 통한 σ 와 γ 추정에는 상당한 오차가 발생하게 됨을 표 4.3과 그림 4.2를 통해서 살펴볼 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 확산모형에 대한 여러 가지 추정방법 중에서, 그 사용이 간편하여 연구자들에 의하여 자주 사용되는 오일러근사법을 이용한 추정법, NLL 추정법, GMM 추정법을 중심으로 그 성능을 비교하였다. 추정 비교 대상이 된 모형은 기하브라운운동모형, 베시책모형, CEV 모형 등으로 확산모형에 관한 연구에서 매우 자주 등장하는 모형들을 그 대상으로 하였다.

모의실험을 통한 비교 결과 NLL와 오일러 추정법은 매우 좋은 성질을 보이는데 비하여, GMM에 의하여 얻는 추정량들의 성질은 Root MSE 값이 매우 큰 특징을 보였다. 특히 기하브라운운동모형이나 CEV 모형 등과 같이 확산함수에 추정모수가 개입되어 있는 경우 GMM의 성질이 급격히 나빠지는 특징을 확인할 수 있었다. 확산모형의 추정에 GMM 방법을 사용하기 위해서는 신중한 고려가 필요해 보인다. 모의실험에서 기하브라운운동모형이나 베시책모형과 같이 그 전이확률밀도함수가 알려져 있어서 정확한 최대우도추정 방법이 적용 가능한 경우에 있어서 NLL은 최대우도추정량과 매우 유사한 성능을 보임을 확인할 수 있었다.

