

# 에지 고장이 있는 Restricted Hypercube-Like 그래프의 해밀톤 경로

김 숙 연<sup>†</sup> · 전 병 태<sup>\*\*</sup>

## 요 약

Restricted Hypercube-Like(RHL) 그래프는 교차큐브, 뫼비우스큐브, 엠큐브, 꼬인큐브, 지역꼬인큐브, 다중꼬인큐브, 일반꼬인큐브와 같이 유용한 상호연결망들을 광범위하게 포함하는 그래프군이다. 본 논문에서는  $m \geq 4$  인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에 대해서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G)$ ,  $|F| \leq m-2$ , 가 고장일 때, 고장 에지들을 제거한 그래프  $G \setminus F$ 는 임의의 서로 다른 두 정점  $s$ 와  $t$ 에 대해서  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$  이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 이면 해밀톤 경로가 있음을 보인다.  $V(F)$ 는  $F$ 에 속하는 에지들의 양 끝점들의 집합이고  $\text{dist}(v, V(F))$ 는 정점  $v$ 와 집합  $V(F)$ 의 정점들 간의 최소 거리이다.

키워드 : Restricted Hypercube-Like 그래프, 교차큐브, 뫼비우스큐브, 엠큐브, 꼬인큐브, 지역꼬인큐브, 다중꼬인큐브, 일반꼬인큐브, 고장감내, 해밀톤 경로, 해밀톤 연결된 그래프

## Hamiltonian Paths in Restricted Hypercube-Like Graphs with Edge Faults

SOOK-YEON KIM<sup>†</sup> · BYUNG TAE CHUN<sup>\*\*</sup>

### ABSTRACT

Restricted Hypercube-Like (RHL) graphs are a graph class that widely includes useful interconnection networks such as crossed cube, Möbius cube, Mcube, twisted cube, locally twisted cube, multiply twisted cube, and generalized twisted cube. In this paper, we show that for an  $m$ -dimensional RHL graph  $G$ ,  $m \geq 4$ , with an arbitrary faulty edge set  $F \subset E(G)$ ,  $|F| \leq m-2$ , graph  $G \setminus F$  has a hamiltonian path between any distinct two nodes  $s$  and  $t$  if  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$  or  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ . Graph  $G \setminus F$  is the graph  $G$  whose faulty edges are removed. Set  $V(F)$  is the end vertex set of the edges in  $F$  and  $\text{dist}(v, V(F))$  is the minimum distance between vertex  $v$  and the vertices in  $V(F)$ .

Keywords : Restricted Hypercube-Like Graph, Crossed Cube, Möbius Cube, Mcube, Twisted Cube, Locally Twisted Cube, Multiply Twisted Cube, Generalized Twisted Cube, Fault Tolerance, Hamiltonian Path, Hamiltonian Connected Graph.

### 1. 서 론

대규모 병렬컴퓨터를 설계하는데 있어서 매우 기초적이고도 중요한 과정 중 하나는 상호연결망 (interconnection network) 을 결정하는 것이다. 왜냐하면 상호연결망의 선택은 시스템의 성능에 치명적인 영향을 주기 때문이다. 따라서 지난 몇십년간 다양한 상호연결망들이 특정 혹은 범용의 목적으로 제안되어 왔다. Restricted Hypercube-Like (RHL)

그래프[1]는 하이퍼큐브-유사 (hypercube-like) 그래프[2]의 일종으로서 범용의 목적으로 유용하다고 알려진 상호연결망들을 광범위하게 포함하는 그래프군이다. RHL 그래프는 교차큐브 (crossed cube) [3], 뫼비우스큐브 (möbius cube) [4], 엠큐브 (Mcube) [5], 꼬인큐브 (twisted cube) [6], 지역꼬인큐브 (locally twisted cube) [7], 다중꼬인큐브 (multiply twisted cube) [8], 일반꼬인큐브 (generalized twisted cube) [9], 홀수차원 재귀원형군 [10] 등을 포함한다.

고장이 있는 상호연결망에서 사이클이나 경로를 찾는 문제는 병렬 처리 분야에서 전통적으로 중요한 이슈 중 하나였다[11, 12, 13].  $m \geq 3$  인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에 대해서 임의의 집합  $F \subset (V(G) \cup E(G))$ ,  $|F| \leq m-2$ , 가 고장일 때, 고장 정점들과 고장 에지들을 제거한 그래프  $G \setminus F$ 가 길이

※ 본 연구는 2010년도 한경대학교 교비 과건 연구비의 지원에 의한 것임.  
† 중신회원 : 한경대학교 컴퓨터공학과 부교수  
\*\* 정 회 원 : 한경대학교 웹정보공학과 부교수(교신저자)  
논문접수 : 2011년 6월 3일  
수 정 일 : 1차 2011년 9월 12일  
심사완료 : 2011년 9월 13일

4부터  $|V(G \setminus F)|$ 까지의 사이클을 모두 가짐이 알려져 있다[14]. 또한  $m \geq 3$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에 대해서 임의의 집합  $F \subset (V(G) \cup E(G))$ ,  $|F| \leq m-3$ , 가 고장일 때, 그래프  $G \setminus F$ 가 임의의 서로 다른 두 정점 간에 길이  $2m-3$ 부터  $|V(G \setminus F)|-1$ 까지의 경로를 모두 가짐도 알려져 있다[14].

