

학교수학 관점에서 살펴본 로그의 역사적 배경과 교수-학습 방법에 대한 고찰

조 정 수 (영남대학교)

본 연구는 고등학교 수학에서 지도되고 있는 로그의 교수-학습 방법에 대한 새로운 관점과 방법을 고찰해보고 이를 통해 학교수학의 로그 지도에 대한 시사점을 제시하는데 목적이 있다. 이를 위하여 로그의 역사적 배경을 John Napier, 17세기 과학에 대한 로그의 영향, 그리고 로그계산자와 로그계산 방법을 중심으로 살펴보았다. 이런 배경과 함께 로그의 교수-학습 방법에 대한 고찰에서는 함수 개념을 이용한 로그의 도입, 상용로그를 이용한 로그계산, 밑의 변환 공식에 대해서 고찰하였다. 이런 역사적, 교수방법적 고찰을 통하여 학교수학에서 로그 지도에 대한 여섯 가지 시사점을 제시하였다.

I. 서론

NCTM(2000)의 Principles and Standards for School Mathematics의 지도원리와 학습원리에 따르면 양질의 수학 프로그램은 수학적 이해, 사실적 지식의 형성, 절차적 유창함, 그리고 개념적 지식의 향상을 목표로 해야 한다고 지적하고 있다. 다시 말해, 수학을 가르치고 배운다는 것은 계산을 수행할 줄 알고 계산과 관련된 몇 가지 사실적 지식을 아는 것과 이런 것을 가르치는 것 이상을 말한다. 이런 지도와 학습원리의 관점에서, 수학수업은 다양한 개념이나 절차 사이의 연결성을 만들고 의미를 형성하고 학생들의 사전지식을 이용하는 활동이 되어야 한다(Hull, Balka, & Miles, 2011).

여기서 말하는 의미는 구성주의자가 말하듯이 지식의 구성을 위해 인지적 불균형을 조장하는 사회적 상호작용보다 학생 개인의 의미나 이해 형성이 더 중요하다는 것은 아니다(Piaget, 1950). 따라서 수학을 학습하는데 있어서 고등학생들의 경우 다양한 수학적 아이디어를 접하는 경험을 통해 이들 아이디어를 자신의 개인적 의미나 이해로 만들기 위한 개인적인 인지적 노력이 필요하다. 즉 “인지적 행위나 조작에 의해 형성되는 패턴”에 의한 반영적 추상화를 통해 개인적 의미나 이해 형성이 필요하다(von Glasersfeld, 1995, p.374). 비록 어떤 수학적 활동(예: 패턴찾기, 일반화하기, 증명과 증명하기)은 수학교실에서 수학적으로 활동하고 사고하는 과정의 일부인 문화화 과정(enculturative process)을 통해 교사나 상위 수준의 동료 학생들한테서 배울 수 있지만, 다른 활동(예: 군의 구조, 연속성과 극한, 무한집합)은 그 아이디어를 접하고 경험하는 개인에 의해 이해될 수밖에 없다(Nardi, Jaworski, & Hegedus, 2005). 마찬가지로 로그의 개념도 학생 개인의 인지적 노력에 의한 경험에 의해서만 습득될 수 있으므로, 다양한 예와 기존 지식을 활용하는 경험의 제공을 통해 로그 개념의 대상화가 가능하도록 해야 하고 그렇게 함으로써 대상에 대한 반영적 추상화라는 인지적 조작이 일어날 것이다.

로그의 교수-학습과 관련하여 생각해 볼 수 있는 또 다른 수학교육의 이론으로 개념적 지식과 절차적 지식이 있다(Star, 2005). Hiebert와 Lefevre(1986)의 정의에 따르면, 개념적 지식은 “관계성이 풍부한 지식이다. 지식이 거미줄처럼 서로 연결되어 있으며 개별적 지식만큼이나 지식의 연결 관계가 두드러진 하나의 망과 같다. 관계성

* 접수일(2011년 8월 8일), 심사(수정)일(2011년 9월 15일), 게재확정일자(2011년 9월 23일)

* ZDM분류 : D40

* MSC2000분류 : 97C90

* 주제어 : 로그, 로그계산, 로그계산자, 로그 교수법

이 개별 지식보다 더 많아서 모든 정보가 어떤 식으로든지 연결되어 있다”(pp.3-4). 그리고 절차적 지식에는 두 종류가 있는데 “첫 번째 종류의 절차적 지식은 어떤 체계의 기호에 대해 하나하나 잘 알고 그 기호의 문법적 사용에 대해서도 잘 아는 것을 말한다. 두 번째 절차적 지식은 수학 문제를 푸는데 필요한 규칙이나 절차들을 말한다. 학생들이 가지고 있는 것으로 보이는 많은 절차들은 기호를 조작하는데 필요한 일련의 규정이나 처방들이다”(pp.7-8). 하지만 현재 중등 수학교육의 경우 개념적 지식에 의한 접근도 부족한 실정이지만 절차적 지식에 대한 충분한 고려 없이 학생들에게 지도되고 있는 실정이라고 본다. 그러므로 로그의 개념과 로그계산의 절차는 기존의 지수법칙, 등차수열과 등비수열의 관계, 그리고 수계산과 관련된 여러 가지 절차적 지식을 지속적으로 사용하는 경험의 제공을 통해 습득되도록 해야 할 것이다.

따라서 본 연구는 반영적 추상화에 의한 수학 개념의 개인적 의미나 이해의 형성과 더불어 개념적 지식과 절차적 지식의 이론적 관점에 따라, 로그 개념에 대한 학생들의 개인적 의미나 이해 형성을 돕고, 로그계산과 관련된 절차적 지식의 구성을 좀 더 개념적, 맥락적 지식의 관점에서 촉진시킬 수 있는 교수-학습 방법을 고찰하는데 목적이 있다. 로그 개념과 로그계산의 맥락적 배경을 파악하기 위하여 로그와 관련된 수학사를 고찰하였으며, 현행 로그 교육내용의 분석을 파악하기 위하여 고등학교 교과서 3종을 로그 개념과 로그계산의 내용에 초점을 두고서 살펴보았다.

II. Logarithms과 관련된 수학사

1. logarithms을 사용하기 이전 시대의 곱셈과 나눗셈 계산

사람들은 계산을 하는데 요구되는 시간과 노력을 줄이는 방법을 계속해서 찾으려고 했다. 인도 수체계는 이렇게 해서 발견하게 된 수체계였지만 곱셈과 특히 나눗셈 계산은 여전히 어려웠고 계산상의 오류를 범하기 쉬웠다. 1544년 Michael Sifel이 쓴 책 <Arithmetica Integra>에는 아래와 같이 두 수열이 제시되어 있다 (Copeland, 1992).

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & \dots \end{array}$$

이 두 수열의 그 다음수를 계산하려면 위에는 1을 더하고 밑에는 2를 곱하면 된다. 현대적 표기법으로 아래쪽 수열을 표시하면 간단히 2^n 이다. Sifel은 위쪽 수열의 덧셈과 아래쪽 수열의 곱셈이 서로 대응된다고 지적했다. 예를 들면, 위쪽 수열에서 3과 5는 아래쪽 수열의 8과 32에 해당하므로 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & + & 5 & = & 8 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 8 & \times & 32 & = & 256 \end{array}$$

당시에는 현재 사용하고 있는 수학적 표기법이 없었기 때문에 8×32 를 아래와 같이 계산할 수는 없었을 것이다.

$$8 \times 32 = 2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$$

그래서 8×32 의 곱셈을 $2^a \times 2^b = 2^{a+b}$ 라는 규칙을 사용하여 간단한 덧셈으로 변환시켜야 했다. Sifel의 이런

아이디어를 좀 더 구체적으로 살펴봄으로써 로그 아이디어의 발전 과정을 추적할 수 있을 것이다.

로그 아이디어가 개발되기 이전부터 수열에 관한 상당한 지식이 발전되어 있었다. 따라서 수열의 성질로부터 로그의 성질을 이끌어내는 것은 자연스러운 수학적 아이디어의 발전이라고 볼 수 있다(Land, 1963). 등비수열의 공비를 이용해서 여러 가지 수열을 만들 수 있지만 여기서는 간단하게 2와 10에 대해서만 만들어보기로 한다.

공비 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

공비 10: 10, 100, 1,000, 10,000, 100,000, 1,000,000, ...

공비가 1보다 크면 수열이 증가하고, 공비가 0과 1 사이면 감소하는 것을 쉽게 관찰할 수 있다. 감소하는 경우에 대해서는 공비를 1/2로 해보면 된다.

