대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 21 권 제 4 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 21, No. 4, 379-398. Nov 2011

예비교사들을 대상으로 한 증명활동과 반례생성 수행결과 분석 : 수열의 극한을 중심으로

이 정 곤* · 류 희 찬**

수학교육에서 증명과 반박은 명제가 왜 참인지 혹은 거짓인지를 판별하게 해주고 거짓으로 판명된 명제를 참인 명제로 정교화하는 과정에서 중요한 요소가 된다. 그렇기에 증명활동과 반례생성 두 가지를 함께 학습하는 것은 수학을 배우는 학생들에게 주어진 명제에 내포되어 있고 함축되어 있는 의미에 대한 깊은 통찰력과 명확한 이해를 제공해 줄 수 있다. 최근 많은 논문을 통해 학생들이 수학적 증명에 어려움을 겪고 있다는 증거가 나타나고 있다. 그러나 해당 연구의 대부분은 예비교사들이 수열의 극한 부분에 대하여 증명과 반례를 생산해 내는 능력에만 초점을 맞추고 있다. 따라서 본 연구에서는 예비교사들을 대상으로 하여 수열의 극한 부분에 대한 수행결과 분석을 통하여 증명활동과 반례생성에 대한 능력정도와 접근 방법 등을 알아보고자 한다. 본 연구의 목적은 예비교사들이 반례와 증명을 생성하는 것에 대한 조사에 공헌하는 것이며 예비교사들의 증명과 반례생성 능력 그리고 수학 개념들에 대한 이해의 정도를 식별하고 확인하는 것이다. 또한, 연구를 통하여 참가자들이 주어진 명제들에 대한 답을 작성하는 것에 어려움을 겪는다는 것을 알게 되었고 이를 바탕으로 증명과 반례를 가르치고 배우는 것에 더욱 노력을 기울여야만 한다는 것을 알 수 있었다. 덧붙여, 이 연구의 분석을 통하여 현행 커리큘럼과 교육방법에 대하여 통찰력을 제공하게 될 수 있을 것이고 예비교사들의 수학과정 학습을 향상시킬 수 있는 방향을 제시한다는 교육적 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

Ⅰ. 서론

수학을 학습하는데 있어서 증명과 반박은 매우 중요한 요소가 된다. 왜냐하면 주어진 명제가 참인지 혹은 거짓인지 판별할 수 있게 하고 만약 그렇다면 왜 그러한지 입증하는데 필수불가결한 요소이기 때문이다. 즉, 수학학습에서 증명활동과 반례생성 과정은 구체적인 수학적인 지식을 구축하고 수학적 개념을 명확하게 이해하도록 해주는 것이며 증명과 반례는 불가분의 관계에 있다(Lakatos, 1976).

수학에서 증명은 합성명제에서 전제(가설 또는 가정)를 통해 유효한 추론을 끌어내고 이를 통하여 참인 결론을 얻어내는 과정이다. 즉, 수학적 증명은 정의와 명제 그리고 여러 가지 조건들을 통해서 하나의 명제의 참을 판별해내는 과정에서 필요(Tall, 1989)하며 명제의 논리를 이해하고 해당 명제가 왜 그렇게 되는지 그리고 어떻게 그러한지에 대한 통찰력과 이해를 제공해 준다(Ferrini-Mundy and Lauten, 1993 ; Tall, 1992).

또한, 반례생성은 어떤 명제가 참이 아님을 반박하기 위하여 수행하는 것이며 해당 명제가 성립하지 않는 예를 드는 것이다. 따라서 반례는 증명작용과 유사하게 주어진 수학 명제가 왜 거짓인지를 판별하고 이를 설명하는데 매우 중요

* 원광대학교, jukolee@wonkwang.ac.kr
** 한국교원대학교, hclew@knue.ac.kr
1) 이 논문은 2011년도 원광대학교 교비 지원에 의하여 연구되었음

한 역할을 하게 된다(Peled & Zaslavsky, 1997).

그렇기에 증명활동과 반례생성 두 가지를 함께 학습하는 것은 수학을 배우는 학생들에게 주어진 명제에 내포되어 있고 함축되어 있는 의미에 대한 깊은 통찰력과 명확한 이해를 제공해 줄 수 있고 해당 명제가 왜 참인지 혹은 거짓인지를 판별할 수 있게 해준다. 따라서 고등수학을 전공하는 예비 교사들이 학부 교육과정을 통해 증명과정과 반례생성을 모두 사용하고 배우는 것은 반드시 필요한 부분이다.