사이클이나 경로를 찾는 문제들 중 모든 정점을 포함하는 해밀톤 사이클이나 해밀톤 경로를 찾는 문제는 특히나 중요하다. 왜냐하면 해밀톤 사이클이나 경로는 병렬 컴퓨터에서 원형큐이나 배열 기반의 응용을 할당함에 있어 프로세서 이용도를 최대화한다든지 통신 네트워크에서 링이나 선형 구조의 통신작업을 효과적으로 수행하는데 필수적이기 때문이다. 그래프  $G$ 와 어떤  $f \geq 0$ 에 대하여 임의의 집합  $F \subset (V(G) \cup E(G))$ ,  $|F| \leq f$  가 고장일 때, 그래프  $G \setminus F$ 가 해밀톤 사이클을 가지면 그래프  $G$ 를  $f$ -고장 해밀톤 그래프 ( $f$ -fault hamiltonian graph)라고 한다. 따라서  $m \geq 3$ 인 모든  $m$ -차원 RHL 그래프는  $(m-2)$ -고장 해밀톤 그래프이다. 여기서  $m-2$ 는 최적값임도 알려져 있다[1]. 왜냐하면  $|F| \geq m-1$ 인 임의의 고장집합  $F \subset (V(G) \cup E(G))$ 에 대해서 그래프  $G \setminus F$ 에 해밀톤 경로가 없는 경우가 존재하기 때문이다. 따라서  $(m-1)$ 개 이상의 고장이 있을 때 특정 조건하에서라도 해밀톤 사이클을 찾는 문제에 대해서 최근에 다음과 같은 연구 결과들이 발표되었다.  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프에 대하여 임의의 에지 집합  $F \subset E(G)$ ,  $|F| \leq 2m-5$ , 가 고장일 때, 그래프  $G \setminus F$ 의 분지수(degree)가 2이상이라면 해밀톤 사이클은 물론이고 pancyclicity 성질을 가진다[15]. 또한  $m \geq 7$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프에 대하여 임의의 집합  $F \subset (V(G) \cup E(G))$ ,  $|F| \leq 2m-9$ , 가 고장일 때, 그래프  $G \setminus F$ 의 분지수가 2이상이라면 해밀톤 사이클을 가진다[11].

임의의 서로 다른 두 정점을 연결하는 해밀톤 경로를 가진 그래프를 해밀톤 연결된 (hamiltonian-connected) 그래프라고 한다. 어떤 그래프  $G$ 와 어떤  $f \geq 0$ 에 대하여 임의의 집합  $F \subset (V(G) \cup E(G))$ ,  $|F| \leq f$  가 고장일 때, 그래프  $G \setminus F$ 가 해밀톤 연결된 그래프이면 그래프  $G$ 를  $f$ -고장 해밀톤 연결된 ( $f$ -fault hamiltonian connected) 그래프라고 한다. 따라서  $m \geq 3$ 인 모든  $m$ -차원 RHL 그래프는  $(m-3)$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이다. 여기서 고장 집합의 크기의 상한  $m-3$ 은 최적값이므로 더 증가시킬 수가 없다[1]. 왜냐하면  $|F| \geq m-2$ 인 임의의 고장집합  $F \subset (V(G) \cup E(G))$ 에 대해서 그래프  $G \setminus F$ 에 해밀톤 경로가 없는 정점쌍이 존재하기 때문이다. 고장집합의 크기  $|F|$ 를  $m-2$ 로 고정하고 고장을 에지로만 국한하더라도  $G \setminus F$ 에 해밀톤 경로가 없는 정점쌍은 여전히 존재한다. 따라서 고장집합의 상한을 증가시키는 대신 특정조건을 만족하는 정점쌍에 대해서라도 해밀톤 경로를 찾는 문제는 큰 관심의 주제로 남아 있다. 본 논문은 이 주제를 다루되,  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에서 고장 집합의 크기  $|F|$ 의 상한을  $m-2$ 로 증가시키는 대신 고장을 에지로만 국한하고 일부 정점쌍만을 제외한 거의 모든 정점쌍들에 대해서 해밀톤 경로를 찾는 문제를 해결한다.

본 논문에서는  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에서 임의

의 에지 집합  $F \subset E(G)$ ,  $|F| \leq m-2$ , 가 고장일 때 그래프  $G \setminus F$ 의 임의의 서로 다른 두 정점  $s$ 와  $t$ 에 대해서  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 이면 해밀톤 경로가 있음을 보인다. 여기서  $V(F)$ 는 고장 에지들의 양끝점들의 집합이고  $\text{dist}(v, V(F))$ 는 정점  $v$ 와  $V(F)$ 의 정점들간의 거리이다. 2절에서는 정의와 기호를 기술하고 3절에서는 주요 정리를 제시한 후 증명한다. 4절에서는 결론을 맺는다.

## 2. 정의와 기호

이 절에서는 정의와 기호를 기술한다. 또한 RHL 그래프의 성질들을 소정리로서 제시한다. 본 논문에서는 특별한 언급 없이 고장이라고 하면 고장 에지를 의미하고 고장 집합이라고 하면 고장 에지의 집합을 의미한다. 또한 고장이 아닌 정점이나 에지를 정상이라고 하겠다. 그래프  $G$ 에서 어떤 에지 집합  $F \subset E(G)$ 에 대하여  $V(F)$ 는 집합  $F$ 에 속하는 에지들의 양끝 정점들의 집합을 말한다. 그래프  $G$ 에서 정점  $u$ 와 정점  $v$ 간의 거리를  $\text{dist}(u, v, G)$ 라고 하고 정점  $s$ 와 집합  $W \subset V(G)$ 간의 거리  $\text{dist}(s, W, G)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\text{dist}(s, W, G) = \text{minimum}_{v \in W} \{d(s, v, G)\}$$

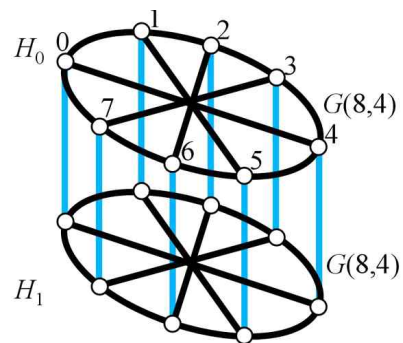
$\text{dist}(u, v, G)$ 와  $\text{dist}(s, W, G)$ 를 각각  $\text{dist}(u, v)$ 와  $\text{dist}(s, W)$ 로 간단히 쓰기도 한다.