이러한 등비수열을 살펴보면 흥미로운 사실을 알 수 있다. 공비가 2인 등비수열을 수열 L 이라고 하고, 각 항을 나타내는 등차수열을 수열 N 이라고 여기에 0을 추가하면 다음과 같다.

수열 N : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...
 수열 L : 1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 ...

수열 L 에 대해 곱셈과 나눗셈을 한 결과와 수열 N 에서 덧셈과 뺄셈을 한 결과를 나란히 비교해보면 다음과 같다.

<표 1> 등비수열과 등차수열의 계산법 비교

수열 L 의 곱셈	수열 N 의 덧셈	수열 L 의 나눗셈	수열 N 의 뺄셈
$64 \times 8 = 512$ $2^6 \times 2^3 = 2^{6+3} = 2^9$	$6 + 3 = 9$	$512 \div 64 = 8$ $2^9 \div 2^6 = 2^{9-6} = 2^3$	$9 - 6 = 3$
$16 \times 32 = 512$ $2^4 \times 2^5 = 2^{4+5} = 2^9$	$4 + 5 = 9$	$1024 \div 128 = 8$ $2^{10} \div 2^7 = 2^{10-7} = 2^3$	$10 - 7 = 3$
$32 \times 8 = 256$ $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$	$4 + 3 = 8$	$128 \div 16 = 8$ $2^7 \div 2^4 = 2^{7-4} = 2^3$	$7 - 4 = 3$

이 계산결과를 보면 수열 L 에서의 곱셈과 나눗셈은 수열 N 에서의 덧셈과 뺄셈에 각각 대응되는 사실을 알 수 있다. Sifel이 이런 식으로 수열을 나열하여 계산하는 것에 대해 여러 가지 기여를 했지만, 이렇게 등비수열 L 의 각 항이 등차수열의 N 의 각 항과 일대일로 대응된다는 놀라운 성질을 발전시켜 로그계산(logarithms)의 아이디어를 개발한 사람은 John Napier였다. 그는 이를 “logarithms 이론”으로 발전시켜 1614년 <Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio>(환상적인 로그리듬의 성질에 대한 기술)이란 책을 출판하였다.

로그 개념의 역사적 발생 초기의 이런 사실로부터 학교수학에서 로그 개념을 소개할 때 간단한 등차수열과 등비수열을 이용하여 이 두 수열 사이의 관계성을 찾는 것에서 시작하는 것도 가능한 지도 방법임을 알 수 있다.

2. John Napier의 생애와 로그 관련 역사

John Napier는 1550년 스코트랜드의 Merchiston 성에서 태어났다. 아버지의 죽음으로 Merchiston의 제18대 성주가 되었다. Napier는 St Andrews 대학교에서 공부했고 유럽 전역을 여행했다. 1593년, 그는 자신의 가장 위대한 업적이라고 생각하는 <A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John>이란 책을 저술했는

데 이 책은 영국, 프랑스, 독일, 덴마크 등 유럽 여러 나라로 전파되어 읽혔다. 이 책은 요한계시록(the book of Revelation)을 수학적 영감으로 새롭게 해석한 것으로 이 책에서 교황이 ‘반기독교인’이라는 주장과 함께 지구가 1786년에 멸망할 것이라고 예언하기도 했다(St Andrew’s University Web site 인용).

1596년, Napier는 자신의 성을 방어하기 위해 설계한 여러 가지 발명을 자세히 기록한 책을 출판했는데, 이 발명품들 중 한 가지 예로 태양빛을 모아서 멀리 있는 적을 불지를 수 있는 포물거울이 있다. 이 발명품은 고대 시리큐스의 그리스 수학자였던 아르키메데스(287-212 BC)가 로마함대를 파괴하려고 고안했던 포물거울과 거의 같은 것으로 보인다. 하지만 Napier가 실제로 이를 제작하여 실험을 했는지에 대해서는 알려진 바가 없다.

수학 분야에서 가장 잘 알려진 업적으로는 1614년 처음 출판된 작은 책 <Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio>(환상적인 로그리듬의 성질에 대한 기술)이다. 이 책에는 일련의 표들이 제시되어 있고 이 표들의 사용 방법에 대해 간단하게 설명되어 있었다. 그렇지만 로그계산에 대한 이론과 방법을 설명한 책인 <Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio>(환상적인 로그리듬의 구성)은 그가 죽은 후인 1619년에 출판되었다.

Napier의 로그 정의는 두 점의 연속적 이동에 기초한 것으로, 그에겐 이것이 연속적으로 변화하는 양들을 생각할 수 있는 유일한 방법이었다. 그 당시에는 Napier가 자신의 아이디어를 엄밀하게 만들 수 있는 미적분학 뿐만 아니라 현대적 표기법도 발달되지 않았다. 따라서 그의 모든 주장은 평범하고 긴 일상 언어로 기술될 수밖에 없었다. 움직이는 작은 알맹이로 설명하고 있는 Napier의 로그리듬은 사실 현재 사용하고 있는 로그와 약간 다르다.

1615년, 영국의 수학교수였던 Henry Briggs는 스코트랜드의 Napier를 방문했다. Briggs는 Napier의 로그에 크게 감명을 받았고 이 로그가 상당히 발전될 수 있음을 제안했다. Briggs는 곧 훨씬 더 계산에 유용한 성질을 가지는 일단의 진보된 로그를 만들게 되었는데, 현재 우리가 사용하고 있는 로그는 바로 이 로그이다. Briggs는 또한 Napier의 1619년에 출판된 책을 번역하여 수년간의 계산 실험을 거친 다음 일련의 로그표를 발표하였다.

3. 17세기 과학에 대한 로그의 영향

16세기 후반 천문학과 항해술의 발달은 이전에 경험하지 못했던 더 길고 더 복잡한 삼각법의 계산을 요구했다. 로그 발명 이전의 계산은 지루한 것이었다. 이를 극복하려고 대수적으로 약간의 조작을 가미한 $4AB = (A+B)^2 - (A-B)^2$ 인 “제곱식을 1/4하기” 공식이나 $2\sin(A)\sin(B) = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ 같은 공식들이 사용되었다. 또한 Georg Joachim Reticus(1514-1576)가 1613년 발표한 소수 15자리까지 계산한 일련의 삼각법표와 같은 삼각법표나 여러 가지 다른 종류의 표들이 사용되고 있었다. Reticus는 그 당시 가장 뛰어난 인간 컴퓨터였다. 그가 발표한 표 중에는 모두 손으로 계산한 소수 15자리까지 표시된 1/360도의 모든 각에 대한 sines값도 있다. 이런 표를 계산하는데 들인 Reticus의 노력과 방법은 19세기 말에 Charles Babbage가 기계식 컴퓨터를 설계하고 만드는데 영감과 동기를 부여했다(Edwards, 1979).

로그계산법의 사용은 그 당시 과학의 모든 분야에서 필요불가결하게 사용되었기 때문에 Napier의 아이디어는 순식간에 널리 알려지게 되었다. Napier의 표를 받은 Johann Kepler(1571-1630)도 이 표를 이용한 계산을 통해 자신의 행성운동법칙의 공식을 발견할 수 있었다. 로그의 도움 없이 천문학의 이런 계산은 수년이 걸렸을 수도 있었다는 사실은 분명하다. 그래서 Kepler는 1620년에 출판한 <Ephemeris>(별자리 목록)에서 Napier에게 감사를 전하는 편지를 실었다. 이 편지에서 Kepler는 Napier의 창조적 업적이 천문학에 준 영향을 찬양하였다. Kepler의 법칙은 Newton이 만유인력의 이론을 지지하는데 결정적인 증거를 제시해주었다. 일반적으로 수학사에서는 현대 미적분학의 토대를 마련함으로써 현대 과학과 공학의 후속적 발전을 가능하게 한 인물이 바로 Napier라고 인정하고 있다.

