

구조적 동형을 활용한 순열과 조합의 교수·학습 효과

김 원 경 (한국교원대학교)

홍 갑 룡 (구미고등학교)

이 중 학 (송촌고등학교)

본 연구는 구조적 동형을 활용한 순열과 조합의 교수·학습이 학생들의 학업 성취도에 효과가 있는지를 살펴보고 문제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 특징이 무엇인지를 분석하는 데 그 목적이 있다. 이를 위하여 본 연구에서는 S 고등학교 2학년 2개 반 학생들을 대상으로 실험반에는 4차시의 구조적 동형을 활용한 수업을, 비교반에는 4차시의 기존의 교과서 중심의 수업을 실시하였다. 그 결과, 구조적 동형을 활용한 수업은 기존의 교과서 중심의 수업보다 학업 성취도 향상에 효과가 있는 것으로 나타났다. 한편, 실험반의 5명을 대상으로 성취도 검사지를 분석하고 면담한 결과, 학생들은 순열과 조합 문제에서 '서로 다른', '서로 같은' 과 같은 표현이 있으면 구조적 동형을 활용하여 문제를 해결하는 것이 더 쉽다고 하였고, 공·상자 모델에서는 공과 상자의 구별 여부만 판단하면 되므로 기존의 방법보다 더 많이 사용한다고 하였다. 또, 구조적 동형을 이해하는 학생들은 문제를 해결할 때 공·상자 모델과 기존의 방법 중에서 각 문항에 적절한 풀이 방법을 스스로 택하여 해결하는 것으로 나타났다.

I. 서 론

순열과 조합 문제는 수학적 표현력, 논리적 정당화, 추상화, 일반화 등의 수학적 사고 능력을 향상시키고, 수학의 여러 분야를 연결시켜 문제의 구조를 파악하는 능력과 사고의 유연성을 길러주는 좋은 소재이다(Sriraman & English, 2004). 그러나 순열과 조합은 학생들이 가장 어려워하는 수학 단원 중의 하나이고, 교사들도 가르치기 어려워하는 단원이다(김원경·문소영·변지영, 2006). 학생들은 순열과 조합 계산 공식은 알고 있지만 공식에 약간만 변형된 문제가 나와도 어려워한다. 이것은 순열과 조합에 대한 확실한 개념 이해가 부족하고, 문제의 본질을 정확하게 파악하지 못했기 때문이다.

순열과 조합 문제는 선택, 배열, 분할의 세 가지 유형으로 분류될 수 있다. 대다수의 교과서에서 선택 문제는 조합으로, 배열 문제는 순열로 계산하여 풀이하고 있다. 그러나 순열과 조합 문제는 다양한 형태로 진술될 수 있다. 문맥상론 다르지만 본질적으로 수학적 구조가 동형이거나 유사한 문제들이 많다. NCTM(2000)은 학생들이 수학적 개념을 이해할 때, 수학적 아이디어 사이의 연결성과 관계를 파악하는 것이 중요하다고 하였다.

순열과 조합 문제는 선택·배열의 개념이 아닌 공·상자 모델로도 일관성 있게 설명이 될 수 있다. 예를 들어 "4명의 후보 중 3명의 위원을 선택하는 방법의 수를 구하여라."라는 선택 문제는 "구별이 안 되는 공 3개를 4개의 서로 다른 상자에 기껏해야 한 개씩을 넣는 방법의 수를 구하여라" 라는 공·상자 모델과 구조적으로 동형이다. English & Halford (1995)는 학생들이 외형적으로 서로 다르게 진술된 문제 상황에서 구조적으로 동형인 관계를 찾는 활동은 수학에 대한 이해를 풍부하게 해줄 수 있는 중요한 사고 과정일 뿐만 아니라 문제 해결의 도구 이상의 가치를 가지고 있기 때문에 학교 교육에서 이와 같은 활동을 강조해야 한다고 하였다. 이주영·김

* 접수일(2011년 8월 8일), 심사(수정)일(1차: 2011년 9월 8일, 2차: 9월 22일), 게재확정일(2011년 9월 26일)

* ZDM분류 : D54

* MSC2000분류 : 97D50

* 주제어 : 구조적 동형, 순열과 조합, 공·상자 모델.

서령·박혜숙·김완순(2006)은 학생들이 선택·배열의 개념과 공·상자 모델 사이의 구조적 동형을 이해하고, 두 진술 방법 사이의 관계를 스스로 연결해 보도록 하는 사고를 경험하는 것이 중요하다고 하면서 이와 같은 교수-학습 방법은 순열과 조합 문제 해결력에 큰 도움을 줄 수 있다고 하였다.

이에 본 연구는 순열과 조합의 개념을 구조적 동형인 공·상자 모델 방식으로 교수·학습할 때, 학생들이 학업 성취도면에서 효과가 있는지를 살펴보고, 문제 해결 과정에서 나타나는 특징이 무엇인지를 분석하기 위해서 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

(1) 순열과 조합의 구조적 동형을 활용한 교수·학습 집단과 기존의 교과서 중심의 교수·학습 집단은 학업 성취도에 있어서 차이가 있는가?

(2) 구조적 동형을 활용한 순열과 조합 문제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 특징은 무엇인가?

II. 이론적 배경

1. 순열과 조합 문제의 진술 유형

Dubois(1984)는 순열과 조합 문제를 문제 내에 포함된 행위인 선택(selection), 배열(distribution), 분할(partition)의 세 가지 유형으로 분류하였고, Batanero, Navarro-Pelayo, & Godino(1997)은 각 유형별 문제를 다음과 같이 구체적으로 제시하였다.

(1) 선택 문제 : n 개의 사물들 중에서 r 개를 택하는 것이다.

순열과 조합 문제에서 ‘꺼내다’, ‘선택하다’, ‘뽑다’ 등의 표현이 있으면 선택 문제로 해석할 수 있다. 예를 들어, ‘주머니에 4개의 숫자 1, 2, 3, 4가 각각 적힌 공이 있다. 이 주머니에서 3개의 공을 꺼내는 방법의 수는 모두 몇 가지인가?’ 라는 문제는 선택문제이다.

일반적으로, ‘서로 다른 n 개의 사물들 중에서 서로 다른 r 개를 뽑는 방법의 수는 구하여라.’ 라는 조합문제와 ‘서로 다른 n 개의 사물들 중에서 중복 허용하여 r 개를 뽑는 방법의 수를 구하여라.’ 라는 중복조합 문제는 선택 문제이다.

(2) 배열 문제 : r 개의 사물들을 서로 다른 n 개의 상자 또는 자리에 배치, 배열하거나 분배하는 것이다. 순열과 조합 문제에서 ‘배열하다’, ‘배치하다’, ‘나열하다’, ‘분배하다’, ‘넣다’ 등의 표현이 있으면 배열문제로 해석할 수 있다. 예를 들어, ‘4개의 숫자 1, 2, 3, 4을 배열하여 네 자리 자연수를 만드는 방법의 수는 모두 몇 가지인가?’ 라는 문제는 배열문제이다.

일반적으로, ‘서로 다른 n 개의 사물들 중에서 r 개를 뽑아 배열하는 방법의 수를 구하여라.’라는 순열문제와 ‘서로 다른 n 개의 사물들 중에서 중복 허용하여 r 개를 뽑아 배열하는 방법의 수를 구하여라.’ 라는 중복순열 문제는 배열문제이다. 그러나 ‘서로 같은 r 개의 사물들을 서로 다른 n 개의 상자에 넣는 방법의 수를 구하여라.’라는 배열문제는 ‘서로 다른 n 개의 사물들 중에서 중복을 허용하여 r 개를 뽑는 방법의 수는 구하여라.’ 라는 선택 문제로 바꾸어 진술할 수 있다. 따라서 순열과 조합 문제는 그 유형이 고정되어 있는 것이 아니라 문제의 진술 방법에 따라 바뀔 수 있다.

(3) 분할 문제 : 서로 다른 r 개의 사물들을 서로 다른 n 개의 부분집합으로 나누는 것이다.

순열과 조합 문제에서 ‘나누다’, ‘분할하다’, 등의 표현이 있으면 분할 문제로 해석할 수 있다. 예를 들어, ‘7명이 2대의 승용차에 나누어 타는 방법은 모두 몇 가지인가?’라는 문제는 분할 문제이다.