이제 RHL 그래프를 정의하기 위해서 재귀원형군  $G(8,4)$ 와 그래프 연산  $\oplus$ 를 설명한다.  $G(8,4)$ 는 8개의 정점과 크기 1과 4인 점프들을 가지는 재귀원형군 (recursive circulant)이다[10].  $G(8,4)$ 의 정점집합  $V(G(8,4))$ 와 에지 집합은  $E(G(8,4))$ 는 다음과 같다.

$$V(G(8,4)) = \{i \mid 0 \leq i < 8\}$$

$$E(G(8,4)) = \{(i, j) \mid i+1 \equiv j \pmod{4} \text{ 또는 } i+4 \equiv j \pmod{4}\}$$

재귀원형군  $G(8,4)$ 는 8-정점 꼬인큐브[6]나 8-정점 피비우스 사다리(Möbius ladder)[16]와 동형(isomorphism)이다. (그림 1)에 두 개의  $G(8,4)$ 가 에지들로 연결된 그래프가 나타나 있다.



(그림 1)  $\alpha(8,4) \oplus \alpha(8,4)$

그래프 연산  $\oplus$ 는 다음과 같이 정의된다. 정점의 수가 각각  $m$ 인 두 그래프  $H_0$ 와  $H_1$ 이 있다고 하자. 그래프  $H_i$ 의 정점 집합을  $V(H_i)$ , 에지 집합을  $E(H_i)$ 라고 하자. 또한  $V(H_0)=\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ 이라고 하고,  $V(H_1)=\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ 이라고 하자. 집합  $\{1, 2, \dots, m\}$ 의 임의의 순열(permutation)  $M=(p(1), p(2), \dots, p(m))$ 에 대하여,  $H_0$ 와  $H_1$ 을 다음과 같이 연결해서 얻어지는 그래프를  $H_0 \oplus H_1$ 이라고 하고,  $H_0$ 와  $H_1$  각각을  $H_0 \oplus H_1$ 의 요소 (component)라고 부른다.

$$\begin{aligned} V(H_0 \oplus H_1) &= V(H_0) \cup V(H_1) \\ E(H_0 \oplus H_1) &= E(H_0) \cup E(H_1) \cup E' \\ E' &= \{(v_i, w_{p(i)}) \mid 1 \leq i \leq m\} \end{aligned}$$

(그림 1)에 연산  $\oplus$ 을 통해 얻어진 그래프  $G(8,4) \oplus G(8,4)$ 가 그려져 있다. RHL 그래프는 다음과 같이 정의된다. 다음 정의 1에서  $K_2$ 는 2-정점 완전그래프이며  $C_4$ 는 4-정점 사이클이다.

**정의 1.** 어떤 그래프가 RHL $_m$ 에 속하면  $m$ -차원 RHL 그래프라고 부른다.

$$\begin{aligned} RHL_1 &= \{K_2\}, \\ RHL_2 &= \{C_4\}, \\ RHL_3 &= \{G(8,4)\}, \\ RHL_m &= \{H_0 \oplus H_1 \mid H_0, H_1 \in RHL_{m-1}\}, m \geq 4 \end{aligned}$$

RHL 그래프는 분지수가  $m$ 인 정규 (regular) 그래프이다. 따라서  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에서 어떤 고장 에지의 양 끝점과 거리가 1인 정점수는  $2(m-1)$ 개 이다. 따라서 고장 집합  $F$ 에 대해서  $\text{dist}(s, V(F))=1$ 인 정점수는  $2(m-1) |V(F)|$  개 이하이다. RHL 그래프의 고장 해밀톤 성질은 다음의 두 소정리와 같이 알려져 있다.

**소정리 1.**  $m \geq 3$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프는  $(m-3)$ -고장 해밀톤 연결된 그래프이다.

**소정리 2.**  $m \geq 3$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프는  $(m-2)$ -고장 해밀톤 그래프이다.

서로소인 경로 커버(disjoint path cover)는 그래프의 모든 정점을 지나되 정점의 중복이 없는 경로들의 집합이다. RHL 그래프의 서로소인 경로커버에 대한 연구결과 중 다음의 소정리가 본 논문에서 사용된다.

**소정리 3**[17].  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프는 서로 다른 네 개의 정점  $u, v, x, y$ 에 대해서 정점쌍  $[u, v]$ 와 정점쌍  $[x, y]$ 를 각각 연결하는 두 개의 경로로 구성되는 서로소인 경로 커버를 가진다.

### 3. 에지 고장을 가지는 RHL 그래프의 해밀톤 경로

이 절에서는 본 논문의 주요 정리를 제시하고 증명한다. 본 논문의 주요 정리는 다음과 같다.

**정리 1.**  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G)$ ,  $|F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$  간에 해밀톤 경로가 존재한다.

정리 1은 수학적 귀납법으로 증명한다. 기저(basis)에 해당하는  $m=4$ 인 경우에 대해서는 소정리 4를 제시한다. 소정리 4는 모든 4-차원 RHL 그래프에 대해서 임의의 두 개의 에지가 고장일 때 모든 정점쌍 간의 해밀톤 경로를 일일이 검색하는 컴퓨터 프로그램으로부터 얻었다.

**소정리 4.** 4-차원 RHL 그래프  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G)$ ,  $|F| \leq 2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$  간에 해밀톤 경로가 존재한다.

수학적 귀납법을 위한 유도 가정 (induction hypothesis)은  $m \geq 5$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G(H_0 \oplus H_1)$ 에 대해서  $H_i$ ,  $i=0, 1$ , 는 에지 집합  $F_i \subset E(H_i)$ ,  $|F_i| \leq m-3$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s_i, V(F_i), H_i) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t_i, V(F_i), H_i) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s_i, t_i]$  간에 해밀톤 경로가 존재한다는 것이다.