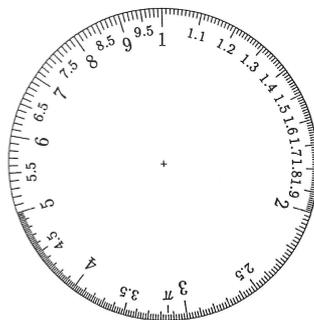
4. 로그계산자의 개발에 관련된 수학사

Edmund Gunter(1581-1626)의 가장 중요한 책 <Description and Use of the Sector>가 영어로 처음 출판된 것은 1623이다. 이 책은 17세기에 출판된 항해술에 관한 가장 중요한 업적으로 인정되고 있다. 여기서 섹터(sector)는 두 개의 경첩으로 된 부분으로 구성된 수학적 기구로서 이 경첩 부분에는 눈금이 새겨져 있어 계산을 하는데 사용되었다. 이것은 두 개의 서로 다른 눈금자를 미끄러지게 맞대어 계산하는 계산자(slide rule) 형태가 아니라 한 쌍의 컴퍼스와 한 개의 눈금만을 사용한 기구였다. 그런데 실제로 사용하는데 있어 컴퍼스 바늘이 눈금을 잡아 계산상의 오류를 만들었다고 한다. Gunter의 섹터가 특별한 이유는 수계산 문제를 풀 수 있게 로그눈금이 새겨진 최초의 수학적 도구였기 때문이다(Kelles, Kern, & Bland, 1943).

William Oughtred(1574-1660)는 성직자이면서 뛰어난 수학자였다. 그는 1628년경에 저술되어 1631년에 런던에서 출판된 책 “수학의 열쇠”라는 <Clavis Mathematicae>에서 곱셈기호(\times)를 도입했다. 그 당시 이 책은 아주 중요한 수학 교과서로 뉴턴도 이 책을 읽고 공부했다고 한다. 일반적으로 Oughtred가 로그계산자를 처음으로 개발한 사람이라고 한다. 1632년 <The Circles of Proportion and the Horizontal Instrument>라는 제목의 책에서 <그림 II-1>과 같은 원형계산자에 대해 설명했다. 그런데 Oughtred는 이미 이보다 수년 전에 벌써 이 계산자를 개발했지만 그것에 관한 책을 출판하지는 못했다고 한다. 이 책에서 그가 설명하고 있는 첫 번째 도구는 “Circle of Proportion”이다. 이에 대한 사용 설명에서 Oughtred는 로그의 덧셈으로 곱셈 계산이 되고 로그의 뺄셈으로 나눗셈 계산이 된다고 기술했다. 이 설명은 로그를 사용한 규칙을 정확하게 말하고 있으며 로그계산자 사용의 원리를 말하는 것이다.

Richard Delamain(1660-1644)은 수학교사이며 원래 Oughtred의 제자였다. 그의 책 <Grammelogia>에서 원형계산자에 대한 설명을 처음으로 제시하고 있다. 30쪽의 이 소책자에는 <그림 II-1>과 같은 원형계산자에 대한 설명이 기술되어 있는데, 이 장치는 두 개의 금속 원판을 작은 핀으로 동일한 중심에 놓이도록 고정해 놓은 것이다.

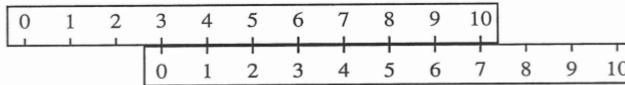
Oughtred와 Delamain 사이에 원형계산자의 최초 개발자가 누구냐에 대한 논쟁이 몇 년간 계속되었다. Delamain은 계산자에 대한 열렬한 지지자로 이런 기계장치는 계산 방법에 대한 사람들의 이해를 도와준다고 했다. 하지만 Oughtred는 그렇게 생각하지 않았다. Oughtred는 계산자의 사용은 수학자들의 지겨운 계산 노동을 단지 줄여주는 도구라고 생각했기 때문에 이를 출판하지 않았다고 한다. 일반적으로 Oughtred의 “Circle of Proportion”이 Delamain의 것보다 훨씬 더 자세하고 활용성이 높다. Oughtred와 Delamain 모두 독자적으로 원형계산자를 개발했으며 Oughtred가 먼저 아이디어를 개발했지만 이를 처음출판한 사람은 Delamain이라고 수학사에서는 전하고 있다.



<그림 II-1> 원형 로그계산자

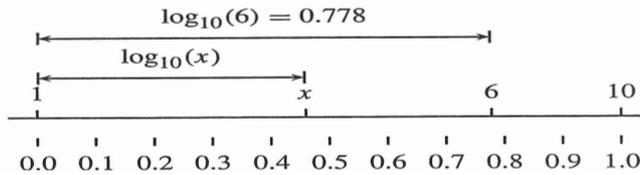
5. 로그계산자를 이용한 계산

계산자에 대한 아이디어는 아름다우면서도 간단하다. 두 수를 “더하려면” 두 눈금자를 가지고 옆으로 나란히 놓기만 하면 된다. 한 눈금자로 다른 눈금자를 지나가게 하면 두 수의 덧셈이 된다. 아래 그림은 이 아이디어를 보여주고 있다. 왼쪽에서부터 볼 때 아래 눈금자의 숫자가 위 눈금자의 숫자보다 3이 적으므로 “더하기 3”를 쉽게 할 수 있다(Kelles, Kern, & Bland, 1943).



<그림 II-2> 계산자를 이용한 두 수의 덧셈

이미 알고 있는 것처럼 로그는 곱셈을 덧셈으로 변환해준다. 그래서 로그눈금이 새겨진 자를 사용하여 <그림 II-2>처럼 로그를 더하면 그 결과는 곱셈이 된다. 로그눈금을 새기는 방법은 먼저 직선을 긋고 두 점을 이 직선에 표시한다. 이 두 점이 1과 10이 되고 이 두 사이의 거리를 이 직선의 길이 1이라고 한다. 예를 들어, 6을 이 직선 위에 표시하려면 이 직선을 따라 $\log_{10}(6)$ 을 측정하면 된다. 이를 나타낸 것이 <그림 II-3>이다.



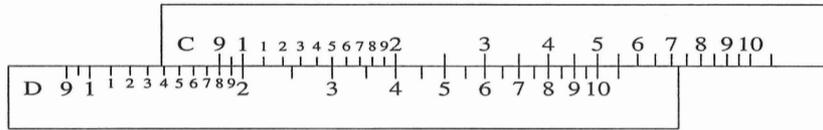
<그림 II-3> $\log_{10}(6)$ 의 로그눈금 그리기

완성된 로그계산자는 아래 <그림 II-4>이다. 통상적인 눈금자와는 달리 로그계산자는 1과 2 사이의 거리가 2와 3 사이의 거리보다 크다. 이것은 로그함수의 그래프가 직선이 아니기 때문이다.

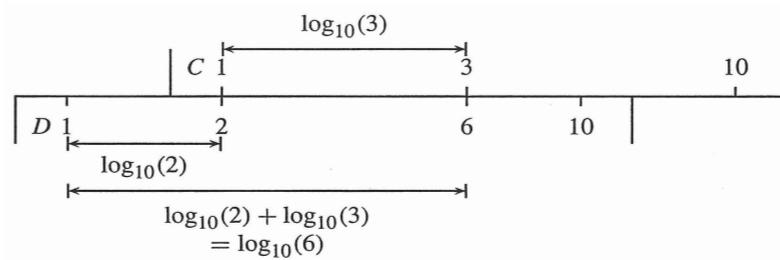


<그림 II-4> 완성된 로그계산자

로그계산자를 사용해서 곱셈을 하는 방법을 살펴보자. 먼저 로그계산자의 경우 눈금사이의 거리가 똑같지 않다는 사실에 주의해야 하는데 1과 2 사이의 눈금이 9와 10 사이의 눈금보다 더 많다. 1과 2 사이에는 49개의 눈금이 있지만 9와 10 사이에는 단지 9개의 눈금만 있다. 이것은 1과 2 사이의 눈금이 9와 10보다 더 정확하다는 것을 뜻한다. 두 수의 곱셈은 두 수의 로그값을 더하는 것과 같다. 예를 들어, 2×3 를 계산한다고 하자. 전통적으로 로그계산자에는 각각 *C*와 *D*라는 문자를 사용했다. <그림 II-5>와 같이 두 개의 로그계산자를 가지고 *C*의 1이 *D*의 2와 일치하도록 아래위로 나란히 놓는다. 그리고 *C*의 눈금 3과 마주보는 *D*의 눈금을 읽으면 2×3 의 결과인 6이 있다. 이 계산의 원리는 <그림 II-6>에서 로그계산자 *D*의 $\log(2)$ 와 로그계산자 *C*의 $\log(3)$ 을 더한 것이다. 두 로그계산자를 움직이지 않고서 몇 가지 로그계산을 더 할 수 있다. 즉 2×4 , 2×5 의 계산은 추가로 눈금만 읽음으로써 가능하다.