일반적으로, ‘서로 다른 r 개의 사물들을 서로 다른 n 개의 부분집합으로 나누는 분할 문제는 서로 다른 r 개의 사물들을 서로 다른 n 개의 상자에 넣는 배열 문제에서 상자를 무시하고 사물들이 나누어진 결과만 보는 것과 같다. 따라서 분할 문제와 배열 문제 사이에는 일대일대응이 존재한다.

순열과 조합 문제에서 진술의 유형은 학생들의 문제 해결에 영향을 끼치는 주요한 변인이다(Batanero, et al., 1997). 따라서 이미 알고 있는 문제와 구조는 같지만 진술 유형이 다른 문제의 구성 요소를 분석하여 같은 역할을 하는 요소 사이의 대응을 찾을 수 있으면 혼동을 일으키지 않고 주어진 문제를 해결할 수 있다(이주영·김서령·박혜숙·김완순, 2006).

2. 공·상자 모델

Roberts(1984)은 학생들이 순열과 조합 문제 해결에서 공·상자 모델이 중요한 역할을 한다고 주장하였다. 상자의 구별 여부와 공의 구별 여부, 그리고 빈 상자가 생길 수 있는지의 여부에 따라 경우의 수가 다른데 이 때, ${}_n P_r$ 은 r 개의 서로 다른 공을 n 개의 서로 다른 상자에 많아야 하나의 공을 넣는 경우이고, ${}_n C_r$ 은 r 개의 같은 공을 n 개의 서로 다른 상자에 많아야 하나의 공을 넣는 경우이다. 공·상자 모델은 상자의 구별 여부와 공의 구별 여부에 따라 <표 II-1>와 같이 선택·배열 모델과 구조적 동형이다.

<표 II-1> 공·상자 모델

	선택·배열 모델	구조적 동형	공·상자 모델
순열 ${}_n P_r$	서로 다른 n 개에서 r ($r \leq n$) 개를 일렬로 배열하기	⇔	서로 다른 n 개의 상자에 서로 다른 공 r ($r \leq n$)개를 많아야 한 개씩 넣기
중복순열 ${}_n I_r$	서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 일렬로 배열하기		서로 다른 n 개의 상자에 서로 다른 공 r 개를 넣기
조합 ${}_n C_r$	서로 다른 n 개에서 r 개를 택하기		서로 다른 n 개의 상자에 구별이 안 되는 공 r 개를 많아야 한 개씩 넣기
중복조합 ${}_n H_r$	서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하기		서로 다른 n 개의 상자에 구별이 안 되는 공 r 개를 넣기

3. 선행연구의 고찰

지금까지 순열과 조합의 개념 지도 방안에 대하여 연구한 몇 편의 국내 논문을 살펴보면 다음과 같다.

이지현·이정연·최영기(2005)는 순열과 조합의 연산과 문제 유형이 난이도에 미치는 영향을 분석하고, 문제 이해과정의 오류를 분석하였다. 그 결과 연산과 문제의 유형이 난이도에 영향을 미치고, 선택문제, 배열문제, 분할 문제의 순으로 학생들의 정답률이 높다고 하였다.

이주영·김서령·박혜숙·김완순(2006)은 학생들이 조합과 순열의 개념을 혼동함을 지적하고, 문제의 진술 유형은 다르지만 문제구조는 동형인 문제 상황이 주어질 때, 학생들이 문제의 요소 사이의 대응을 어떻게 찾아내는지 알아보았다. 그 결과, 학생들은 선택 유형 사이의 대응을 찾는 과정이 배열 유형 사이의 대응을 찾는 과

정보보다 쉬웠고, 선택 유형과 배열 유형의 조합 문제 사이의 구조적 동형을 이해하는 것이 조합 문제 해결에 도움이 된다고 하였다.

권혜진(2008)은 고등학교 수학 I 교과서 6종을 분석하여 순열과 조합의 개념 정의와 문제 유형의 비중을 살펴보고 설문조사를 통해서 순열과 조합 문제의 문제해결 전략을 조사하였고, 문항 간 동형 관계에 대한 인식조사를 하였다. 그 결과 순열과 조합 문제 중에서 가장 높은 비중을 차지하는 것은 선택 유형과 배열 유형이었고, 분할 유형과 선택+배열 유형은 극히 일부였다고 하였다.

김미정·김용구·정인철(2009)은 nC_r 을 영상적 표현 방법으로 이해하고 있는 학생들에게 개념 이해가 선행되지 않는 nC_r 을 바로 도입하는 것은 위험하다고 하면서 순열과 조합은 '수세기'에 대한 비형식적 선행 지식에서 출발하여 '수세기 형식화' 단계로 넘어가야 하는데 이때 '수세기'와 관련하여 지도할 수 있는 교수학습 방법으로 발견학습법을 제시하였다.

이상에서와 같이 순열과 조합 문제에 대한 여러 가지 연구가 있었음에도 구조적 동형에 관한 교수-학습 방안 연구는 이주영·김서령·박혜숙·김완순(2006) 뿐이었다. 그러나 이 연구도 조합에 관한 구조적 동형만을 다루었을 뿐 중복순열과 중복조합까지 다루지는 않았다. 이에 따라 본 연구에서는 순열과 조합 전체에 대하여 구조적 동형을 활용한 교수·학습이 학생들의 학업 성취도에 효과가 있는지를 알아보고, 문제 해결 과정의 특징을 분석하고자 한다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구대상

본 연구에서는 순열과 조합의 구조적 동형을 활용한 수업이 학생들의 학업 성취도에 효과가 있는지를 분석하기 위하여 연구자가 실험이 가능한 D광역시 일반계 S고등학교 2학년의 2개 반 학생들을 연구대상으로 선정하고 2개 반 중에서 임의로 한 반을 실험 집단(35명)으로, 다른 한 반을 비교 집단(34명)으로 구성하였다.

연구 대상 학생들은 고등학교 1학년에서 순열과 조합에 대한 기본 개념을 학습했고, 이들 중 일부는 사교육을 받은 경험이 있다. 학생들의 평균 수학 성적은 전국적으로 중상 수준이고, 부모들의 학력 및 경제적 수준은 중산층에 속한다고 할 수 있다.

한편, 순열과 조합 문제 해결 과정에서 나타나는 특징을 분석하기 위해서 실험 집단의 학생들 중에서 본 연구에 자발적으로 참여하기를 원하는 학생 5명을 선정하였다. 이 학생들은 1학기 기말고사 내신등급이 2~6등급인 학생들으로써, 수학담당 교사의 수업을 통해 관찰한 학생들의 정의적 특성은 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 연구대상의 특성

이름 (가명)	정의적 특성	인지적 특성	
		사전성취도 검사	내신 등급
A	수업에 성실하게 참여하며 학습의욕이 높다. 수학 과목에 대한 흥미가 높으며 교사의 설명을 경청하고, 자신의 의견을 논리적으로 제시하는 능력이 우수하다.	8/10	2
B	수업에 성실하게 참여하며 자기주도적으로 과제를 해결한다. 수학과목에 대한 흥미와 자신감이 높고 수업 중에 자신의 의견을 제시하는 데 적극적이다.	7/10	3
C	수업에 성실하게 임하지만 수학에 대한 흥미도가 낮다. 수학 과목에 대한 자신감이 없고 불안해하며 자신의 의견을 제시하는 데 소극적이다.	4/10	6
D	수학 과목에 흥미를 가지고 있으며 수업에 열심이다. 수학을 잘하기를 바라나 성적이 안 나와 고민한다. 자신의 의견을 논리적으로 제시하는 능력이 부족하다.	5/10	5
E	수학 과목에 대하여 흥미가 높으며 자신감이 있다. 자신의 의견을 논리적으로 제시하는 능력도 있다. 그러나 수학 성적이 오르지 않아 실망한다.	8/10	4

2. 연구설계

본 연구의 연구문제 1을 해결하기 위하여 실험 집단과 비교 집단의 학업 성취도 차이를 분석하고자 이질 통제 집단 설계(nonequivalent control group design)를 적용하였다. 구체적 실험 설계의 모형은 <표 III-2>와 같다.