이제부터  $m \geq 5$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에 대해서 정리 1을 증명하겠다. 이 증명을 위해 몇 가지 기호와 가정들을 제시한다. 가상의 고장 집합  $F$ 에 대해서  $G \setminus (F \cup F)$ 에 존재하는 해밀톤 경로는  $G \setminus F$ 에 존재하는 해밀톤 경로이기도 하다. 따라서  $m-2-|F|$ 개의 정상 에지를 가상의 고장으로 봄으로써

$$f = |F| = m-2$$

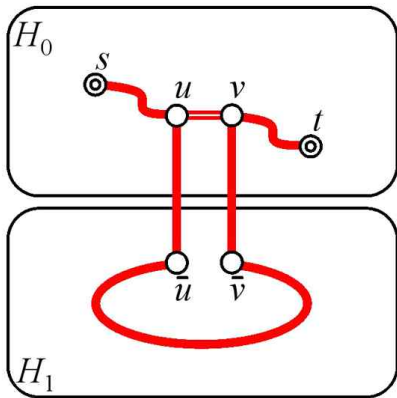
라고 간주한다.  $F_0$ 와  $F_1$ 은 각각  $H_0$ 와  $H_1$ 에 속하는 고장 집합을 의미하고  $F_2$ 는  $H_0$ 와  $H_1$ 간에 존재하는 고장 집합을 의미한다. 따라서  $F = F_0 \cup F_1 \cup F_2$ 이다. 또한  $f_0 = |F_0|$ ,  $f_1 = |F_1|$ ,  $f_2 = |F_2|$ 이라고 하자. 그러면  $f = f_0 + f_1 + f_2$ 이다. 일반성을 잃지 않고

$$f_0 \geq f_1$$

이라 하자.  $s$ 와  $t$ 가 같은 요소에 속할 경우엔 일반성을 잃지 않고  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이라 가정한다.  $s$ 와  $t$ 가 다른 요소에 속할 경우엔 일반성을 잃지 않고  $s \in V(H_0)$ 이고  $t \in V(H_1)$ 이라고 가정한다. 어떤 요소  $H_i$ ,  $i=0, 1$ , 에 속하는 정점  $v$ 에 대해서 정점  $\bar{v}$ 는  $v$ 에 인접하면서 다른 요소  $H_{(i+1) \bmod 2}$ 에 속하는 정점을 말한다.  $m \geq 5$ 인 RHL 그래프에 대해서 정리 1은 여섯 가지 경우로 나누어서 증명한다.

**경우 A:**  $f_0 < f_1$ ,  $s \in V(H_0)$ ,  $t \in V(H_0)$ .

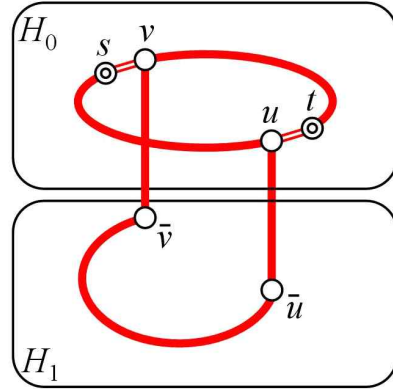
이 경우엔  $f \leq f-2$ 이거나  $\text{dist}(s, V(F_0), H_0) \neq 1$ 인 경우와 나머지 경우로 나누어서 증명한다.  $f \leq f-2$ 이거나  $\text{dist}(s, V(F_0), H_0) \neq 1$ 인 경우엔 (그림 2)와 같이  $H_0 \setminus F_0$ 에서  $s$ 와  $t$  간의 해밀톤 경로를 구한다.  $f \leq f-2$ 일 경우엔  $(m-1)$ -차원 RHL 그래프와 동형인  $H_0$ 에  $f-2(=m-4)$ 개 이하의 고장이 존재하므로 소정리 1에 의해서 해밀톤 경로가 존재한다.  $\text{dist}(s, V(F_0), H_0) \neq 1$ 인 경우엔  $H_0$ 에  $f-1(=m-3)$ 개 이하의 고장이 존재하므로 유도 가정에 의해서 해밀톤 경로가 존재한다.  $H_0 \setminus F_0$ 의 해밀톤 경로 위의 에지  $(u, v)$ 를 고르되  $(u, \bar{u})$ 와  $(v, \bar{v})$ 가 정상이도록 고른다. 이러한 에지  $(u, v)$ 는 반드시 존재함을 보이겠다. 해밀톤 경로 위의 에지수는 해밀톤 경로의 길이와 같으므로  $2^{m-1}-1$ 개이다.  $F_2$ 에 속하는 각 고장이 두 개 이하의 에지를  $(u, v)$ 로 선택될 수 없게 만들기 때문에 고장으로 인하여 선택될 수 없는 에지수는  $2(m-2)$ 개 이하이다. 따라서 에지  $(u, v)$ 로 선택될 수 있는 후보수는 적어도  $(2^{m-1}-1)-2(m-2) \geq 9$ 이다. 에지  $(u, v)$ 를 골랐으면  $H_1 \setminus F_1$ 에서  $\bar{u}$ 와  $\bar{v}$ 간의 해밀톤 경로를 구한다.  $(m-1)$ -차원 RHL 그래프와 동형인  $H_1$ 에는  $f_1(\leq \lfloor \frac{f}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor \leq m-4$  개의 고장이 존재하므로 소정리 1에 의해서 해밀톤 경로가 존재한다.  $H_0$ 의 해밀톤 경로와  $H_1$ 의 해밀톤 경로를 합치되 에지  $(u, \bar{u})$ 와  $(v, \bar{v})$ 를 포함하고 에지  $(u, v)$ 를 제외한다.