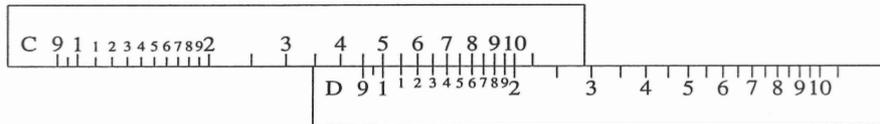


<그림 11-5> 2×3의 계산을 위한 로그계산자 놓는 방법



<그림 11-6> 2×3의 로그계산 원리

2×6의 경우는 <그림 11-5>에서 C의 6과 마주보는 D의 숫자가 없다. 이런 경우에는 10으로 나누어주어야 한다. 10으로 나누는 방법은 로그계산자 C를 왼쪽으로 밀어 C의 10이 D의 2에 오도록 하면 된다. 그러면 <그림 11-7>과 같이 된다. 이 그림에서 C의 6이 D의 1.2 위에 있고 이를 10으로 나누었으므로 그 결과는 12가 된다. 마찬가지로 2×7, 2×8의 계산을 여기서 바로 할 수 있다. 이 경우 소수 눈금은 사용하는 사람이 계속해서 추적해야 하는 번거로움은 있지만 이것은 로그표를 사용할 때 주의하는 것과 유사할 뿐이다.



<그림 11-7> 2×6의 계산을 위한 로그계산자 놓는 방법

위에서 살펴본 로그계산자의 원리를 보면 로그의 덧셈과 뺄셈의 원리를 좀 더 시각적이고 직관적으로 이해할 수 있는 장점이 있다. 이런 간단한 활동을 통해 학생들은 로그계산의 원리를 내면화할 수 있게 되고, 또 이런 내면화는 로그와 관련된 기호화와 성질의 형식화에 대한 이해를 촉진할 수 있을 것으로 본다. 따라서 로그계산을 지도할 때 고려해 볼만한 지도 아이디어라고 생각한다.

III. 로그의 교수-학습에 대한 분석과 고찰

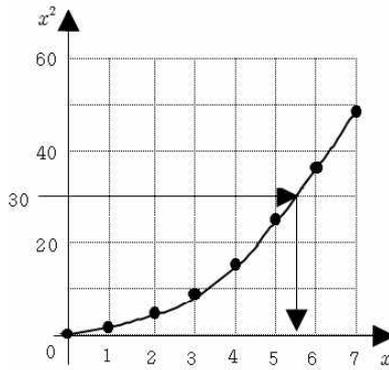
현행 교과서에 제시되어 있는 로그에 대한 지도 내용과 방법을 보면 간단한 지수방정식의 예를 통해 로그 개념을 도입하고, 바로 이어서 로그의 성질과 이를 이용한 계산, 별다른 이유나 설명 없이 밑의 변환 공식의 도입, 상용로그와 지표와 가수, 그리고 마지막으로 로그의 활용을 제시하고 있다(양승갑외, 2010; 이동원외, 2010; 이준열외, 2010). 이러한 전개 방식은 학생들이 로그 개념을 내면화하여 인지적 조작의 대상으로 만들기에 충분한 여유와 방법을 제공하지 못하고 있다고 본다. 따라서 본 논문에서는 로그 개념의 도입을 함수 개념으로 도입할 것을 제안하며, 동시에 상용로그표와 상용로그를 이용한 계산을 먼저 지도하고 그로부터 로그의 성질을 도입하여

교수-학습하는 가능성을 제시해보고자 한다.

1. 함수 개념을 이용한 로그 도입

$f: x \rightarrow x^2$ 또는 $f(x) = x^2$ 은 중학생들도 이해하고 있는 아주 간단한 함수이다. 이것은 하나의 규칙으로 x 가 어떤 값을 갖더라도 그에 해당하는 값 x^2 을 구할 수 있다는 의미이다. 그리고 이 규칙을 시각적 도구인 그래프를 사용하여 좌표평면에 그려보면 x 와 x^2 의 관계를 시각적으로 분명하게 확인할 수 있다.

여기서 이 문제를 “ $y > 0$ 인 임의의 y 에 대하여 $y = x^2$ 을 만족하는 유일한 양수 x 는 얼마인가?”라고 문제제기의 ‘반전’을 사용하여 약간 수정하여 물어보자(Brown & Walter, 2005). 구체적인 예로 “ $y = 9$ 일 때, $x^2 = 9$ 를 만족하는 $x > 0$ 을 구하시오.”라는 질문이 가능하다. 이것은 두 가지 개념으로 생각해 볼 수 있다. 중학교의 제곱근 개념을 이용하면 학생들은 쉽게 이 답이 \sqrt{x} , 즉 $\sqrt{9}$ 임을 알 수 있다. 이것을 $y = x^2$ 함수에서 역대응으로 생각하고 $\sqrt{x} = x^{1/2}$ 을 이용하면 된다. 그래서 만약 $\sqrt{30}$ 의 값을 구하려면 <그림 III-1>처럼 $y = x^2$ 에서 역대응으로 구한다. $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ 의 값은 $y = x^3$ 에서 역대응으로, 그리고 $\sqrt[q]{x} = x^{1/q}$ 의 값은 $y = x^q$ 에서 역대응으로 구할 수 있다.



<그림 III-1> $y = x^2$ 의 그래프에서 역대응으로 x 값 구하기

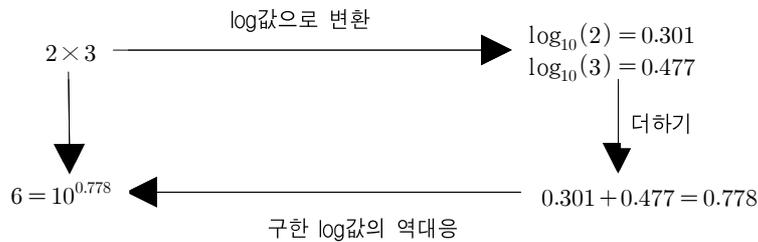
현재 고등학교 수학교과서에 제시되어 있는 로그 도입 과정을 보면 간단한 2의 거듭제곱과 관련된 예를 사용해서 곧바로 형식적으로 로그를 정의하고 있다. 이러한 방식으로는 지수법칙과 로그의 성질 사이에 성립하는 역대응 관계를 충분히 설명하기 어렵고 학생들도 로그 개념을 인지적 대상으로 조작할 수 있는 반영적 추상화의 활동을 경험하기 어렵다. 따라서 본 연구에서는 상용로그표를 사용하여 이를 그래프로 그려보고 역대응을 이용하여 해석하는 활동이 로그 개념을 도입할 때 함께 지도되어야 할 것으로 제안한다. 이에 대한 자세한 설명은 다음 절에서 하고자 한다.

2. 상용로그표와 그래프를 활용한 로그 개념 도입

현행 고등학교 수학교과서에 제시되어 있는 상용로그표의 용도는 상용로그의 값을 구하고 지표와 가수의 성질을 도입하는 것이다. 로그 개념을 성급하게 지나친 형식화와 기호화를 사용함으로써 많은 학생들이 로그 개념을 내면화할 수 있는 경험과 기회가 주어지지 않았다고 본다. 본 연구에서는 이를 해소하기 위하여 상용로그표

를 사용해서 그래프로 그려보고 해석함으로써 상용로그표에 대한 이해, 로그 개념의 기호와 형식의 의미, 그리고 필수적인 로그 성질의 이해를 증진시킬 수 있을 것으로 본다.

<표 2>는 소수 셋째자리까지의 상용로그의 값을 구한 표이다. 그리고 <그림 III-2>는 이 상용로그의 값을 그래프로 나타내고 2×3 의 로그계산 과정을 그래프로 살펴본 것이다. 이 그래프에서 x 축의 2와 3에 대응하는 y 축의 상용로그의 값 0.301과 0.477의 길이 합은 x 축의 6에 대응하는 y 축의 상용로그의 값 0.778과 정확히 같음을 알 수 있다. 하지만 역대응으로 본 $10^{0.301}$ 과 $10^{0.477}$ 이 $10^{0.778}$ 과 같아지려면 서로 곱해야 함을 직관적으로 볼 수 있다. 이를 다이어그램으로 나타내면 아래와 같다.