또한, 참인 명제를 증명하는 과정 혹은 거짓인 명제의 반례를 생성하는 과정에 들어가기 이전에 학생과 교사는 주어진 명제의 참과 거짓을 명확하게 판별할 수 있어야 한다. 하지만, 전공학부생들과 예비교사, 수학교사들의 명제 판별 능력을 살펴 본 결과 대다수가 수학적 지식에 대한 이해가 명확하지 않았고 과정에 필요한 수학개념들의 학습이 충분하지 않아서 주어진 명제의 참과 거짓을 구별해 내는데 어려움을 겪고 있었다(Barkai, Tsamir, Tirosh, & Dreyfus, 2002; Riley, 2003).

Thurston(1994)는 증명과 반례를 학습하고 가르치는 것이 수학학습에 있어서 매우 중요함에도 불구하고, 교사들은 이러한 과정을 도외시하고 학생들에게 어떻게 하면 형식적으로 정확한 수학적 증명을 설명할 것인지에 대하여만 노력을 기울이고 있다는 점과 그렇게 하는 것이 효과적인 교육방식이라고 생각하고 있다는 문제점을 지적한 바 있다. 이러한 Thurston의 결론을 뒷받침 해주는 최근의 연구들이 많은데, 이 연구들을 통해 많은 대학의 고등수학 교육과정에서 전공학부생들과 수학교사 혹은 석사나 박사 학위자들도 증명과정(e.g., Cusi & Malara, 2007; Goetting, 1995; Harel & Sowder, 1998; Knuth, 1999, 2002a, 2002b; Martin & Harel, 1989; Moore, 1990, 1994; Morris, 2002; Stylianides, Styliandise & Philippou, 2004, 2007; Weber, 2001, 2004)과 반례생성(e.g., Barkai et al., 2002; Peled & Zaslavsky, 1997; Zaslavsky & Peled, 1996)에 어려움을 겪고 있다는 것을 보여주고 있다. 즉, 수학적 증명에 직면하는 경우 대다수의 예비교사 및 전공학부생들은 수학증명의 구성요소에 대한 이해(e.g., Harel & Sowder, 1998; Martin & Harel, 1989)가 부족하고 증명을 해나가고 증명과정을 진행시키는 것에 대한 개념적 이해가 부족하다는 것을 알 수 있다(e.g., Moore, 1990, 1994; Weber, 2001, 2004).

수학 분야중 수열의 극한 영역에 대하여 증명과 반례를 학습하는 것은 매우 중요한 부분이다. 왜냐하면, 무한급수, 함수의 연속성, 미분과 적분을 포함한 많은 수학적 개념들이 극한에 의존하며 개념을 이해하고 문제를 해결해나가는 것과 밀접한 관계가 있기 때문이다(e.g., Bezuidenhout, 2001; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas and Vidakovic, 1996; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1992; Williams, 1991). 그러나 예비교사와 전공학부생들이 미적분학에서 필수적 요소인 수열의 극한에 대한 절차를 정확하게 이해하지 못하여 극한을 수열의 값이나 함수 값 혹은 극한의 근사값으로 혼동하는 비형식적 개념을 갖고 있는 경우가 많았으며 이에 대한 어려움을 겪고 있는 것으로 확인되었다(Roh. K, 2008, 박선화, 1993, 최승현, 1999). 또한, 대다수가 무한에 대한 학습의 결과로서 극한을 이해하는 것이 아니라, 극한을 통하여 무한에 대한 절차 자체를 이해하려 하거나 극한과 무한은 같은 것이라 생각하는 오개념이 종종 발생하고 있다(Vinner, 1991). 덧붙여, 위와 같은 오개념이 발생한 경우 이를 제대로 인식시키거나 이미 형성되어 있는 오개념을 상쇄하는 일은 매우 어려운 일이다(Tall & Vinner, 1986; Williams, 1991).

이렇게 명확하지 않은 인식 혹은 오개념의 형성은 극한 부분을 이해하는 것에 악영향을 미치게 되고 함수의 연속성 혹은 미분 가능성과 같이 이와 연결된 주제들의 학습에도 어려움을 느끼게 하는 원인이 된다. 이러한 현실적 상황은 극한의 중요한 정리를 배우는 예비 교사들과 전공학부생들의 대다수는 정리에 대한 증명을 이해하지 못하고 있다는 여러 연구(Brezuidenhout, 2001; Williams, 1991; Shipley, 1999)들을 통해 충분히 알 수 있다.