(그림 2) 경우 A:  $f_0 < f, s \in V(H_0), t \in V(H_0), (f_0 \leq f-2$  이거나  $\text{dist}(s, V(F_0), H_0) \neq 1)$ ,  
 경우 D:  $f_0 = f, s \in V(H_0), t \in V(H_0)$

$f=f-1$ 이고  $\text{dist}(s, V(F_0), H_0)=1$ 인 경우엔 (그림 3)과 같이  $H_0 \setminus F_0$ 에서 해밀톤 사이클을 구한다.  $(m-1)$ -차원 RHL 그래프와 동형인  $H_0$ 에는  $f(=f-1=m-3)$ 개의 고장이 존재하므로 소정리 2에 의해서 해밀톤 사이클이 존재한다. 이 해밀톤 사이클은  $(u, \bar{u})$ 와  $(v, \bar{v})$ 가 정상인 정점  $u$ 와  $v$ 에 대해서  $(s, P, u, t, P', v)$ 로 표현할 수 있다. 왜냐하면  $|F_2| \leq 1$ 이기 때문이다. 여기서  $P$ 와  $P'$ 은 해밀톤 사이클의 일부를 구성하는 경로이다.  $H_1$ 에서  $\bar{u}$ 와  $\bar{v}$ 간의 해밀톤 경로를 구한다.  $(m-1)$ -차원 RHL 그래프와 동형인  $H_1$ 에는

$f_1(\leq \lfloor \frac{f}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor \leq m-4$ 개의 고장이 있으므로 소정리 1에 의해서 해밀톤 경로가 존재한다.  $H_0$ 의 해밀톤 사이클과  $H_1$ 의 해밀톤 경로를 합치되 에지  $(u, \bar{u})$ 와  $(v, \bar{v})$ 를 포함하고 에지  $(u, t)$ 와  $(v, s)$ 를 제외한다.

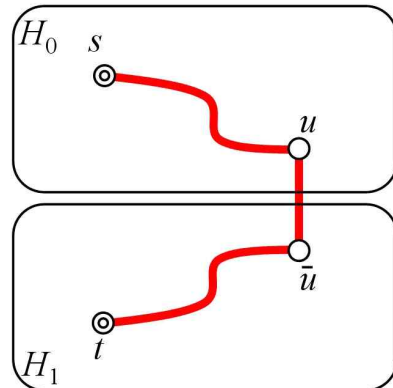


(그림 3) 경우 A:  $f_0 < f, s \in V(H_0), t \in V(H_0), (f_0 = f-1$  이고  $\text{dist}(s, V(F_0), H_0) = 1)$

경우 B:  $f_0 < f, s \in V(H_0), t \in V(H_1)$ .

$H_0$ 에서 정점  $u(\neq s)$ 를 고르되 에지  $(u, \bar{u})$ 가 정상이고  $\bar{u} \neq t$  이고  $\text{dist}(u, V(F_0), H_0) \neq 1$ 이도록 고른다. 이러한 정점  $u$ 는 반드시 존재함을 보이겠다.  $s$ 를 제외한  $H_0$ 의 정점수는  $2^{m-1}-1$ 이고,  $H_0$ 와  $H_1$ 간의 고장으로 인하여  $u$ 로 선택될 수 없는 정점수는  $f$ 이고,  $t$ 로 인하여  $u$ 로 선택될 수 없는 정점수는 1개이고,  $V(F_0)$ 와 거리가 1이므로  $u$ 로 선택될 수 없는 정점수는  $2(m-2)f$ 이하이다. 따라서  $u$ 로 선택될 수 있는 후보수는 적어도  $(2^{m-1}-1)-f-1-2(m-2)f \geq 2^{m-1}-2-2(m-2)(m-3) \geq 2$ 이다.

정점  $u$ 를 선택했으면 (그림 4)와 같이  $H_0 \setminus F_0$ 에서  $s$ 와  $u$ 간의 해밀톤 경로를 구한다.  $H_0$ 에  $f-1(=m-3)$ 개 이하의 고장이 존재하고  $\text{dist}(u, V(F_0), H_0) \neq 1$ 이므로 유도 가정에 의

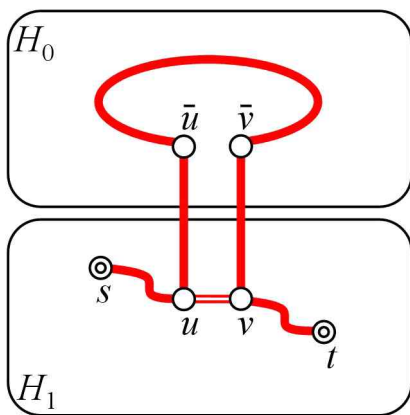


(그림 4) 경우 B:  $f_0 < f, s \in V(H_0), t \in V(H_1)$

해서 해밀톤 경로가 존재한다.  $H_1 \setminus F_1$ 에서  $\bar{u}$ 와  $t$ 간의 해밀톤 경로를 구한다.  $H_1$ 에는  $f(\leq m-4)$ 개의 고장이 존재하므로 소정리 1에 의해서 해밀톤 경로가 존재한다.  $H_0$ 의 해밀톤 경로와  $H_1$ 의 해밀톤 경로를 합치되 에지  $(u, \bar{u})$ 를 포함한다.