이런 방식의 지도는 앞에서 이미 언급했듯이 함수의 역대응을 이용할 수 있어 상용로그표에 대한 이해를 더 쉽고 깊이 있게 할 수 있을 것으로 생각된다. 이 그래프에서 정의구역은 $1 \leq x \leq 10$ 이고 공역은 $0 \leq y = \log_{10}(x) \leq 1$ 이다. 이 그래프를 보면 임의의 수의 상용로그의 값, 즉 $\log_{10}(x)$ 와 상용로그의 값에 대한 임의의 수, 즉 10^y 를 쉽게 구할 수 있으며 이 두 수 사이의 역대응관계를 알 수 있다. 또한 그래프를 그려보는 활동은 앞으로 학습하게 될 로그함수가 어떻게 그려진 것인지 그리고 이 함수의 전체적인 경향이 어떤지 알 수 있는 장점이 있다.

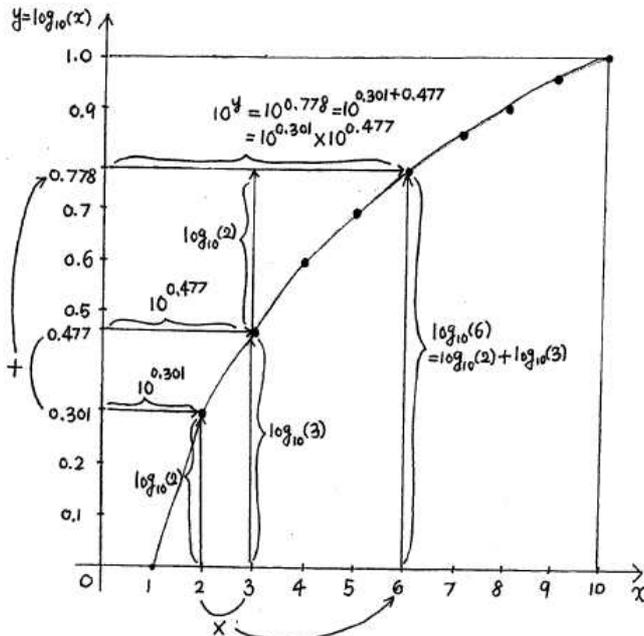
이 접근 방법의 또 다른 장점은 현행 고등학교 수학교과서에서 아무런 이유 없이 제시되어 있는 x 가 1보다 작거나 10보다 큰 수에 대한 상용로그의 값을 구하는 계산 문제에 대한 근거를 제시해 줄 수 있다는 점이다. <그림 III-2>의 그래프에서 자연스러운 질문은 어떻게 점선이 아니라 실선의 연속된 곡선으로 그래프를 그릴 수 있는지 그리고 10보다 큰 수에 대해서는 또 어떻게 그래프를 그릴 것인지이다. 이 질문에 답을 하기 위해서는 1보다 작거나 10보다 큰 수에 대한 개별적인 로그값을 계산해야 하며 또한 로그의 곱셈과 나눗셈 계산을 병행해야 함을 보일 수 있다.

3. 상용로그표를 이용한 로그 계산

$1 \leq x \leq 10$ 의 어떤 수에 대한 상용로그의 값을 구하려면 <표 2>와 같이 상용로그표를 이용한다. 예를 들어, $x = 6.7$ 의 상용로그표를 이용해서 구하면 0.826이고 이 숫자의 의미는 $\log_{10}(6.7) = 0.826$ 또는 $10^{0.826} = 6.7$ 임을 의미한다.

<표 2> 상용로그표

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.000	0.041	0.079	0.114	0.146	0.176	0.204	0.230	0.255	0.279
2	0.301	0.322	0.342	0.362	0.380	0.398	0.415	0.431	0.447	0.462
3	0.477	0.491	0.505	0.519	0.531	0.544	0.556	0.568	0.580	0.591
4	0.602	0.613	0.623	0.633	0.643	0.653	0.663	0.672	0.681	0.690
5	0.699	0.708	0.716	0.724	0.732	0.740	0.748	0.756	0.763	0.771
6	0.778	0.785	0.792	0.799	0.806	0.813	0.820	0.826	0.833	0.839
7	0.845	0.851	0.857	0.863	0.869	0.875	0.881	0.886	0.892	0.898
8	0.903	0.908	0.914	0.919	0.924	0.929	0.934	0.940	0.944	0.949
9	0.954	0.959	0.964	0.968	0.973	0.978	0.982	0.987	0.991	0.996
10	1.000									



<그림 III-2> 상용로그표를 그래프로 나타내기

상용로그표에 없는 수는 어떻게 구하는가? 예를 들어, $10^{0.866}$ 의 값의 경우, 상용로그표를 보면 $10^{0.863} = 7.3$ 이고 $10^{0.869} = 7.4$ 이다. 0.866은 0.863과 0.869 사이의 절반이므로 구하는 값도 7.3과 7.4 사이의 절반인 7.35라고 추측할 수 있다. 하지만 상용로그표의 그래프에서도 보듯이 이 그래프는 직선이 아니기 때문에 이런 추측을 할 수는 없다. 하지만 소수 셋째자리 정도까지의 정확성만을 감안한다면 이 추측도 틀린 것은 아니다. 사실 $10^{0.866} = 7.345$ 이므로 7.35라는 추측도 나쁘지는 않다. 상용로그표를 이용하면 이러한 소수자리에서의 예러가 발생하는데, 예를 들면 $\log_{10}(6.7) = 0.826$ 이지만 실제 참값에 가까운 값은 0.82607848...이다. 이런 예러를 줄이기 위해서는 계산기를 사용해야 하나 계산기도 소수 10^{-10} 자리에서 예러를 범하고 있다.

현행 수학교과서에서 상용로그표에 대한 지도를 보면 상용로그표를 이용하여 상용로그의 값만 구하게 하고

있다. 예를 들면, <그림 III-3> 교과서의 예처럼 상용로그표를 이용하는 방법에 따라 $\log 4.35$ 의 상용로그의 값을 구하고 있다(양승갑외, 2010, p.87). 하지만 여기서 구한 0.6385는 $10^{0.6385}$ 이고 이 값은 10^y 을 나타내는 것이며, 이들 값을 이용하여 더욱 정확하고 부드러운 밑이 10인 지수함수와 로그함수에 대한 그래프를 그릴 수 있다는 언급은 하지 않고 있다. 이런 방식에 따른 상용로그표에 대한 지도는 단순한 절차적 지식에 대한 전달에 불과하여 상용로그표와 지수함수와 로그함수와의 관계에 대한 이해를 높이지 못하고 있다.

예를 들어, 상용로그표를 이용하여 $\log 4.35$ 의 값을 구해 보자.

오른쪽 표에서 '수'의 세로 칸에서 4.3을 찾고 '수'의 가로 칸에서 5를 찾으면, 오른쪽 표에서와 같이 화살표가 맞는 곳의 수가 $\log 4.35$ 의 값이다.

수	0	4	5	6
1.0	.0000	.0170	.0212	.0253
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4.2	.6232	.6274	.6294	.6294
4.3	.6335	.6375	.6385	.6395
4.4	.6435	.6474	.6484	.6493
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

즉, $\log 4.35=0.6385$ 이다.

<그림 III-3> 교과서의 상용로그표를 이용한 로그값 구하기

그렇다면 로그 그래프가 연속된 부드러운 곡선임을 어떻게 알 수 있는가? $\sqrt{x}=x^{1/2}$ 과 로그의 성질 ($\log_a M^k = k \log_a M$)을 이용하면 제곱근과 세제곱근의 값을 구할 수 있다. $y = \log_{10}(x)$ 라 하고 $\sqrt{x}=x^{1/2}$ 의 양변에 상용로그를 취하면 다음과 같다.

$$\log_{10}(\sqrt{x}) = \log_{10}x^{1/2} = \frac{1}{2} \log_{10}(x) = \frac{1}{2}y$$

간단한 예로 $\sqrt{9}$ 의 값을 구해보자. $y = \log_{10}(x)$ 이므로 상용로그표에서 $\log_{10}(9) = 0.954$ 이고 $1/2 \times 0.954 = 0.477$ 이다. 그러면 $\log_{10}(\sqrt{x}) = 0.477$ 이므로 $10^{0.477} = \sqrt{x}$ 이고, 상용로그표에서 $10^{0.477} = 3 = \sqrt{x}$ 이므로 $\sqrt{9} = 3$ 이 된다. $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$ 에 대하여 이 방법을 이용하면 세제곱근 $\sqrt[3]{27}$ 등의 값도 구할 수 있다. 이를 통하여 x 가 무리수인 로그값을 구할 수 있게 되어 로그 그래프가 연속된 부드러운 곡선이 된다는 사실을 미루어 짐작할 수 있다.