<표 III-2> 실험설계

집단	사전검사	실험 수업	사후검사
실험 집단	사전 성취도 검사지	구조적 동형을 활용한 교수·학습	사후 성취도 검사지
비교 집단		기존의 교과서 중심의 교수·학습	

연구문제 2를 해결하기 위하여 연구 대상 학생 5명을 면담하였다. 면담은 반구조화 면담이었으며 주로 다음과 같은 내용으로 면담하였고, 면담 내용은 모두 녹취되었다.

- 사후 성취도 검사지에서 순열·조합 문제를 접근하는 방법
- 사후 성취도 검사지에서 선택·배열 모델과 공·상자 모델에서 요소 사이의 대응을 찾는 과정
- 구조적 동형을 활용하여 문제를 해결할 때의 장단점

3. 학업 성취도 검사 도구

가. 사전 성취도 검사지

본 연구에서는 실험 수업 이전에 실험 집단과 비교 집단 사이에 학업성취도가 서로 동일한지를 알아보기 위하여 사전 성취도 검사를 실시하였다.

사전 성취도 검사지는 고등학교 수학 익힘책 1(이제학 외 6인, 2008)에 있는 경우의 수에 관한 10개의 문항(경우의 수 문항 4개, 순열 문항 3개, 조합 문항 3개)를 발췌하여 5지 선다형으로 구성하였다. 이 검사지를 D광역시 S고등학교 2학년 A반 학생들을 대상으로 예비 검사한 결과 평균이 10점 만점에 6.27점이었고,

Cronbach α 계수는 0.791로써 신뢰도는 양호하게 나타났다. 그러나 4번 문항의 정답률이 낮아 사전 성취도 검사지에서는 4번 문항을 좀 더 쉬운 문항으로 수정·보완하였다.

나. 사후 성취도 검사지

본 연구에서는 실험수업 이후에 실험 집단과 비교 집단 사이에 학업성취도의 차이를 알아보기 위하여 사후 성취도 검사를 실시하였다. 사후 성취도 검사는 기억 및 연습효과를 줄이기 위하여 사전 성취도 검사 2주 후에 실시하였고 문항도 다르게 구성하였다. 사전·사후 성취도 검사는 담임교사의 감독 하에 50분간 진행되었다.

사후 성취도 검사지는 이지현 외 3인 (2005)이 사용한 지필검사 10개 문항을 수정 보완하고, 중복조합 관련 3문항을 추가하여 구성하였다. 이 검사지를 D광역시 S고등학교 2학년 B반 학생들을 대상으로 예비 검사한 결과 평균은 13점 만점에 3.94점이었고, Cronbach α 계수는 0.825로써 신뢰도는 양호한 것으로 나타났다. 그러나 8번 문항의 정답률이 너무 낮아 사후 성취도 검사지에서는 8번 문항을 삭제하였고, 13번 문항도 쉽게 수정·보완하였다. 사후 성취도 검사지는 단답형 12문항으로 문항의 유형은 <표 III-3>과 같다.

<표 III-3> 사후 성취도 검사지

계산 \ 진술 유형	배열	선택	분할
순열	${}_{10}P_3$ (1번)	${}_{10}P_3$ (5번)	${}_6P_6$ (8번)
조합	${}_{10}C_7$ (3번)	${}_5C_3$ (12번)	${}_8C_4$ (9번)
중복순열	${}_2P_5$ (6번)	${}_4P_3$ (10번)	${}_3P_4$ (4번)
중복조합		${}_4H_3$ (2번), ${}_3H_{30}$ (11번)	${}_3H_{30}$ (7번)

4. 실험수업

실험 집단과 비교 집단의 실험수업은 하루에 한 시간씩 일주일 동안 4차시를 실시하였다. 두 집단의 실험 수업은 담당 수학교사가 진행하였다. 담당 수학교사는 교육경력이 12년이고, 석사학위 소지자로서 교사 변인에 의한 수업 차이는 그리 크지 않을 것으로 생각된다. 실험 집단과 비교 집단에서의 실험수업의 절차 및 수업 내용은 <표 III-4>와 같다. 구체적인 실험수업의 학습지도 방안은 부록에 제시하였다.

<표 III-4> 실험수업 내용

차시(수업 내용)	실험집단	비교집단
1차시(순열)	구조적 동형을 활용한 순열 개념 지도 및 문제 풀이	교과서 중심의 순열 개념 지도 및 문제 풀이
2차시(조합)	구조적 동형을 활용한 조합 개념 지도 및 문제 풀이	교과서 중심의 조합 개념 지도 및 문제 풀이
3차시(중복순열)	구조적 동형을 활용한 중복순열 개념 지도 및 문제 풀이	교과서 중심의 중복순열 개념 지도 및 문제 풀이
4차시(중복조합)	구조적 동형을 활용한 중복조합 개념 지도 및 문제 풀이	교과서 중심의 중복조합 개념 지도 및 문제 풀이

5. 자료수집 및 분석 방법

연구문제 1을 해결하기 위한 사전·사후 성취도 검사의 채점은 각 문항별로 풀이가 옳으면 1점, 틀리면 0점을 부여하여 각각 10점과 12점 만점으로 계산하였다.

연구문제 2를 해결하기 위한 질적 자료는 5명의 연구 대상 학생들의 사후 성취도 검사 결과를 바탕으로 면담을 통하여 수집하였다. 면담은 실험수업이 끝난 후에 연구자에 의해 학생 1인당 10여분 정도의 질의 응답식으로 진행되었다. 녹취된 면담 자료는 모두 전사되었고, 이 중에서 학생들의 문제 풀이 과정의 특징이 잘 나타나는 부분을 중점적으로 분석하였다.

IV. 연구 결과

1. 학업 성취도의 향상 효과 분석

본 연구에서는 실험수업 이전에 실험 집단과 비교 집단 사이에 학업성취도가 동일한지를 알아보기 위해서 먼저 사전 성취도 검사를 실시하였다. <표 IV-1>은 사전 성취도 검사 결과이다.

<표 IV-1> 사전 성취도 검사 결과

반	N	M	SD	df	t	p
실험집단	35	6.34	1.984	66	.519	0.606
비교집단	33	6.06	2.487			

* 비교집단의 학생 34명 중에서 1명은 사전 성취도 검사를 하지 않았음.

<표 IV-1>에서 알 수 있듯이 실험 집단과 비교 집단 사이에는 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 학업 성취도에 유의미한 차이가 없는 동일 집단임을 알 수 있다.

다음으로, 실험 수업 이후에 실험 집단과 비교 집단 사이에 학업성취도가 차이가 있는지를 알아보기 위해서 사후 성취도 검사를 실시하였다. <표 IV-2>는 사후 성취도 검사 결과이다.

<표 IV-2> 사후 성취도 검사 결과

반	N	M	SD	df	t	p
실험집단	35	7.46	3.147	67	2.274	0.026
비교집단	34	5.65	3.463			

<표 IV-2>에서 알 수 있듯이 실험 집단과 비교 집단 사이에는 유의수준 $\alpha = 0.05$ 에서 학업 성취도에 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 이 결과로부터 구조적 동형을 활용한 교수·학습은 기존의 교과서 중심의 교수·학습보다 학업성취도 향상에 효과가 있다고 할 수 있다.

한편, 순열과 조합의 연산 유형 별로 실험 집단과 비교 집단 사이에 학업성취도가 차이가 있는지를 알아보기 위해서 사후 성취도 검사를 연산 유형별로 분석한 결과는 <표 IV-3>과 같다.

<표 IV-3> 연산 유형에 따른 학업성취도 검사 결과

연산	반	N	M	SD	df	t	p
${}_n P_r$	실험집단	35	2.57	0.698	67	3.245	0.002
	비교집단	34	1.88	1.038			
${}_n C_r$	실험집단	35	1.83	1.043	67	-.329	0.743
	비교집단	34	1.91	1.055			
${}_n II_r$	실험집단	35	1.69	1.078	67	2.103	0.039
	비교집단	34	1.15	1.048			
${}_n H_r$	실험집단	35	1.37	1.114	67	2.480	0.016
	비교집단	34	0.71	1.115			

<표 IV-3>에서 알 수 있듯이 이 구조적 동형을 활용한 수업은 순열(${}_n P_r$), 중복순열(${}_n II_r$), 중복조합(${}_n H_r$) 유형의 문제에서 성취도 향상에 유의미한 효과가 있는 것으로 나타났다. 그러나, 조합(${}_n C_r$) 유형의 문제에서는 성취도 향상에 효과가 없는 것으로 나타났다. 이것은 학생들이 조합 유형의 문제를 공·상자 모델로 변형하여 푸는 과정에서 공과 상자의 다름 여부에 오류가 발생하였기 때문이다.