**경우 C:**  $f < f, s \in V(H_1), t \in V(H_1)$ .

(그림 5)와 같이  $H_1 \setminus F_1$ 에서  $s$ 와  $t$ 간의 해밀톤 경로를 구한다.  $H_1$ 에는  $f$ 개의 고장이 존재하므로 소정리 1에 의해서 해밀톤 경로가 존재한다. 해밀톤 경로상의 에지  $(u, v)$ 를 고르되  $f < m-3$ 일 경우엔  $(u, \bar{u})$ 와  $(v, \bar{v})$ 가 정상이도록 고르고  $f = m-3$ 일 경우엔  $(u, \bar{u})$ 와  $(v, \bar{v})$ 가 정상일 뿐 아니라  $\text{dist}(\bar{u}, V(F_0), H_0) \neq 1$ 이도록 고른다. 이러한 에지  $(u, v)$ 는 반드시 존재함을 보이겠다. 첫째,  $f < m-3$ 인 경우를 먼저 보이겠다. 해밀톤 경로상의 에지수는  $2^{m-1}-1$ 개이고  $F_2$ 에 속하는 각 고장이 두 개 이하의 에지를  $(u, v)$ 로 선택될 수 없게 만든다. 따라서  $(u, v)$ 로 선택될 수 있는 후보의 개수는 적어도  $(2^{m-1}-1)-2f \geq (2^{m-1}-1)-2(m-2) \geq 9$ 이다. 둘째,  $f = m-3$ 인 경우를 보이겠다.  $H_1$ 의 정점 중  $\text{dist}(\bar{x}, V(F_0), H_0) \neq 1$ 인 정점  $x$ 의 개수는 적어도  $2^{m-1}-2(m-2)f = 2^{m-1}-2(m-2)(m-3) \geq 4$ 이다. 해밀톤 경로상에서 이러한 정점  $x$ 에 대해서 에지  $(x, y)$ 를 고려해 보자. 이러한  $(x, y)$ 들 중 적어도 두 개에 대해서  $(x, \bar{x})$ 와  $(y, \bar{y})$ 가 정상이다. 왜냐하면  $f \leq 1$ 이기 때문이다. 이제  $(x, \bar{x})$ 와  $(y, \bar{y})$ 가 정상인  $(x, y)$ 를  $(u, v)$ 로 고르면 된다. 그러면  $f = m-3$ 일 경우에  $(u, \bar{u})$ 와  $(v, \bar{v})$ 가 정상일 뿐 아니라  $\text{dist}(\bar{u}, V(F_0), H_0) \neq 1$ 이도록  $(u, v)$ 를 선택하게 된다.



(그림 5) 경우 C:  $f < f, s \in V(H_1), t \in V(H_1)$

에지  $(u, v)$ 를 골랐으면  $H_0 \setminus F_0$ 에서  $\bar{u}$ 와  $\bar{v}$ 간의 해밀톤 경로를 구한다.  $f < m-3$ 일 경우엔 소정리 1에 의해서 해밀톤 경로가 존재하고  $f = m-3$ 일 경우엔  $\text{dist}(\bar{u}, V(F_0), H_0) \neq 1$ 이므로 유도 가정에 의해서 해밀톤 경로가 존재한다.  $H_0$ 의 해

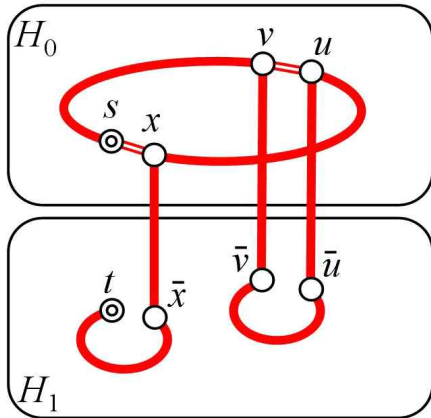
밀톤 경로와  $H_1$ 의 해밀톤 경로를 합치되 에지  $(u, \bar{u})$ 와  $(v, \bar{v})$ 를 포함하고 에지  $(u, v)$ 를 제외한다.

**경우 D:**  $f = f, s \in V(H_0), t \in V(H_0)$ .

$F_0$ 에 속하는 고장  $(u, v)$ 를 고르되  $\text{dist}((s, V(F_0 \setminus (u, v))), H_0) \neq 1$ 이도록 고른다. 이러한  $(u, v)$ 가 반드시 존재함을 보이겠다. 가정에 의해  $\text{dist}(s, V(F_0), H_0) \neq 1$ 이고 모든 고장이  $H_0$ 에 있으므로  $\text{dist}(s, V(F_0), H_0) \neq 1$ 이다. 따라서 다음의 두 가지 경우만 보이게 된다. 첫째  $\text{dist}(s, V(F_0), H_0) > 1$ 일 경우엔 아무 고장이거나  $(u, v)$ 로 고르면 된다. 왜냐하면  $\text{dist}((s, V(F_0 \setminus (u, v))), H_0) > 1$ 이기 때문이다. 둘째  $\text{dist}(s, V(F_0), H_0) = 0$ 일 경우엔  $s$ 를 끝정점으로 하는 어떤 고장  $(s, y)$ 가 존재한다. 따라서 고장  $(s, y)$ 를 제외한 나머지 고장들 중  $(u, v)$ 를 고르면 된다. 왜냐하면  $\text{dist}((s, V(F_0 \setminus (u, v))), H_0) = 0$ 이기 때문이다. 고장  $(u, v)$ 를 골랐으면  $(u, v)$ 를 가상의 정상 에지로 보고 (그림 2)와 같이  $H_0 \setminus (F_0 \setminus (u, v))$ 에서  $s$ 와  $t$ 간의 해밀톤 경로를 구한다.  $H_0$ 에는  $(u, v)$ 를 제외하면  $f-1 = m-3$ 개의 고장이 존재하고  $\text{dist}(s, V(F_0 \setminus (u, v))), H_0) \neq 1$ 이므로 유도 가정에 의하여 해밀톤 경로가 존재한다. 만약 에지  $(u, v)$ 가 해밀톤 경로 위에 존재하지 않는다면 해밀톤 경로 위의 임의의 에지를  $(u, v)$ 로 재선택한다.  $H_1$ 에서  $\bar{u}$ 와  $\bar{v}$ 간에 해밀톤 경로를 구한다.  $H_1$ 에는 고장이 없으므로 소정리 1에 의하여 해밀톤 경로가 존재한다.  $H_0$ 의 해밀톤 경로와  $H_1$ 의 해밀톤 경로를 합치되 에지  $(u, \bar{u})$ 와  $(v, \bar{v})$ 를 포함하고 에지  $(u, v)$ 를 제외한다.