그러나 수학교사와 예비교사 그리고 전공학부생들이 수열의 극한에 대한 수학적 증명에 어려움을 겪고 있다는 것을 말하고 있는 대부분의 논문들이 증명과 반례를 기술적으로 설명하여 증명과 반례를 효과적으로 생성하는 것에 초점을 맞추고 있으며(Thurston, 1994), 증명과 반례 생성능력의 부족함에 대한 분석과 평가 그리고 고찰은 많이 부족한 실정이다(Barkai et al., 2002).

따라서 본 연구는 수학교육과정에서 증명과정과 반례생성이 중요함에도 불구하고 이를 이해하고 만들어가는 과정에 대하여 어려움을 겪고 있다는 것에 기인하고 있다. 특히 극한 영역 - 중간과 비례 모두의 영역을 포함한 - 에서 학생들이 개념형성이 쉽지 않다는 문제를 인식하여 예비교사(사범대 수학교육과 학생)들을 대상으로 하여 극한 영역의 명제들의 반례를 생성하고 증명을 구축해 나가는 능력을 조사하고자 한다.

이하에서는 아래의 두 가지 조사 질문을 통하여 예비교사들의 증명과 반례생성과정을 평가하고자 한다.

(1) 예비교사들은 수열의 극한 영역에서 증명을 구축하고 반례를 잘 생성하는가?

(2) 예비교사들이 증명을 만들어 내거나 반례를 생성할 때 나타나는 특징은 어떠하며 만약 문제점이 있다면 무엇인가?

덧붙여, 연구자는 본 수행결과 분석의 객관성과 신뢰성 확보를 위하여 참가자 대부분이 주어진 해당 주제에 대하여 이미 공부했고 주어진 문제를 정확하게 평가할 뿐만 아니라 극한에 대하여 증명과 반례를 완성할 수 있다는 가설을 세우고 진행하였다. 또한, 본 연구의 결과는 위의 조사 질문을 통하여 수열의 극한에 대한 증명과 반례생성에 관한 예비 교사들의 수행결과 분석에 초점을 두었다.

II. 증명활동과 반례생성의 중요성과 분류법

1. 증명에 대한 이해와 증명활동 분류법에 대한 개관

수학의 전통적인 관점에서 볼 때, 수학적인 증명활동은 공식적이고 논리적인 부분이며 이치의 결합으로 시작하여 결론을 향하여 가는 논리적인 단계이다(Griffiths,,2000, p.2). Styliandies (2007)는 기존의 증명을 통해서 받아들여진 명제들과 논증의 방법, 묘사의 방법 등을 필수적 요소로 포함하고 있는 증명과정과 증명활동에 관하여 정의한 바 있으며 이를 통해 증명은 수학환경에서 교육자와 학습자가 각자의 생각을 소통할 수 있는 수단이 된다고 말했다. 또한, 수학에서 일반적인 증명 스키마[2]란 논증의 중요부분을 좀 더 효과적으로 이해하게 하는 수학적 증명이 무엇으로 이루어졌는지를 이해하게 해주고 학생들의 답이 유효한 증명인지 혹

2) 본 논문에서는 Harel과 Sowder의 proof scheme를 증명 스키마로 번역하였다.

은 아닌지를 판가름하게 해주는 기본적인 지식이라고 밝혔다. 즉, 개인 혹은 수학환경에서 증명활동이라는 것은 무엇이 사람(혹은 수학환경)을 이해시키고 설득하게 하며 어떻게 이것을 확인하게 되는지 보여주는 것이다(Harel & Sowder, 2007, p. 809). 이를 바탕으로 Harel과 Sowder(1998)는 여러 학년 수준에서 행해진 광범위한 교수실험에 기초하여 학생들의 증명 스키마를 분류했으며 이 분류는 학생들이 일반적으로 확신하는 바에 따른 증명과정을 돕고 효과적으로 확인하기 위하여 제시한 것이다.

본 연구에서는 예비교사들이 참인 명제의 증명활동을 더 원활하고 효과적으로 수행하게 하고 연구결과를 객관적으로 확인하기 위해서 Harel과 Sowder(1998)가 분류한 세 가지 증명 스키마에 대한 연구를 적용하였다. Harel과 Sowder의 증명스키마 연구의 내용은 참인 명제에 대하여 증명을 생성한 유형을 분류하는 기준에 포함시켜 만들었으며 세 가지 증명 스키마는 아래와 같다.