한편, 순열과 조합의 진술 유형 별로 실험 집단과 비교 집단 사이에 학업성취도가 차이가 있는지를 알아보기 위해서 사후 성취도 검사를 분석한 결과는 <표 IV-4>와 같다.

<표 IV-4>에서 알 수 있듯이 구조적 동형을 활용한 수업은 배열, 분할로 진술된 문제의 성취도 향상에 유의미한 효과가 있는 것으로 나타났다. 그러나, 선택 진술의 문제에서는 성취도 향상에 효과가 없는 것으로 나타났다. 이 결과는 조합(${}_n C_r$) 유형의 문제에서 성취도 향상에 효과가 없는 것과 일치한다.

<표 IV-4> 진술 유형에 따른 학업성취도 검사 결과

진술	반	N	M	SD	df	t	p
배열형	실험집단	35	2.29	0.926	67	3.292	0.002
	비교집단	34	1.44	1.186			
분할형	실험집단	35	2.43	1.3134	67	2.531	0.014
	비교집단	34	1.68	1.147			
선택형	실험집단	35	2.29	1.202	67	-0.223	0.824
	비교집단	34	2.35	1.300			

다음으로, 실험 집단과 비교 집단의 학생들의 풀이 방식에 따른 문제 해결 성공률을 보면 <표 IV-5>와 같다.

실험 집단의 학생들은 공·상자 모델을 활용한 풀이와 기존의 교과서에서의 풀이 방식에서 자신이 적용할 수 있는 방법을 선택해서 문제를 해결하였는데, 문항 2, 9, 10, 12번을 제외한 나머지 문항에서 공·상자 모델을 활용한 풀이 방식이 기존의 풀이 방식보다 성공률이 높음을 알 수 있다.

<표 IV-5> 실험집단과 비교집단의 문제 해결 성공률

문항 번호	진술 유형	실험집단 성공률(%)		비교집단 성공률(%)	성공률 차이(%)
		공·상자 모델 활용	기존의 방식		
1	배열	88.5 (23/26)	77.8 (7/9)	47.1 (16/34)	38.6
2	선택	54.6 (6/11)	12.5 (3/24)	26.5 (9/34)	-0.7
3	배열	94.7 (18/19)	56.3 (9/16)	58.8 (20/34)	18.3
4	분할	61.9 (13/21)	35.7 (5/14)	14.7 (5/34)	36.7
5	선택	90 (9/10)	88.0 (22/25)	64.7 (22/34)	23.9
6	배열	80 (16/20)	40.0 (6/15)	38.2(13/34)	24.7
7	분할	84 (21/25)	20.0 (2/10)	26.5 (9/34)	39.2
8	분할	100 (13/13)	77.3 (17/22)	76.5 (26/34)	9.2
9	분할	0 (0/6)	48.3 (14/29)	50 (17/34)	-10.0
10	선택	35.7 (5/14)	66.7 (14/21)	61.8 (21/34)	-7.5
11	선택	66.7 (14/21)	14.3 (2/14)	17.6 (6/34)	28.1
12	선택	50 (5/10)	68.0 (17/25)	82.4 (28/34)	-19.5

<표 IV-6>은 공·상자 모델을 활용한 풀이에서 정답률이 떨어지는 문항 2, 4, 9, 10, 11, 12번에 대하여 학생들의 오류를 나타낸다.

<표 IV-6> 공·상자 모델을 활용한 풀이의 오류

문항 번호	오답자수(%)	오류			
		공·상자 모델을 잘못 적용함	공과 상자를 구분 못함	서로 다른 공을 구분 못함	한 상자에 기껏해야 1개 여부를 구분 못함
2	5(45.5)	0	2	3	0
4	8(33.3)	1	5	2	0
9	6(100)	6	0	0	0
10	9(64.3)	2	7	0	0
11	7(33.3)	1	3	2	1
12	5(50)	0	0	3	2
계	35	10(28.6%)	15(42.9%)	7(20%)	3(8.6%)

<표 IV-6>에서 보면 학생들은 공·상자 모델에서 공과 상자를 구분하지 못하는 학생이 42.9%로 가장 많았고, 그 다음으로 공·상자 모델을 잘못 적용한 학생이 28.6%로 많았다. 이것은 학생들이 공·상자 모델에 아직 익숙하지 못하여 나타난 결과로 생각된다. 특히 문항 9는 공·상자 모델을 활용한 학생들이 모두 오류를 범했는데 이것은 답이 단순한 공식 (${}_8P_2$, ${}_8C_2$) 중의 하나일 것으로 예상하고 문항 뒷부분에 제시된 조건을 간과하였기 때문이다. 이와 같이 문제의 전체적인 구조를 보지 못하고 핵심 단어에 의존하여 힌트를 얻어 답을 구하는 전략을 '키워드 전략'이라고 한다(Sowder, 1988). 키워드 전략은 문제의 전체적인 구조 대신에 지엽적인 정보에 집중하게 하기 때문에 문제의 큰 틀을 이해하는 데 방해하는 요소가 된다.

2. 순열·조합 문제 해결 과정에서 나타나는 학생들의 특징 분석

가. 학생 A의 면담 결과

학생 A는 12개의 문항 중 4개의 문항을 공·상자 모델을 활용하여 해결하였고, 나머지 문항을 기존의 방식으로 해결하여 모두 정답을 맞혔다. 다음은 학생 A와의 정답 문항 7번과 6번에 대한 면담 내용이다.

<발췌문 1>

교사 : 7번 문제는 어떻게 해결했니?

학생A: 수학동아리를 서로 다른 3개의 상자, 공학용계산기를 같은 30개의 공, 그리고 한 동아리에 계산기는 여러 개 들어갈 수 있으니까 중복조합인 ${}_3H_{30}$ 으로 생각했어요.

교사 : 어떻게 바로 그런 생각이 떠올랐니?

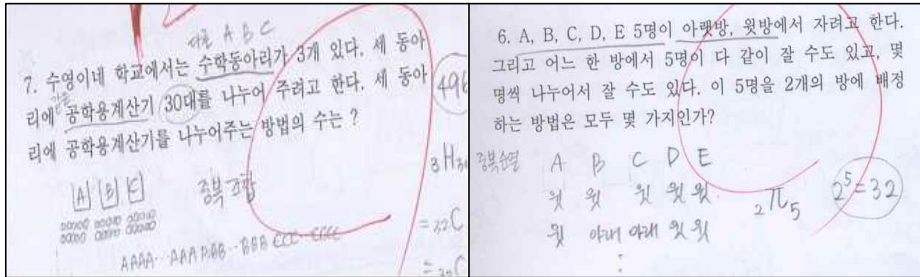
학생A: '다르다', '같다'라는 것이 바로 이해되었고, 무엇이 공, 상자인지 분명했어요.

교사 : 6번 문제는 공·상자 모델을 활용해서 해결하지 않았는데 그 이유가 있니?

학생A: 이걸 그냥 경우의 수로 생각했어요. 한 사람이 들어 갈 수 있는 방이 2개이고, 다섯 사람이니까 2^5 이 되는 거죠.

교사 : 공·상자 모델하고 기존의 방식하고 어떤 것이 더 쉽게 느껴져?

학생A: 문제에 따라 다른 거 같아요, 공과 상자를 구분하고, 같은 공과 다른 공을 쉽게 구별 할 수 있으면 공·상자 모델이 쉬운 것 같아요. 그런데 기존의 방식이 쉬운 것도 있고요.