**경우 E:**  $f = f, s \in V(H_0), t \in V(H_1)$ .

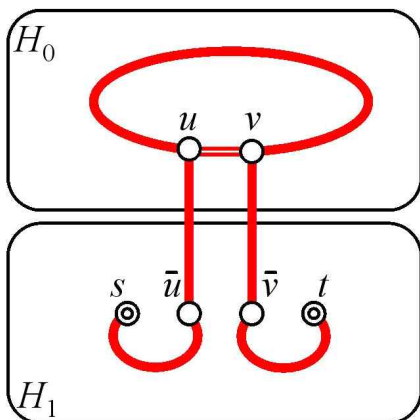
$F_0$ 에 속하는 고장  $(u, v)$ 를 고르되  $\bar{u} \neq t$ 이고  $\bar{v} \neq t$ 이도록 고른다. 에지  $(u, v)$ 를 가상의 정상 에지로 보고 (그림 6)와 같이  $H_0 \setminus (F_0 \setminus (u, v))$ 에서 해밀톤 사이클을 구한다.  $(u, v)$ 를 가상의 정상 에지로 보면  $H_0$ 에는  $f-1 (= m-3)$ 개의 고장이 존재하므로 소정리 2에 의하여 해밀톤 사이클이 존재한다. 만약 에지  $(u, v)$ 가 해밀톤 사이클 위에 존재하지 않는다면 해밀톤 사이클 위의 임의의 에지를  $(u, v)$ 로 재선택되  $\bar{u} \neq t$ 이고  $\bar{v} \neq t$ 이도록 한다. 일반성을 잃지 않고 어떤 정점  $x (\neq u)$ 에 대해서 해밀톤 사이클을  $(s, x, P, u, v, P)$ 라고 표현할 수 있다.  $\bar{x} = t$ 일 경우  $t$ 를 가상의 고장 정점으로 보고  $H_1 \setminus t$ 에서  $\bar{u}$ 와  $\bar{v}$ 간에 해밀톤 경로를 구한다. 이 해밀톤 경로는 소정리 1에 의해서 존재한다.  $\bar{x} \neq t$ 일 경우 정점쌍  $[t, \bar{x}]$ 과  $[\bar{u}, \bar{v}]$ 에 대해서 서로소인 경로커버를 구한다. 이 서로소인 경로커버는 소정리 3에 의해서 존재한다.  $H_0$ 의 해밀톤 사이클과  $H_1$ 의 해밀톤 경로 혹은 서로소인 경로커버를 합치되 에지  $(x, \bar{x}), (u, \bar{u}), (v, \bar{v})$ 를 포함하고 에지  $(s, x), (u, v)$ 를 제외한다.



(그림 6) 경우 E:  $f_0 = f, s \in V(H_0), t \in V(H_1)$

**경우 F:**  $f_0 = f, s \in V(H_1), t \in V(H_1)$ .

$F_0$ 에 속하는 임의의 고장  $(u, v)$ 를 가상의 정상 에지로 보고 (그림 7)과 같이  $H_0 \setminus (F_0 \setminus (u, v))$ 에서 해밀톤 사이클을 구한다.  $(u, v)$ 를 가상의 정상 에지로 보면  $H_0$ 에는  $f-1=m-3$ 개의 고장이 존재하므로 소정리 2에 의하여 해밀톤 사이클이 존재한다. 만약 에지  $(u, v)$ 가 해밀톤 사이클에 포함된다면  $s \neq \bar{u}, s \neq \bar{v}$ 이다. 왜냐하면  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이기 때문이다. 만약 에지  $(u, v)$ 가 해밀톤 사이클에 포함되지 않는다면 해밀톤 사이클 위의 임의의 에지를  $(u, v)$ 로 재선택 하되  $s \neq \bar{u}$ 이도록 한다.  $t = \bar{v}$ 일 경우  $t$ 를 가상의 고장 정점으로 보고  $H_1 \setminus t$ 에서  $s$ 와  $\bar{u}$  간에 해밀톤 경로를 구한다. 이 해밀톤 경로는 소정리 1에 의해서 존재한다.  $t \neq \bar{v}$ 일 경우  $H_1$ 에서 정점쌍  $[s, \bar{u}]$ 과  $[t, \bar{v}]$ 에 대해서 서로소인 경로커버를 구한다.  $H_1$ 에는 고장이 없으므로 서로소인 경로커버는 소정리 3에 의해서 존재한다.  $H_0$ 의 해밀톤 사이클과  $H_1$ 의 해밀톤 경로 혹은 서로소인 경로커버를 합치되 에지  $(u, \bar{u})$ 와  $(v, \bar{v})$ 를 포함하고 에지  $(u, v)$ 를 제외한다.



(그림 7) 경우 F:  $f_0 = f, s \in V(H_1), t \in V(H_1)$

이상으로 정리 1의 증명을 마쳤다. 크기가  $m-2$ 이하인 고장 집합  $F$ 에 대하여  $V(F)$ 와 거리가 1인 정점의 개수는  $2(m-1)(m-2)$ 개 이하이다. 따라서 정리 1로부터 다음과 같은 따름 정리를 얻을 수 있다.

**따름정리 1.**  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G), |F| \leq m-2$ , 가 고장일 때 임의의 정점  $s$ 에 대하여 나머지  $2^m-1$ 개의 정점들 중  $2(m-1)(m-2)$ 개를 제외한 임의의 정점  $t$ 를 고르면 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재한다.

또한 정리 1로부터 RHL 그래프가 포함하는 그래프들에 대하여 다음과 같은 따름정리를 얻을 수 있다.

**따름정리 2.**

- (a)  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 교차큐브  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G), |F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재한다.
- (b)  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 피비우스큐브  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G), |F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재한다.
- (c)  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 엠큐브  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G), |F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재한다.
- (d) 홀수  $m \geq 5$ 에 대하여  $m$ -차원 꼬인큐브  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G), |F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재한다.
- (e)  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 지역꼬인큐브  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G), |F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재한다.
- (f)  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 다중꼬인큐브  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G), |F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재한다.
- (g)  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 일반꼬인큐브  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G), |F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재한다.
- (h) 홀수  $m \geq 5$ 에 대하여 채귀원형군  $G(2^m, 4)$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G), |F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재한다.

**4. 결 론**

본 논문에서는  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에서 에지 집합  $F \subset E(G)$ ,  $|F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재함을 보였다.