4. 1보다 작거나 10보다 큰 값에 대한 로그값 구하기

상용로그표의 범위가 $1 \leq x \leq 10$ 이기 때문에 이보다 더 작거나 큰 수에 대한 상용로그의 값을 구하는 방법이 필요하다. 대부분 교과서에서 이런 수에 대한 상용로그를 구할 때 다음과 같이 10의 양수나 음수의 거듭제곱을 곱하는 이유를 설명하지 않고 있다(예: 이준열외, 2010, p.94). 로그의 곱셈과 나눗셈을 할 때 반드시 상용로그의 범위 안에 오도록 수를 10의 거듭제곱을 적절하게 조작해야 한다는 사실은 언급이 필요할 것으로 본다. 그리고 <그림 III-4>의 367과 0.0367과 같은 수의 상용로그의 값을 그래프에 어떻게 나타낼 수 있는지를 물어보는 것이 좋으며 이것은 또한 함수적 사고의 외삽과 내삽을 이해하는데도 큰 도움이 될 수 있다고 본다.

상용로그의 값

상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하여라.

(1) $\log 367$

(2) $\log 0.0367$

풀이 상용로그표에서 $\log 3.67=0.5647$ 과 로그의 성질을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{array}{ll} (1) \log 367 = \log(10^2 \times 3.67) & (2) \log 0.0367 = \log(10^{-2} \times 3.67) \\ = \log 10^2 + \log 3.67 & = \log 10^{-2} + \log 3.67 \\ = 2 + 0.5647 & = -2 + 0.5647 \\ = 2.5647 & = -1.4353 \end{array}$$

<그림 III-4> 교과서의 상용로그의 값 구하기

위의 교과서 예처럼 로그의 성질을 사용하지 않고 학생들이 이미 알고 있는 지수법칙을 사용해서 상용로그의 값을 구해보자. $\log_{10}(367)$ 을 구하려면 먼저 상용로그표 범위 안의 수가 되도록 해야 하므로 $\log_{10}(3.67) = 0.5647$, 즉 $10^{0.5647} = 3.67$ 을 이용해야 한다. 이를 이용하면 다음과 같이 변형이 가능하다.

$$367 = 3.67 \times 10^2 = 10^{0.5647} \times 10^2 = 10^{0.5647+2} = 10^{2.5647}$$

따라서 로그 정의를 이용하면 $\log_{10}(367) = 2.5647$ 이 된다. 위의 교과서 풀이와 이 풀이의 차이점은 아직 로그 개념에 익숙하지 않은 학생들에게 거듭제곱의 성질과 로그 개념을 계속해서 참조하면서 풀이하게 함으로써 이 둘 사이의 관계에 익숙해지게 한다는 점이다.

다른 예를 보면 $\log_{10}(0.0367)$ 을 구하려면 마찬가지로 $\log_{10}(3.67) = 0.5647$, 즉 $10^{0.5647} = 3.67$ 를 이용하면 된다.

$$0.0367 = 3.67 \times 10^{-2} = 10^{0.5647} \times 10^{-2} = 10^{0.5647-2} = 10^{-1.4353}$$

따라서 여기에 로그 정의를 이용하면 $\log_{10}(0.0367) = -1.4353$ 이 된다.

로그를 이용하여 수계산의 나눗셈을 쉽게 하려면 다음의 지수법칙을 이용해야 한다.

$$\frac{10^x}{10^y} = 10^x \times 10^{-y} = 10^{x-y}$$

이 식이 말하는 것은 10의 거듭제곱의 나눗셈은 지수의 뺄셈과 같다는 의미이다. 다시 말해, 이를 이용하면 로그를 이용한 나눗셈의 법칙은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\log_{10}(a/b) = \log_{10}(a) - \log_{10}(b)$$

예를 들면, $36/12$ 를 해보자. 먼저 36과 12를 상용로그표의 범위에 있는 수로 표현해야 하므로 $36 = 3.6 \times 10$, $12 = 1.2 \times 10$ 이다.

$$\frac{36}{12} = \frac{3.6 \times 10}{1.2 \times 10} = \frac{3.6}{1.2}$$

그러면 $\log_{10}(3.6) = 0.556$ 이고 $\log_{10}(1.2) = 0.079$ 이므로 $36/12$ 는 다음과 같다.

$$\log_{10}(3.6/1.2) = \log_{10}(3.6) - \log_{10}(1.2) = 0.556 - 0.079 = 0.477$$

$\log_{10}(3.6/1.2) = 0.477$ 은 $10^{0.477} = \frac{3.6}{1.2}$ 을 의미하므로 상용로그표를 거꾸로 읽으면 그 값은 3이다. 따라서

$$36/12 = 10^{0.477} = 3 \text{이 된다.}$$

현행 고등학교 수학교과서에 제시된 로그의 곱셈과 나눗셈의 예를 제시하면 다음과 같다.

<표 3> 교과서에 제시된 로그의 곱셈과 나눗셈의 예

다음 식을 간단히 하여라. (양승갑외, 2010, p.84)	$\log_3 36 - 2\log_3 2 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$
다음 식을 간단히 하여라. (이준열외, 2010, p.90)	$4\log_3 18 - 3\log_3 \sqrt[3]{16}$
다음을 간단히 하여라. (이동원외, 2010, p.89)	$\log_2 5 - \log_2 10 = \log_2 \frac{5}{10} = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$
다음을 간단히 하여라. (이동원외, 2010, p.89)	$\log_3 \frac{9}{7} + \log_3 21 = \log_3 (\frac{9}{7} \times 21) = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

이들 예를 보면 수계산의 곱셈과 나눗셈을 간편하게 하기 위함이라는 로그의 원래 용도를 벗어나서 단순히 로그의 성질을 이용한 로그의 곱셈과 나눗셈의 연습문제로 보인다. 예를 들면, $\frac{36}{4}$, $\frac{18^4}{\sqrt[3]{16}}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{9}{7} \times 21$ 등의 곱셈과 나눗셈 문제를 먼저 주고 이를 로그를 이용하여 계산하도록 하는 것이 로그의 의미를 내면화할 수 있는 지도 방법일 것이다. 물론 이 문제들은 로그의 성질만을 이용하도록 인위적으로 조작하여 만들어 놓은 예이기 때문에 전혀 로그를 사용해야 할 이유가 없다는데 더 큰 문제가 있다고 본다. 따라서 좀 더 현실적인 수계산을 사용하는 예가 제시될 필요가 있다고 본다.

또 다른 한 가지 문제점은 로그계산의 실행을 지시하는 문장에 있다. 두 교과서의 경우 “다음 식을 간단히 하여라.”고 제시하고 있고, 한 교과서는 “다음을 간단히 하여라.”고 제시하고 있다. 여기서 말하는 “다음 식”이나 “다음”은 로그를 취한 “수”이므로 식이 될 수 없기 때문에 “식을 간단히 하라”는 지시문은 잘못된 지시문으로 학생들에게 로그(log)를 마치 문자처럼 취급하게 하는 오류를 범할 수 있다. 그리고 세 교과서 모두 “간단히 하여라.”고 표현하고 있다. 그런데 로그를 취한 “수”를 간단히 한다는 이런 지시문도 문제가 있다고 본다. 위의 예는 로그를 취한 “수”를 로그의 성질을 이용하여 곱셈과 나눗셈으로 계산하는 것이기 때문에 “다음을 계산하시오”라는 지시문이 가장 적합하다고 본다. 따라서 이러한 문제점들을 해결할 수 있는 교수-학습 방법이 앞에서 언급한 상용로그표와 이 표의 그래프를 활용하고, 학생들의 기존 지식인 지수법칙과의 밀접하고 빈번한 연결을 경험하는 것이라고 본다.

5. 밑의 변환 공식

현행 교과서에서 밑의 변환에 대한 지도 내용을 살펴보면 <그림 III-5>과 같이 지수법칙을 이용하여 밑의 변환 공식이 성립함을 형식화하여 보이고 몇 가지 연습문제를 다루는 정도이다. 하지만 “왜 밑을 변환해야 하는가?”라는 궁극적인 질문에 대한 답은 교과서에 전혀 제시되어 있지 않다. 앞에서 언급한 것처럼 상용로그를 지

도하기 전에 로그의 성질을 지도하기 때문에 모든 지도 내용과 방법이 로그의 성질을 적용하도록 되어 있어 밑의 변환 목적을 깨닫기에는 부족하다.