<그림 IV-1> 학생 A의 공·상자 모델을 활용한 풀이와 기존 풀이 방식

학생 A는 공·상자 모델을 활용하여 문제를 풀 때, 공과 상자의 구분, '서로 다른 공'과 '같은 공' 여부를 구분할 수 있으면 공·상자 모델을 활용한 풀이가 더 쉽다고 하였다. 그러나 몇몇 문항(5, 8, 12번)에 대해서는 공·상자 모델을 활용한 풀이 보다는 기존의 방법이 훨씬 쉽다고 하였고, 또, 몇몇 문항(2, 10, 11번)에 대해서는 공과 상자의 구분, '서로 다른' 여부를 파악하는 것이 어려워서 기존의 방법으로 해결하였다고 하였다. 학생 A는 기존의 풀이 방식과 공·상자 모델을 활용한 풀이 방식을 잘 알고 있기 때문에 각 문항에 적절한 풀이 방법을 스스로 택하여 해결할 수 있었다. 다음 <표 IV-7>은 학생 A의 각 문항에 대한 풀이 결과이다.

<표 IV-7> 학생 A의 풀이 결과

구분		문항 번호	학생 A의 풀이
정답	구조적 동형을 활용한 풀이	1, 3, 4, 7	'서로 다른' 이나 '같은'이 있거나, 공과 상자의 대상, '서로 다른' 여부를 구분할 수 있어 구조적 동형을 활용한 풀이가 더 쉬웠음.
	기존의 방법	5, 8, 12	공·상자 모델을 활용한 풀이는 알고 있으나 기존의 풀이 방법이 훨씬 쉬웠음.
		2, 10, 11	공·상자 모델을 활용하고자 했지만 공, 상자의 구분이 명확하지 않아 기존의 방법으로 풀었음.
		6, 9	구조적 동형을 활용할 생각이 떠오르지 않았음.

나. 학생 B의 면담 결과

학생 B는 12개의 문항 중 12번 문항을 제외한 나머지 문항을 공·상자 모델을 이용하여 해결하였고, 그 중에서 2개의 문항이 오답이었다. 다음은 학생 B와의 오답 문항 9번에 대한 면담내용이다.

<발췌문 2>

교사 : 9번 문제는 어떻게 풀었니?

학생B: 상자 2개, 공 8개가 각각 다르므로 중복순열로 했어요.

교사 : 서로 다른 n 개의 상자에 구별이 되는 공 r 개를 넣는 경우의 수가 $n!r$ 이니까?

학생B: 네.

교사 : 6번 문제는 어떻게 풀었니?

학생B: 9번 하구 똑 같은 방법으로 방이 2개, 공이 5개가 각각 다르니까 중복순열로 했는데요.

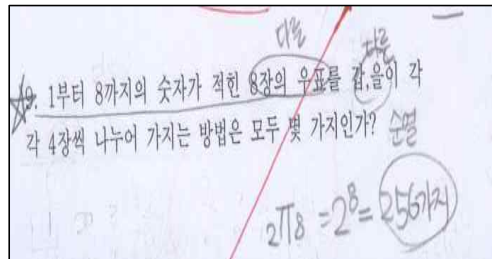
교사 : 그럼 6번 문제와 9번 문제가 차이가 없는 거야?... 자세히 봐봐..

학생B: ... 음, 한 사람에게 4장씩 나누어야 한다구 되어 있어요..

교사 : 그럼 이 경우도 중복순열인가?

학생B: 아니요. 그러니까 한 상자에 들어가는 공의 개수가 고정되면 중복순열이 안 되겠네요.

학생 B는 문항 9번에서 조건의 일부분만 고려하는 키워드 전략 오류를 범하였다. 그러나 이 학생은 문제 진술에서 '서로 다른' 또는 '같은'이 있거나, 공과 상자의 대상, '서로 다른' 여부를 구분할 수 있으면 공·상자 모델로 푸는 것이 더 쉽다고 하였고, 일단 문제를 보면 공·상자 모델로 변환할 수 있는지를 먼저 생각한다고 하였다. 또한, 이전에는 문제 자체 이해가 힘들었는데, 문제 진술에 있는 '다르다', '같다'를 생각하면서 문제를 읽어나가게 되서 문제 이해도가 이전보다 높고, 풀이 방법이 더 간단해서 쉽다고 하였다. 그러나 2,9번 문항에 대해서는 공·상자 모델을 잘못 적용하여 오답이 일어났다.



<그림 IV-2> 학생 B의 구조적 동형을 활용한 오답 풀이 - 9번

다음 <표 IV-8>은 학생 B의 각 문항에 대한 풀이 결과이다.

<표 IV-8> 학생 B의 풀이 결과

구분		문항 번호	학생 B의 풀이
정답	구조적 동형을 활용한 풀이	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11	이전에는 이런 문제를 잘 해결하지 못하였지만, 구조적 동형을 활용하여 문제의 요소 사이의 일대일대응 관계를 파악하니 문제 이해가 더 잘 되었음.
	기존의 방법을 활용한 풀이	12	구조적 동형을 활용한 풀이는 알고 있으나 기존의 방법이 쉬었음.
오답	구조적 동형을 활용한 풀이	2, 9	구조적 동형을 잘못 적용하였음.

다. 학생 C의 면담 결과

학생 C는 12개의 문항 중 5번 문항을 제외한 나머지 11개의 문항을 공·상자모델을 활용하여 해결하였지만 그 중에서 7개가 오답이었다. 다음은 학생 C와의 오답 문항 10, 12번에 대한 면담 내용이다.

<발췌문 5>

교사 : 문제 10번을 어떻게 풀 거지?

학생C: 다른 상자가 3개, 다른 공이 4개 있으니 ${}_3P_4 = n^r$ 에서 $3^4 = 81$ 인거 아니에요?

교사 : 다른 공이 왜 4개이지?

학생C: 공이 2, 4, 9, 7이 있으니깐요.

교사 : 공·상자모델에서 '공'이 문제에서의 '공'을 뜻하는 것은 아니야.

<중략>

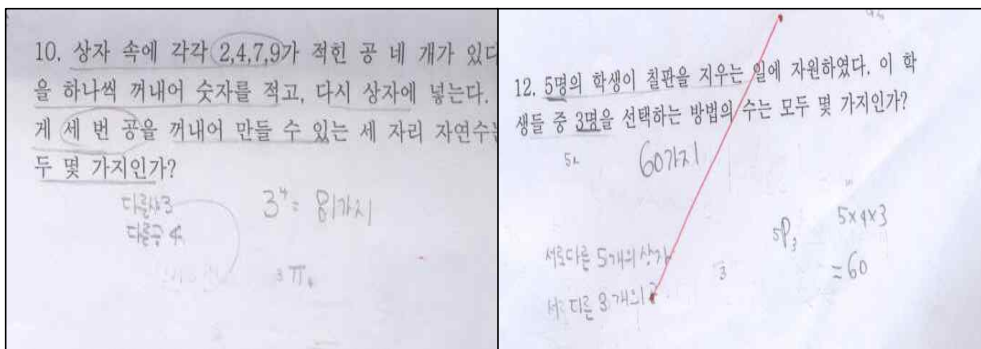
교사 : 문제 12번에서 왜 서로 다른 3개 공으로 생각했니?

학생C: 사람이 3명이니까. 다른 사람이라서 다른 3개의 공으로 생각했어요.

교사 : 근데, 만약 3명을 배열한다면 다른 공으로 봐야겠지. 이 문제에서는 사람을 배열하는 거야 아니면 배열할 필요가 없는 거야?

학생C: 배열할 필요가 없어요.

교사 : 문제 자체에서 서로 다른 사람이라서 서로 다른 공이라 생각하면 안 되고 문제의 의미를 생각해야 되거든. 주어진 문제를 공 상자 모델로 제 진술한 후에 같은 공, 다른 공으로 구분해서 이해해야 한다.



<그림 IV-3> 학생 C의 공·상자모델을 활용한 오답 풀이

다음 <표 IV-9>은 학생 C의 각 문항에 대한 풀이 결과이다.

<표 IV-9> 학생 C의 풀이 결과

구분		문항 번호	학생 C의 풀이
정답	구조적 동형을 활용한 풀이	3, 6, 8, 11	.
	기존의 방법을 활용한 풀이	5	.
오답	구조적 동형을 활용한 풀이	4,7	상자와 공은 구분하지만, '다른 공'은 순열, '같은 공'은 조합을 이해 못하였음.
		10	공과 상자를 구분 못하였음.
		1, 2, 12	다른 공을 구분 못하였음.
		9	풀이 자체가 안 되었음.