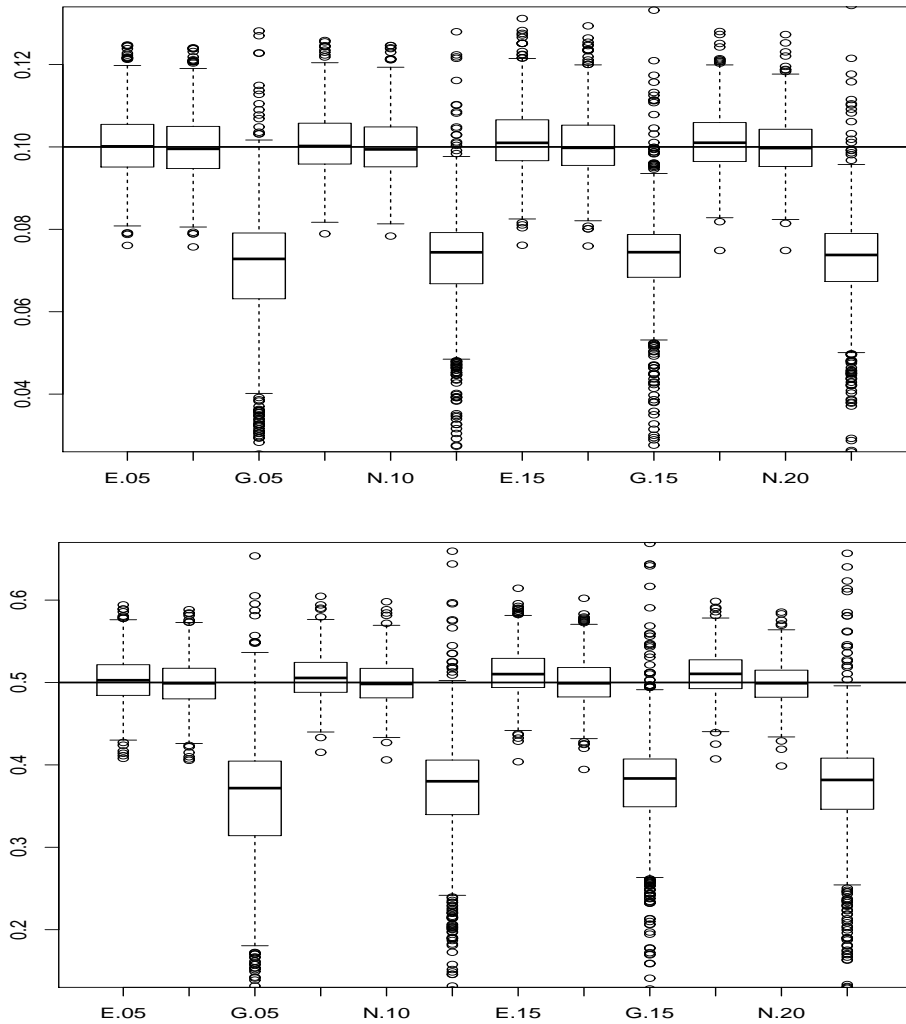


그림 4.2. CEV 모형에서 모수 σ (위)와 μ (아래)에 대한 각 추정량의 분포

참고문헌

- Bachelier, L. (1900). Theorie de la speculation, *Annales Scientifiques de L'E.N.S.*, **17**, 21–86.
- Beskos, A. and Robert, G. O. (2006). Exact simulation of diffusions, *Annals of Applied Probability*, **15**, 2422–2444.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, 637–654.
- Chan, K. C., Karolyi, G. A., Longstaff, F. A. and Sanders, A. B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance*, **47**, 1209–1227.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. and Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**, 385–407.

- Elerian, O., Chib, S. and Shephard, N. (2001). Likelihood inference for discretely observed nonlinear diffusions, *Econometrica*, **69**, 959–993.
- Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of generalized method of moments estimators, *Econometrica*, **50**, 1029–1054.
- Hansen, L. P., Heaton, J. and Yaron, A. (1996). Finite-sample properties of some alternative GMM estimators, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**, 470–481.
- Hurn, A., Jeisman, J. and Lindsay, K. (2007). Seeing the wood for the trees: A critical evaluation of methods to estimation methods to estimate the parameters of stochastic differential equations, *Journal of Financial Econometrics*, **5**, 390–455.
- Karatzas, I. and Shreve, S. E. (1998). *Methods of Mathematical Finance*, Springer, 199–259.
- Pearson, K. (1894). Contribution to the mathematical theory of evolution, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, **185**, 71–110.
- Samuelson, P. A. (1965). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly, *Industrial Management Review*, **6**, 41–50.
- Shoji, I. and Ozaki, T. (1998). Estimation for nonlinear stochastic differential equations by a local linearization method, *Stochastic Analysis and Applications*, **16**, 733–752.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, **5**, 177–188.

Comparison Study on the Performances of NLL and GMM for Estimating Diffusion Processes

Dae-Gyun Kim¹ · Yoon Dong Lee²

¹Moorim Capital, ²Sogang Business School

(Received August 2011; accepted November 2011)

Abstract

Since the research of Black and Scholes (1973), modeling methods using diffusion processes have performed principal roles in financial engineering. In modern financial theories, various types of diffusion processes were suggested and applied in real situations. An estimation of the model parameters is an indispensable step to analyze financial data using diffusion process models. Many estimation methods were suggested and their properties were investigated. This paper reviews the statistical properties of the, Euler approximation method, New Local Linearization(NLL) method, and Generalized Methods of Moment(GMM) that are known as the most practical methods. From the simulation study, we found the NLL and Euler methods performed better than GMM. GMM is frequently used to estimate the parameters because of its simplicity; however this paper shows the performance of GMM is poorer than the Euler approximation method or the NLL method that are even simpler than GMM. This paper shows the performance of the GMM is extremely poor especially when the parameters in diffusion coefficient are to be estimated.

Keywords: Diffusion process, NLL, GMM, Vasicek model, GBM.

This research was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea(NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology(NRF-2010-327-B00267).

²Corresponding author: Associate professor, Sogang Business School, Shinsoo-dong 1st, Mapo-koo, Seoul 121-742, Korea. Email: widylee@sogang.ac.kr