<p>로그 $\log_a b$를 1이 아닌 양수 c를 밑으로 하는 로그로 바꾸어 보자. $\log_a b = x, \log_c a = y$라고 하면 $b = a^x, a = c^y$이므로 $b = a^x = (c^y)^x = c^{xy}$ 로그의 정의에 의해 $xy = \log_c b$ $\therefore \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$ $a \neq 1$이므로 $\log_c a \neq 0$이고 양변을 $\log_c a$로 나누면 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (양승갑외, 2010, p.85)</p>	<p><보기> $\log_5 3 \cdot \log_3 25$를 밑의 변환 공식을 적용하여 간단히 하면 $\log_5 3 \cdot \log_3 25 = \log_5 3 \cdot \frac{\log_5 5^2}{\log_5 3} = 2$ (양승갑외, 2010, p.85)</p> <p><보기> $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$ (이준열외, 2010, p.92)</p>
---	--

<그림 III-5> 교과서의 밑의 변환 공식 제시와 보기 문제

로그에서 밑을 변환해야 할 필요성은 밑을 변환하지 않을 경우 모든 밑에 대하여 상용로그표와 같은 각각의 밑에 대한 로그표를 만들어야 한다는 불편함이 생긴다. 밑의 변환은 밑이 서로 다른 로그 사이에 존재하는 관계성의 파악이라는 중요한 대수적 사고가 숨어 있으며 이런 사고가 지도 내용에서 나타나도록 해야 할 것이다.

밑이 10인 상용로그표가 있으므로 이를 이용하여 밑이 2인 로그값을 계산할 수 없을까는 자연스러운 발상일 것이다. 즉 \log_{10} 과 \log_2 사이에는 어떤 관계가 있을까? 이들의 관계를 알 수 있도록 먼저 이들 각각의 정의를 적어본다.

$x > 0$ 일 때, $y = \log_{10}(x)$ 은 $x = 10^y$ 이다.
 $x > 0$ 일 때, $y = \log_2(x)$ 은 $x = 2^y$ 이다.

\log_{10} 과 \log_2 사이의 관계를 파악하는 것은 $\log_2(x)$ 의 값을 상용로그를 이용해서 구하는 것과 같다. 간단한 $2 = 10^\alpha$ 를 α 에 대해 풀어보면 $\alpha = \log_{10}(2) = 0.301$ 이므로 $2 = 10^{0.301}$ 이다. $2^{0.5}, 2^2, 2^{\sqrt{2}}, 2^5 \dots$ 등을 10^α 로 나타내기 위해서는 $\log_2(x)$ 를 $x = 2^y$ 으로 변환하여 계산하면 다음과 같다.

$x = 2^y = (10^\alpha)^y = 10^{\alpha y}$ ($2 = 10^\alpha$ 이므로)
 $\alpha y = \log_{10}(x)$
 양변을 α 로 나누면

$$y = \frac{\log_{10}(x)}{\alpha} = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)}$$

$$\therefore \log_2(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)}$$

그리고 이 공식을 다른 밑으로 일반화시켜 보면 $\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)}$ 가 되고, 상용로그가 아닌 밑을 사용하

는 식으로 일반화시키면 $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ (단, $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0$)이다.

이제 이 변환 공식을 사용하여 이미 알려진 몇 가지 값을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \log_2(8) &= \frac{\log_{10}(8)}{\log_{10}(2)} = \frac{0.903}{0.301} = 3 \\ \log_2(16) &= \frac{\log_{10}(16)}{\log_{10}(2)} = \frac{\log_{10}(1.6 \times 10)}{\log_{10}(2)} = \frac{\log_{10}(1.6) + 1}{\log_{10}(2)} = \frac{0.204 + 1}{0.301} = \frac{1.204}{0.301} = 4 \\ \log_2(64) &= \frac{\log_{10}(64)}{\log_{10}(2)} = \frac{\log_{10}(6.4 \times 10)}{\log_{10}(2)} = \frac{\log_{10}(6.4) + 1}{\log_{10}(2)} = \frac{0.806 + 1}{0.301} = \frac{1.806}{0.301} = 6 \\ \log_3(9) &= \frac{\log_{10}(9)}{\log_{10}(3)} = \frac{0.954}{0.477} = 2 \\ \log_3(27) &= \frac{\log_{10}(27)}{\log_{10}(3)} = \frac{\log_{10}(2.7 \times 10)}{\log_{10}(3)} = \frac{\log_{10}(2.7) + 1}{\log_{10}(3)} = \frac{0.431 + 1}{0.477} = \frac{1.431}{0.477} = 3 \\ \log_5(125) &= \frac{\log_{10}(125)}{\log_{10}(5)} = \frac{\log_{10}(1.25 \times 10^2)}{\log_{10}(5)} = \frac{\log_{10}(1.25) + 2}{\log_{10}(5)} = \frac{0.097 + 2}{0.699} = \frac{2.097}{0.699} = 3 \end{aligned}$$

밑을 다르게 해서 계산한 이들 결과를 다시 적어보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \log_2(8) &= \log_2(2^3) = 3 \\ \log_2(16) &= \log_2(2^4) = 4 \\ \log_2(64) &= \log_2(2^6) = 6 \\ \log_3(9) &= \log_3(3^2) = 2 \\ \log_3(27) &= \log_3(3^3) = 3 \\ \log_5(125) &= \log_5(5^3) = 3 \end{aligned}$$

이로부터 현행 교과서에 제시되어 있는 아래의 로그의 지수에 대한 성질을 유도할 수 있다.

$$\log_a(M)^k = k \log_a(M)$$

이 성질은 다음과 같은 간단한 예를 통해서도 확인할 수 있다. $\log_{10}(2) = 0.3010$ 일 때 $\log_{10}(32)$ 의 값을 구하는 과정을 살펴보면 다음 세 가지 방법이 가능하다. <방법1>은 이미 이 성질을 사용하고 있고, <방법2>는 상용로그표를 사용하는 방법이다. 본 연구에서는 <방법3>에 중요성을 두고 설명하고자 한다. <방법3>은 로그의 지수에 대한 성질이 성립하는 이유를 가장 잘 보여주고 있다.

<방법1>

$$\log_{10}(32) = \log_{10}2^5 = 5 \log_{10}(2) = 5 \times 0.3010 = 1.5050$$

<방법2>

$$\begin{aligned}\log_{10}(32) &= \log_{10}(3.2 \times 10) = \log_{10}(3.2) + \log_{10}(10) \\ &= 0.505 + 1 = 1.5050\end{aligned}$$

<방법3>

$$\begin{aligned}\log_{10}(32) &= \log_{10}2^5 = \log_{10}(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \\ &= \log_{10}(2) + \log_{10}(2) + \log_{10}(2) + \log_{10}(2) + \log_{10}(2) \\ &= 5\log_{10}(2) = 5 \times 0.3010 = 1.5050\end{aligned}$$

<방법3>을 사용해서 <그림 III-5>의 교과서 <보기> 중 한 개 풀이를 다시 적어보면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\frac{\log_2(2^3)}{\log_2(2^2)} &= \frac{\log_2(2 \times 2 \times 2)}{\log_2(2 \times 2)} = \frac{\log_2(2) + \log_2(2) + \log_2(2)}{\log_2(2) + \log_2(2)} \\ &= \frac{3\log_2(2)}{2\log_2(2)} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

이 예가 단순하면서도 중요한 이유는 지수법칙과 로그 성질 사이의 관계를 잘 활용하고 있기 때문이다. 따라서 교과서에서 이 성질을 지도할 때 단순히 기호를 사용한 형식적 입증은 먼저 보이고 연습문제를 사용해서 이를 연습하는 방식이 아니라 이런 구체적인 다양한 예를 사용해서 추측을 하고 이 추측을 형식적으로 입증하는 방식의 지도가 필요할 것으로 본다.

또한 밑의 변환 공식 $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ 을 적용하면 밑이 서로 다른 두 로그의 곱에 대한 성질도 발견해 낼 수 있다. 밑이 각각 a , b 인 두 로그 $\log_a(b)$ 와 $\log_b(c)$ 를 곱해보자. 밑의 변환 공식을 사용하면 $\log_b(c) = \frac{\log_a(c)}{\log_a(b)}$ 이므로 아래와 같다.

$$\begin{aligned}\log_a(b) \times \log_b(c) &= \log_a(b) \times \frac{\log_a(c)}{\log_a(b)} = \log_a(c) \\ \therefore \log_a(b) \times \log_b(c) &= \log_a(c)\end{aligned}$$

위에서 논의한 것을 보면 밑의 변환 공식은 로그계산에서 상당히 중요한 성질로 이로부터 여러 가지 다른 성질을 유도해낼 수 있음을 알 수 있다. 즉 이러한 지도 내용의 구성은 수학교육 이론에서 언급한 절차적 지식을 관계성이 풍부한 개념적 지식의 습득을 가능하게 할 것으로 본다. 따라서 현행 교과서에서 이 성질을 다룰 때 이런 중요성을 조금 더 심도 있게 언급하는 것이 필요할 것으로 본다.