<표 IV-9>와 같이 학생 C는 10번 문제 자체에서의 '공'을 공·상자 모델의 '공'으로 잘못 생각하여 해결하였고, 또, 12번 문제에서 사람이 다르니까 공·상자 모델에서 '공'도 '다른 공'으로 잘못 생각하여 해결하였다. 이 학생은 공·상자 모델에서 공과 상자를 구분할 수 있지만, '서로 다르다'의 구분이 어렵다고 하였다.

라. 학생 D의 면담 결과

학생 D는 12개의 문항 모두를 공·상자모델을 활용하여 해결하였고, 그 중 9문제를 옳게 해결하였다. 다음은 학생 D와의 오답 문항 9, 10번에 대한 면담 내용이다.

<발췌문 6>

교사 : 9번 문제에서 왜 상자가 8개, 공이 2개라고 생각했니?

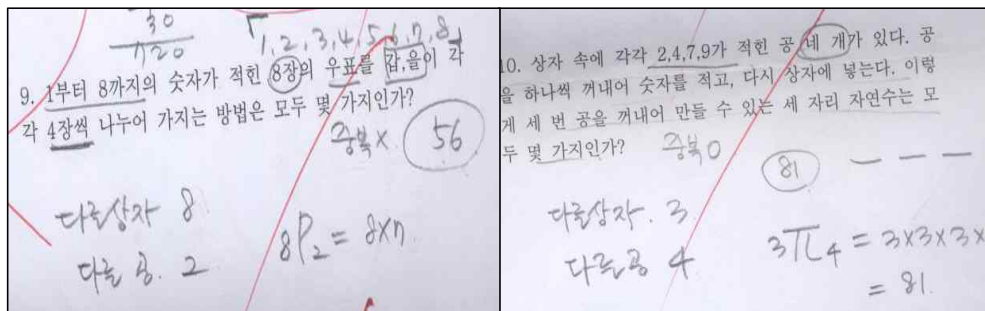
학생D: 8장의 우표이니까 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8로 두고, 갑과 을을 놓는다고 생각했어요.

교사 : 만약 네 말대로 상자가 8개, 공이 2개라면 상자에 기껏해야 공이 2개 들어가는데 문제에서는 갑이 4장을 가질 수 있으니까 문제의 뜻과 맞겠니?

학생D: 그러면, 상자가 2개, 공이 8개인가요?

교사 : 근데, 그것도 아니야. 8개 우표 중 갑이 4개를 가져가면 을이 가져가는 우표는 무조건 정해지지. 그럼 이것을 8개의 서로 다른 상자에 4개의 같은 공을 넣는 방법으로 생각할 수 있겠니?

학생D: 예, 그럼 같은 공이니까 조합이고, 한 상자에 많아야 한 개만 들어갈 수 있으니까 ${}_8C_4$ 네요.



<그림 IV-4> 학생 D의 공·상자 모델을 활용한 오답 풀이

학생 D는 9번 문제에서 공과 상자를 구분하지 못하고 있고, 10번 문제에서도 공과 상자의 개수를 거꾸로 잘못 이해하고 있다. 이와 같이 공과 상자를 잘 구분하지 못하는데도 공·상자모형을 활용해 보니까 훨씬 쉬어서 문제 풀이할 때 구조적 동형을 활용한 방법이 더 많이 떠오른다고 하였다. 다음 <표 IV-10>은 학생 D의 각 문항에 대한 풀이 결과이다.

<표 IV-10> 학생 D의 풀이 결과

구분		문항 번호	학생 D의 풀이
정답	구조적 동형을 활용한 풀이	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12	.
오답	구조적 동형을 활용한 풀이	9	공·상자 모형을 잘못 적용하였음.
		2,10	공과 상자를 구분 못하였음.

마. 학생 E의 면담 결과

학생 E는 12개의 문항 중 8문항을 공·상자모형을 활용하여 해결하였고, 그 중 6문제를 옳게 해결하였다. 다음은 학생 E와의 정답 문항 6, 11번에 대한 면담 내용이다.

<발췌문 7>

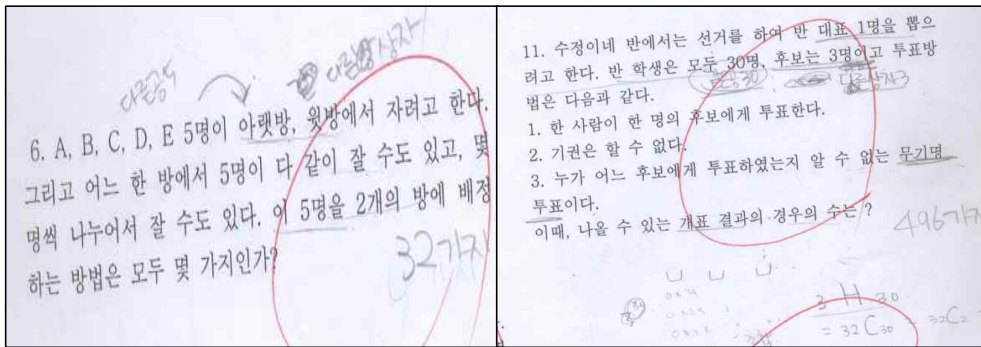
교사 : 6번 문제는 어떻게 해결했니?

학생E: 다른 5명이요, 아랫방, 윗방이니까 다른 거잖아요. 어느 한 방에서 같이 잘 수 있으니까 중복이구요. 그래서 방을 상자, 사람을 공으로 생각하고, 한 상자에서 5명이 들어갈 수 있으니까 중복으로 생각했어요. 다른 5명이니까 C가 아랫방, 윗방 가는 게 다르다고 생각하니까 순열이구요.

<중략>

교사 : 11번 문제에서 학생은 다른데 어떻게 같은 공이라고 생각했니?

학생E: 정말 고민을 많이 했어요. 이게 결국은 중복이더라구요. 사람은 다른데 무기명투표잖아요. 이름을 안 쓰는 것이라 누가 뽑는 것인지 모르니까 같은 공으로 봤어요.



<그림 IV-5> 학생 E의 구조적 동형을 활용한 정답 풀이

학생 E는 6번, 11번 문제를 공·상자 모형을 활용하여 해결하는 과정에서 공과 상자, 중복여부를 잘 구분하였다. 그리고 공·상자 모델이 같은 공, 다른 공만 따지면 되므로 순열, 조합을 구분하는 것 보다 더 쉽고, 중복되는지를 파악만 하면 되므로 기존의 방법으로 문제를 먼저 해결하고, 잘 되지 않으면 공·상자 모형을 활용한 방법을 이용한다고 하였다. 그러나 9번 문제에서는 문제 자체의 ‘공’을 공·상자 모델의 ‘공’으로 잘못 생각하는

오류를 범하였다. 다음 <표 IV-11>은 학생 E의 각 문항에 대한 풀이 결과이다.

<표 IV-11> 학생 E의 풀이 결과

구분		문항 번호	학생 E의 풀이
정답	구조적 동형을 활용한 풀이	1, 3, 4, 6, 7, 11	.
	기존의 방법을 활용한 풀이	4, 5, 8, 10, 12	.
오답	구조적 동형을 활용한 풀이	9	공·상자 모델을 잘못 적용하였음.
		2	공과 상자를 구분 못하였음

V. 결론

순열과 조합 문제는 그 진술 유형에 따라 선택, 배열, 분할의 세 가지 유형으로 나눌 수 있다. 대다수의 교과서에서 선택 문제는 조합으로, 배열 문제는 순열로 계산하여 풀이하고 있다. 그러나 순열과 조합 문제는 문맥상으로 다르지만 본질적으로 수학적 구조가 동형이거나 유사한 문제들이 많다.