$m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에서 임의의 에지 집합  $F \subset E(G)$ ,  $|F| \leq m-2$ , 가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F))=1$ 이고  $\text{dist}(t, V(F))=1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재하지 않는 사례는 쉽게 찾아 볼 수 있다. 예를 들어  $m-2$ 개의 고장이 한끝점  $v$ 를 공유할 때  $s$ 와  $t$ 가 동시에  $v$ 정점에 인접한다면 해밀톤 경로가 없다. 그러나 이런 예를 제외하고  $\text{dist}(s, V(F))=1$ 이고  $\text{dist}(t, V(F))=1$ 인 경우에 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재하는 사례도 많음을 컴퓨터 프로그램을 통해 확인했다. 따라서 고장 에지들의 위치와  $s$ 와  $t$ 의 위치를 제한하는 조건하에서 더 많은 정점쌍간의 해밀톤 경로가 존재함을 보일 수도 있을 것으로 추측된다.

한편  $m \geq 4$ 인  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에서  $m-1$ 개의 임의의 에지가 고장일 때  $\text{dist}(s, V(F)) \neq 1$ 이거나  $\text{dist}(t, V(F)) \neq 1$ 인 정점쌍  $[s, t]$ 간에 해밀톤 경로가 존재하지 않는 사례들도 쉽게 찾아 볼 수 있다. 따라서  $m$ -차원 RHL 그래프  $G$ 에서  $m-1$ 개의 임의의 에지가 고장일 때 혹은  $m-2$ 개 이상의 임의의 정점이 고장일 때 해밀톤 경로를 가지는  $s$ 와  $t$ 의 위치 조건을 연구하는 것은 향후 과제이다.

### 참 고 문 헌

[1] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Fault-hamiltonicity of hypercube-like interconnection networks," in Proc. of IEEE International Parallel & Distributed Processing Symposium IPDPS2005, Denver, Colorado, Apr., 2005.

[2] A. S. Vaidya, P. S. N. Rao, and S. R. Shankar, "A class of hypercube-like networks," in Proc. of the 5th IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing SPDP 1993, pp.800-803, 1993.

[3] K. Efe, "The crossed cube architecture for parallel computation," IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems, 3(5), pp.513-524, 1992.

[4] P. Cull and S. M. Larson, "The Möbius cubes," IEEE Transactions on Computers, 44(5), pp.647-659, 1995.

[5] N. K. Singhvi and K. Ghose, "The Mcube: a symmetrical cube based network with twisted links," in Proc. of the 9th IEEE Int. Parallel Processing Symposium IPPS 1995, pp.11-16, 1995.

[6] P. A. J. Hilbers, M. R. J. Koopman, and J. L. A. van de Snepscheut, "The Twisted Cube," in J. Bakker, A. Nijman, P. Treleaven, eds., PARLE: Parallel Architectures and Languages Europe, Vol. I: Parallel Architectures, pp.152-159, Springer, 1987.

[7] X. Yang, D. J. Evans, and G. M. Megson, "The locally twisted cubes," International Journal of Computer Mathematics, 82(4), pp.401-413, 2005.

[8] K. Efe, "A variation on the hypercube with lower diameter," IEEE Trans. on Computers, 40(11), pp.1312-1316, 1991.

[9] F. B. Chetid and R. B. Chetid, "A new variation on hypercubes with smaller diameter," Information Processing Letters, 46(6), pp.275-280, 1993.

[10] J.-H. Park and K.-Y. Chwa, "Recursive circulants and their embeddings among hypercubes," Theoretical Computer Science, 244(1-2), pp.35-62, 2000.

[11] X. Yang, Q. Dong, E. Yang, and J. Cao, "Hamiltonian properties of twisted hypercube-like networks with more faulty elements," Theoretical Computer Science, 412(22), pp.2409-2417, 2011.

[12] S. Wang and S. Zhang, "Embedding hamiltonian paths in  $k$ -ary  $n$ -cubes with conditional edge faults," Theoretical Computer Science, 412(46), pp.6570-6584, 2011.

[13] T. Kueng, T. Liang, L.-H.Hsu and J. J. M. Tan, "Long paths in hypercubes with conditional node-faults," Information Sciences, 179(5), pp.667-681, 2009.

[14] J.-H. Park, H.-S. Lim, and H.-C. Kim, "Panconnectivity and pancyclicity of hypercube-like interconnection networks with faulty elements," Theoretical Computer Science, 377(1-3), pp.170-180, 2007.

[15] S. Y. Hsieh and C. W. Lee, "Pancyclicity of restricted hypercube-like networks under the conditional fault model," SIAM Journal on Discrete Mathematics, 23(4), pp.2100-2119, 2010.

[16] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, 2rid ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[17] J.-H. Park, H.-C. Kim, and H.-S. Lim, "Many-to-many disjoint path covers in the presence of faulty elements," IEEE Trans. Computers, 58(4), pp.528-540, 2009.



### 김 숙 연

e-mail : sookyeon@hknu.ac.kr

1991년 연세대학교 전산학과(학사)

1993년 한국과학기술원(KAIST) 전산학과 (공학석사)

1998년 한국과학기술원(KAIST) 전산학과 (공학박사)

1998년 3월~2004년 2월 한국전자통신 연구원(ETRI) 선임연구원  
2004년 3월~현 재 한경대학교 컴퓨터공학과 교수

관심분야: 병렬처리, 상호연결망, 그래프 임베딩, 그래프 이론 등



## 전 병 태

e-mail : [chunbt@hknu.ac.kr](mailto:chunbt@hknu.ac.kr)

1986년 한남대학교 전산과(학사)

1989년 숭실대학교 전산과(석사)

2001년 고려대학교 컴퓨터학과(박사)

1989년~2004년 2월 한국전자통신 연구원  
(ETRI) 선임연구원

2004년 3월~현 재 한경대학교 웹정보공학과 교수

관심분야: 멀티미디어 영상처리, 동영상 처리, 컴퓨터 비전 등