IV. 결 론

학교수학의 교수-학습에서 상당한 어려움이 있는 것으로 알려진 로그의 교수-학습 방법에 대해 고찰하고 이로부터 시사점을 제시하기 위하여, 수학 개념에 대한 학생 개인의 의미나 이해 형성이 가능한 반영적 추상화 활동 그리고 개념적 지식과 절차적 지식의 관점에서 본 연구를 수행하였다. 이를 위하여 로그 개념의 발생 과정과 로그계산자에 관련된 수학사를 살펴보고, 현행 고등학교 수학교과서 3종을 분석하여 교수-학습 방법의 문제점

을 조사하였다. 본 연구의 이러한 결과로부터 다음과 같은 로그의 교수-학습 방법에 대한 제언과 시사점을 얻을 수 있었다.

첫째, 로그의 지도목적이 단순히 로그값을 구하는 것이 아니라 궁극적으로 로그함수를 활용한 문제해결에 있으므로 함수 관점에서 로그 개념을 도입하는 것이 교수-학습면에서 더 효율적이고 연계성이 있다고 본다. 물론 이를 위해서는 역함수를 먼저 지도해야 한다는 주장도 가능하겠지만, 본 연구에서 제시했듯이 중학교에서 배운 간단한 역대응만 이용하더라도 충분히 학생들이 지수의 성질을 확장해서 로그 개념을 학습할 수 있을 것으로 생각한다.

둘째, 상용로그를 이용한 로그계산 지도가 먼저 이루어지는 것이 좋다고 본다. 지금처럼 로그 개념과 정의를 도입하고 바로 로그 성질을 너무 성급하게 지도하는 것은 학생들이 이 새로운 개념과 정의를 내면화하고 인지적 조작의 대상으로 대상화할 수 없기에는 부족한 양의 경험이라고 본다. 따라서 기호화와 형식화에 의한 성급한 지도를 벗어나서 좀 더 구체적인 계산으로부터 로그 성질을 유도하는 활동을 하기 위해서는 상용로그와 상용로그표를 이용하는 지도 내용을 먼저 가르치는 것이 더 효율적이고 학습면에서 추측과 형식화라는 대수적 사고를 신장할 수 있는 방안이라고 생각한다.

셋째, 현행 수학교과서처럼 로그를 취한 수의 사칙연산을 로그 성질을 적용하여 연습하는 문제의 제시가 아니라 복잡하면서 아주 큰 수나 작은 수의 사칙연산 문제를 제시하고 이를 로그를 사용하여 계산함으로써 그 편리함과 간편함을 알도록 지도해야 할 것이다. 이를 위하여 로그계산자를 활용한 직접 활동의 경험뿐만 아니라 계산기를 활용하여 수계산과 로그계산의 차이와 정확성의 비교를 알아보는 활동이 도움이 될 것으로 본다.

넷째, 상용로그를 밑으로 취하는 예를 먼저 제시해야 한다. 현행 수학교과서의 대부분의 예를 보면 밑으로 2, 3, 5, 7 등을 취하고 있다. 상용로그를 먼저 사용한 수학의 역사적 사실에도 불구하고, 교과서 순서에 따라 상용로그가 뒤에 나오기 때문에 이런 밑을 사용하고 있는 것으로 추측된다. 결국 이것은 이들 밑에 대한 로그표가 교과서에 제시되어 있지 않기 때문에 인위적이고 조잡한 로그계산 문제뿐만 아니라 로그의 성질을 절차적으로 적용하는 연습에 불과하게 되는 원인이라고 본다. 따라서 학생들이 10의 거듭제곱과 이를 밑으로 사용하는 상용로그에 충분히 익숙해지기 전까지는 다른 수를 사용한 밑을 가진 로그계산은 최소화하는 것이 좋다고 본다.

다섯째, 현행 수학교과서에서 로그를 이용한 계산문제를 “다음 식을 간단히 하여라.” 또는 “다음을 간단히 하여라.”고 표현하고 있는데, 이것은 log를 문자로 보지 않은 한 이를 “식”으로 표현하는 것은 잘못된 표현이라고 보며, 또한 문자식 계산이 아닌 수계산 문제를 “간단히 한다.”고 하는 것도 틀린 표현이라고 본다. 따라서 로그를 이용한 계산문제는 “다음을 계산하여라.” 또는 “다음 로그계산을 하여라.”로 표현하는 것이 옳다고 본다.

마지막으로, 현행 교과서에서는 $\log_{10} 21$ 처럼 로그 기호와 수 사이에 괄호가 없다. 그런데 log 기호와 21 사이에 괄호가 있는 $\log_{10}(21)$ 로 지도하는 것이 로그를 함수로 지도하는 후속 내용의 이해를 위해 적합할 것으로 본다. 로그의 지도 목적이 단순히 수계산 수준에 머물러 있다고 가정하면 기존의 방식에 문제가 없다고 할 수 있다. 하지만 후속 내용이나 다른 분야의 응용에서 볼 때 로그를 이용한 단순한 수계산보다 로그함수를 이용한 학습이 더 많은 양을 차지하고 있다. 함수를 $f(x)$ 라고 표현하듯이 로그를 함수의 관점에서 지도할 것이므로 $\log(x)$ 라고 표현하는 것이 x 라는 수를 로그로 변환시켰다는 의미를 더욱 충실히 전달할 수 있으며, 또한 로그 함수의 지도 관점에서 바람직하다고 본다. 그리고 이렇게 지도한 후 학생들이 log 기호와 수 사이의 관계를 이해하고 사용하는 충분한 경험이 쌓이게 되며 지금처럼 괄호를 생략한 기호를 사용하도록 유도하는 것이 바람직할 것이다.

참 고 문 헌

- 양승갑 · 윤갑진 · 신준국 · 양경식 · 주정오 · 성덕현 외 (2010). 고등학교 수학 I. 서울: 금성출판사.
- 이동원 · 유병훈 · 김훈 · 안경호 · 박미화 · 정지연 외 (2010). 고등학교 수학 I. 서울: 범문사.
- 이준열 · 최부림 · 김동재 · 서정인 · 전용주 · 김홍섭 (2010). 고등학교 수학 I. 서울: 천재교육.
- Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*(3rd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Copeland, T. (1992). *Maths and the historical environment*. English Heritage.
- Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. Springer Verlag.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*(pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbau.
- Hull, T. H., Balka, D. S., & Miles, R. H. (2011). *Visible thinking in the K-8 mathematics classroom*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kelles, L. M., Kern, W., & Bland, J. R. (1943). *The Log-Log duplex slide rule: A manual*. Keuffell & Esser Co.
- Land, F. (1963). *The language of mathematics*. Garden City, NY: Doubleday & Company.
- Nardi, E., Jaworski, B., & Hegedus, S. (2005). A spectrum of pedagogical awareness for undergraduate mathematics: From "tricks" to "techniques." *Journal for Research in Mathematics Education*, **36**(4), 284-316.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Piaget, J. (1950). *The psychology of intelligence*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Star, J. R. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, **36**(5), 404-411.
- von Galsersfeld, E.(1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.
- Web Site <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html> (History of Mathematics at St Andrew's University)

The Analysis of the Way of Teaching and Learning Logarithms with a Historical Background in High School Mathematics

Cheong Soo Cho

Yeungnam University

214-1 Dae-dong, Gyeongsan, Gyeongbuk 712-749, Republic of Korea

E-mail : chocs@yu.ac.kr

The purpose of this paper is to analyze the way of teaching and learning logarithm in high school mathematics and provide practical suggestions for teaching logarithms. For such purpose, it reviewed John Napier's life and his ideas, the effect of logarithms on seventeenth century science, and a logarithmic scale and its methods of calculation. With this reviews, introduction of logarithms with function concept, logarithmic calculation with common logarithms, and the formula of converting to other logarithmic bases were reviewed for finding a new perspective of teaching and learning logarithms in high school mathematics. Through such historical and pedagogical reviews, this paper presented practical suggestions and comments about the way of teaching and learning logarithms in high school mathematics.

* ZDM Classification : D40

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90

* Key Words : logarithms, logarithmic calculation, logarithmic scale, teaching method of logarithms