학생들은 순열과 조합 개념을 고정된 이미지로 받아들이고, 진술 유형에 따라 그 풀이를 달리하기 때문에 많은 오류를 범한다(권태진, 2008). 이 때, 학생들이 이미 알고 있는 문제의 구조와 그 구조를 구성하는 요소들 사이의 관계가 대등하게 연결된 또 다른 문제가 있다면 후자의 특징을 전자의 특징으로 예측할 수 있다(English, 1999)

이에 본 연구에서는 순열과 조합의 개념을 구조적 동형인 공·상자 모델 방식으로 교수·학습했을 때, 학생들이 학업 성취도에서 효과가 있는지를 살펴보고, 문제 해결 과정에서 나타나는 특징이 무엇인지를 분석하고자 하였다. 이를 위해 D광역시 일반계 S고등학교 2학년의 2개 반 학생을 연구대상으로 선정하고, 2개 반을 각각 실험 집단(35명)과 비교 집단(34명)으로 배정한 후 실험 집단에는 4차시의 구조적 동형을 활용한 수업을, 비교 집단에는 4차시의 교과서 중심의 수업을 실시하였다. 실험수업 결과 다음과 같은 결론을 도출할 수 있었다.

첫째, 구조적 동형을 활용한 교수·학습은 기존의 교과서 중심의 교수·학습보다 학업성취도 향상에 효과가 있는 것으로 나타났다.

둘째, 학생들은 순열과 조합 문제에서 ‘서로 다른’, ‘서로 같은’ 과 같은 표현이 있으면 구조적 동형을 활용하여 문제를 해결하는 것이 더 쉽다고 하였고, 공·상자 모델에서는 공과 상자의 구별 여부만 판단하면 되므로 기존의 방법보다 더 많이 사용한다고 하였다.

셋째, 구조적 동형을 활용한 순열·조합 학습 집단은 문제 상황에 따라 공·상자 모델과 기존의 방법 중에서 적절한 풀이 방법을 스스로 택하여 해결하였다.

공·상자 모델은 순열과 조합의 개념을 일관성 있고 체계적으로 설명할 수 있어 학생들에게 순열과 조합 개념을 이해시키는데 도움이 된다. 그러나 학생들은 순열과 조합 문제를 공·상자 모델로 재 진술하는 과정에서 공과 상자 구분을 못하거나, ‘서로 다름’을 구분하지 못하여 오류를 범하는 경우가 많다. 따라서 구조적 동형을 활용하여 문제를 해결하는 경우에는 문제 요소와 일대일대응이 되는 공과 상자를 찾는 과정에 대한 좀 더 세밀한 지도가 필요하다고 할 수 있다. 또한 순열과 조합 문제의 진술 형태에 따라 학생 스스로가 공·상자 모델과 기존의 방법 중에서 적절한 풀이 방법을 택하여 해결할 수 있도록 지도하는 것이 필요하다.

본 연구의 결과는 인문계 고등학교 2학년 2개 반 학생들을 대상으로 4차시의 실험 수업을 준 실험설계 방법으로 얻어졌기 때문에 일반화하기에는 제한이 있을 수 있다. 따라서 진 실험설계에 근접한 방법으로 보다 많은 연구의 대상과 실험 수업을 통해 본 연구의 결과가 확장되기를 기대한다.

참 고 문 헌

- 김미정 · 김용구 · 정인철 (2009). 발견을 통한 순열과 조합 지도방안 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **48(2)**, 113-139.
- 김원경 · 문소영 · 변지영 (2006). 수학교사의 확률과 통계에 대한 지식과 신념, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **45(4)**, 381-406.
- 이재학 · 정상권 · 박혜숙 · 홍진곤 · 박부성 · 김정배 · 김상훈 (2008). 고등학교 수학 익힘책 I. 서울 : (주)금성출판사.
- 이지현 · 이정현 · 최영기 (2005). 순열 조합 문장제의 문제변인과 오류분석. 학교수학, **7(2)**, 123-137.
- 이주영 · 김서령 · 박혜숙 · 김완순 (2006). 조합문제사이의 구조적 동형. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, **45(1)**, 123-138.
- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D.(1997). Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupil, *Educational Studies in Mathematics*, **32**, 181-199.
- Dubois, J. G. (1984). Une systematique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, **15(1)**, 37-57.
- English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education: Models and processes*, New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates.
- English, L. D. (1999). Reasoning by analogy: A fundamental process in children's mathematical learning. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning K-12* (1999 Yearbook of NCTM, 22-36.), Reston VA : NCTM.
- Genter, D. (1983). Structure mapping: A theoretical framework for analogy, *Cognitive Science*, **7(2)**, 150-170.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston VA : NCTM.
- Roberts, F. S. (1984). *Applied combinatorics*, New Jersey : Prentice-Hall.
- Sowder, L. (1988). Choosing operations in solving routine story problem , In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (Vol. 3),148-158, Virginia: Lawrence Erlbaum.
- Sriraman, B., & English, L. D. (2004). Combinatorial mathematics: Research into practice, *Mathematics Teachers*, **98(3)**, 182-191.

Teaching and Learning Effects of Structural-Mapping used Instruction in Permutation and Combination

Kim, Won Kyoung

Korea National University of Education
E-mail : wonkim@knue.ac.kr

Hong, Gab Ryong

Gumi High School, Korea
E-mail : hgldragon@hanmail.net

Lee, Jong Hak

Daejeon Songchon High School, Korea
E-mail : mathro@hanmail.net

The purpose of this study is to analyse teaching and learning effects of the structural-mapping used instruction and to find out the characteristics of problem solving process in permutation and combination.

For this study, two classes of 11th grade students(67 students) were randomly selected from S high school in D city. One of them was assigned to the experimental group and the other to the control group, respectively. Four lectures of the structural-mapping used instruction were carried out in the experimental group and same amount of lectures of the text book oriented instruction were carried out in the control group.

The research findings are as follows.

First, the structural-mapping used instruction is shown to be more effective in achievement than the traditional textbook-oriented instruction.

Second, the ball-box model is found out to be easier and simpler than the selection-distribution model.

Third, students who used the ball-box model are properly able to use both model.

* ZDM Classification : D54

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50

* Key Words : Structural-Mapping, Permutation, Combination, Ball-box model.

<부 록>

1. 사전 성취도 검사지

1. 10원, 50원, 100원의 세 종류의 동전을 일부 또는 전부 사용하여 250원을 지불한 방법의 수는 ?
① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14
2. 0, 1, 2, 3의 네 개의 숫자에서 세 개를 사용하여 세 자리 정수를 만들 때, 짝수의 개수는 ?
① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18
3. 5장의 카드 a, a, b, b, c 중에서 3장을 골라 일렬로 배열할 때, 만들 수 있는 문자열은 ?
① 10 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21
4. 국어, 영어, 수학 참고서가 각각 4종류, 3종류, 2종류가 있다. 이 중에서 각각 두 권씩 여섯 권을 뽑는 방법의 수는 ?
① 12 ② 18 ③ 24 ④ 36 ⑤ 60
5. 9명의 학생 중에서 n 명을 뽑아 일렬로 세우는 방법이 504가지라고 할 때, n 의 값은 ?
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6
6. 선생님 3명과 학생 4명이 7인8각 경기를 하려 한다. 선생님과 학생이 교대로 서는 경우는 ?
① 36 ② 54 ③ 72 ④ 144 ⑤ 288
7. A, B, C, D, E 5명이 5인승 승용차를 탄다고 한다. 운전을 할 수 있는 A와 B만 운전석에 앉을 수 있다고 할 때, 다섯 사람이 다섯 자리에 앉는 방법의 수는 ?
① 48 ② 60 ③ 72 ④ 96 ⑤ 120
8. 남학생 8명, 여학생 6명이 회원인 동아리가 있다. 이 동아리에서 남녀 학생 각각 2명씩의 대표를 선출하는 방법의 수는 ?
① 60 ② 120 ③ 420 ④ 600 ⑤ 720
9. 회원이 10명인 어떤 모임에서 회장 1명과 부회장 2명을 뽑는 방법의 수는 ?
① ${}_{10}C_1 \times {}_9C_2$ ② ${}_{10}C_3$ ③ ${}_{10}C_1 \times {}_{10}C_2$ ④ ${}_{10}C_3 \times 3!$ ⑤ ${}_{10}C_3 \times 2!$
10. 6명의 이름이 각각 적힌 카드가 있다. 이 카드를 섞어서 임의로 나누어 주었을 때, 6명 중 2명만이 자신의 이름이 적힌 카드를 받는 경우의 수는 ?
① 45 ② 75 ③ 105 ④ 135 ⑤ 150

2. 사후 성취도 검사지

(다음 문제의 풀이와 답을 모두 적으시오)

1. 1학년 10개의 반이 있는 어느 학교에, 1학년 학생 3명이 새로 전학을 왔다. 한 반에 한 명만 배정할 수 있을 때, 방법의 수는 ?

2. 소수 2, 3, 5, 7이 하나씩 적혀 있는 4개의 공이 상자에 들어 있다. 이 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 나온 수를 기록한 후 다시 집어넣는 시행을 3회 할 때, 세 수의 곱으로 만들 수 있는 수의 개수를 구하여라.

3. 경희는 화분에 봉선화 꽃씨를 심으려고 한다. 10개의 화분에 서로 같은 꽃씨 7개를 심으려고 한다. 한 화분에는 기껏해야 1개의 꽃씨를 심을 수 있을 때, 방법의 수는 ?

4. 빨강색, 노란색, 파랑색, 초록색의 장난감 자동차 4개가 있다. 이 4개의 자동차를 갑, 을, 병 세 명에게 남기지 않고 모두 나누어 주려고 한다. 나누어 줄 수 있는 방법은 모두 몇 가지인가?(단, 한 명에게 4개를 모두 다 줄 수도 있다.)

5. 10명의 학생 중 반장, 부반장, 총무를 선택하는 방법의 수는 ?

6. A, B, C, D, E 5명이 아랫방, 윗방에서 자려고 한다. 어느 한 방에서 5명이 다 같이 잘 수도 있고, 몇 명씩 나누어서 잘 수도 있다. 이 5명을 2개의 방에 배정하는 방법은 모두 몇 가지인가?

7. 수영이네 학교에서는 수학동아리가 3개 있다. 세 동아리에 공학용계산기 30대를 나누어 주려고 한다. 세 동아리에 공학용계산기를 나누어주는 방법의 수는 ?

8. 6명에게 6개의 서로 다른 과일을 1개씩 나누어주는 방법의 수는 ?

9. 1부터 8까지의 숫자가 적힌 8장의 우표를 갑, 을이 각각 4장씩 나누어 가지는 방법은 모두 몇 가지인가?

10. 상자 속에 각각 2, 4, 7, 9가 적힌 공 네 개가 있다. 공을 하나씩 꺼내어 숫자를 적고, 다시 상자에 넣는다. 이렇게 세 번 공을 꺼내어 만들 수 있는 세 자리 자연수는 모두 몇 가지인가?

11. 수정이네 반에서는 선거를 하여 반대표 1명을 뽑으려고 한다. 반 학생은 모두 30명, 후보는 3명이고 투표 방법은 다음과 같다.

가) 한 사람이 한 명의 후보에게 투표한다.

나) 기권은 할 수 없다.

다) 누가 어느 후보에게 투표하였는지 알 수 없는 무기명투표이다.

이때, 나올 수 있는 개표 결과의 경우의 수는 ?

12. 5명의 학생이 칠판을 지우는 일에 자원하였다. 이 학생들 중 3명을 선택하는 방법의 수는 모두 몇 가지인가?

3. 구조적 동형을 활용한 순열과 조합 수업 지도안

가. 순열 지도안

(1) ${}_n P_r$ 의 두 가지 의미 설명

- ① 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하고, 순서대로 배열하는 방법의 수
- ② 서로 다른 r 개의 공을, 서로 다른 n 개의 상자에 기껏해야 1개를 넣는 방법의 수
- ${}_5 P_3, {}_6 P_4$ 을 두 가지 방식으로 설명

(2) 예제를 통하여 두 가지 방법으로 풀이한다.

예) 10명의 학생 중에서 반장, 부반장, 총무를 각각 1명씩 뽑는 방법의 수를 구하여라.

예) A 고등학교는 올해 1학년을 여섯 학급으로 편성하였다. 이 학교에 1학년 학생 6명이 전학을 왔을 때, 6명을 모두 다른 학급에 배정하는 경우의 수를 구하여라.

예) 수업시간에 4명의 학생이 발표를 하려고 한다. 이 학생들이 발표하는 순서를 정하는 방법의 수를 구하여라.

예) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 일 때, 함수 $f: A \rightarrow B$ 에서 일대일함수의 개수는?

나. 조합 지도방안

(1) 조합 ${}_n C_r$ 의 두 가지 의미 설명

- ① 서로 다른 n 개에서 r 개를 택하는 방법의 수
- ② 동일한 r 개의 공을, 서로 다른 n 개의 상자에 기껏해야 1개 넣는 방법의 수
- ${}_4 C_3, {}_7 C_4$ 을 두 가지 방식으로 설명

(2) 예제를 통하여 2가지 방법으로 풀이를 제시한다.

예) 10명의 학생 중에서 줄다리기 경기에 출전할 선수 7명을 뽑는 경우의 수는 ?

예) 3개의 동일한 사물을 서로 다른 4개의 상자에 기껏해야 1개 넣는 방법의 수는 ?

예) 같은 편지 2개를 서로 다른 4개의 편지봉투에 넣고 싶다. 한 편지봉투에는 하나의 편지만 들어갈 때, 그 방법의 수는 ?

예) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 일 때, 함수 $f(1) < f(2) < f(3) < f(4) < f(5)$ 를 만족하는 함수 $f: A \rightarrow B$ 의 개수는?

다. 중복순열 지도방안

(1) 중복순열의 두 가지 의미 설명

- ① 서로 다른 n 개에서 중복을 허용하여 r 개를 택하고, 순서대로 배열하는 방법의 수
- ② 서로 다른 r 개의 공을, 서로 다른 n 개의 상자에 넣는 방법의 수

(2) 예제를 통하여 2가지 방법으로 풀이를 제시한다.

예) 5명이 가위바위보를 할 때 일어나는 경우의 수 ?

예) 5명의 유권자가 3명의 입후보자를 기명투표하는 경우의 수?

예) 5통의 서로 다른 편지를 서로 다른 세 개의 우체통에 넣는 방법의 수?

예제 문제의 답은 모두 3^5 이다.

예) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 일 때, 함수 $f: A \rightarrow B$ 의 개수는?

라. 중복조합 지도방안

(1) 중복조합 2가지 의미 설명

- ① 서로 다른 n 개 중에서 중복을 허락하여 r 개를 택하는 방법의 수
- ② 동일한 r 개의 공을, 서로 다른 n 개의 상자에 넣는 방법의 수

예) 서로 다른 과일 3개 중에서 중복을 허용하여 5개를 사는 경우의 수 ?

예) 5개의 동일한 사물을 서로 다른 3개의 상자에 넣는 방법의 수 ?

예) 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ 에서 음이 아닌 정수해의 개수는 ?

예) $(x + y + z)^5$ 에서 생기는 항의 개수는?

예) 5명의 위원이 3명의 후보를 무기명 투표하는 경우의 수는 ?

예제 문제의 답은 모두 ${}_3H_5$ 이다.

(2) 중복조합은 공·상자 모델을 이용해도 되지만 구조적인 동형인 표현이 많으므로 이를 정리하고, 계산공식을 소개한다.

예) ${}_5H_8$ 이란 ?

- ① 서로 다른 5개에서 중복을 허락하여 8개를 선택하는 방법의 수이다.
- ② 8개의 동일한 공을 서로 다른 5개의 상자에 넣는 방법의 수
- ③ 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$ 에서 음이 아닌 정수해의 개수

(3) 예제를 통하여 2가지 방법으로 풀이를 제시한다.

예) 100원짜리 동전 5개를 서로 다른 4개의 저금통에 넣는 방법의 수를 구하여라.(단, 동전은 서로 구별되지 않는다.)

예) 사과, 배, 감, 귤 네 종류의 과일을 파는 상점에서 7개의 과일을 골라 바구니에 담으려고 한다. 이때 과일을 바구니에 골라 담을 수 있는 방법의 수를 구하여라.

예) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ 일 때, 함수 $f(1) \leq f(2) \leq (3) \leq f(4) \leq f(5)$ 를 만족하는 함수 $f: A \rightarrow B$ 의 개수는?