첫 번째 분류 범주는 귀납적 증명 스키마로서 어떻게 학생들 스스로 확인하고 이해하며 하나 혹은 다양하게 주어지는 특별한 예시들을 통하여 다른 사람에게 설명할 수 있는지를 살펴보는 것이다. 이 과정에서는 Balacheff(1988)의 순수한 경험주의(naive empiricism)와 결정적 실험(crucial experiment)의 방법이 모두 포함되도록 했다. 순수한 경험주의는 무작위로 선택된 조건들에 의한 입증방법이라 말할 수 있으며 소수의 평범한 사례로부터 그 추측이 참일 것이라고 결론짓는 단계를 말한다. 또한, 결정적 실험은 신중하고 주의 깊게 선택된 조건들에 의한 입증방법을 뜻하며 매우 특별하고 극단적인 사례를 조사하여 명백하게 일반화하는 것에 대한 가능성을 다루는 것이다. 여기에 더하여, 본 연구에서는 포괄적인 예시와 사고실험(Knuth & Eliott, 1998)이 모두 효과적으로 적용되고 참고 될 수 있도록 했고 Finlow-Bates, Lerman과 Morgan(1993), Healy와 Hoyles(2000)가 사용한 것과 비슷한 용어를 사용하여 해당 실증방법을 적용했다.

두 번째 분류 범주는 참조가 없는 기호주의 증명 스키마(non-referential symbolic proof scheme)로서 다른 증명활동 방법이나 계획을 참고하지 않은 상태로 증명활동을 진행하는 것이며 학생 스스로가 실제적인 의미와는 일관성이 전혀 없거나 거의 없는 상태에서 개인적인 기호화와 조작을 통하여 입증하는 것이다. 다시 말하면, 의미 없는 기호 조작에 의존하는 것이며 학생들이 '질적이거나 양적인 참고' 없이 증명활동을 진행해 나가는 것이다(Harel & Sowder, 1998, p.250).

세 번째 분류 범주는 구조적 증명 스키마(structual proof scheme)로서 학생 스스로가 공리의 특별한 집합(Knapp, 2006, p.28)을 통하여 증명활동과 증명과정에 속해있는 정리와 정의를 깨닫게 되는 것이다.

이 증명 스키마는 Balacheff(1988)의 증명방법론, Weber(2004), Weber와 Alock(2004)의 구문론적 증명생성 및 방법과 유사하다. Balacheff(1988)에 따르면 명제에 대한 증명활동은 학생들이 증명을 할 때 명제와 관련된 정의, 정리 혹은 분명한 성질들을 바탕으로 하여 증명을 만들어내는 것을 의미한다고 했다. 또한, Weber(2004)와 Weber와 Alock(2004)는 학생 개개인이 수학적인 정리를 언급하거나 관련된 사실들을 이용하여 어떻게 증명을 만들어 가는지를 나타냈고 학생들이 알고 있는 부분을 통하여 증명을 생성하고 증명활동을 진행하는 것에 대한 방법을 제시한 바 있다.

이제 본 연구에서는 예비교사들이 제출한 활동지의 수행결과 분석을 통하여 참인 명제의

증명활동에 대한 결과를 확인하고자 하며 이를 위해 위와 같은 증명 스키마와 분류법들을 참고하여 결과를 살펴보고자 한다.

2. 반례에 대한 이해와 반례생성 분류법에 대한 개관

일반적으로 추측에 대하여 거짓임을 밝히는 것을 반증이라고 하며 단 하나의 반례만으로도 추측이 거짓임을 밝히는 데는 충분하다. 반례의 이러한 특징은 아무리 많은 수의 예를 근거로 사용하더라도 그것이 참을 보증하는 완벽한 증명이 될 수 없는 것과는 차이가 있다. 반례를 보이는 것은 수학에서 일반적인 반증 방법이며 가설이 참이고 결론이 거짓인 예를 찾아 그 문장이 거짓임을 보이는 것이다(류희찬, 조완영, 1999)

학생들이 반례를 생성하는 방법은 잘못된 추측(Bills, Dreyfus et al., 2006) 혹은 이미 알려져 있는 증명과정의 예시(Zaslavsky & Ron, 1998)와 연관이 있는 경우가 전통적인 형태이지만, 최근 몇몇 연구자들은 학생들의 반례를 식별하기 위한 다른 형태의 분류법을 주장했다. 이러한 분류는 만약 학생들이 반례 생성이 충분하다면 거짓인 명제를 반박할 수 있는지 그리고 학생들이 반례를 생성할 때 가질 수 있는 어려움이 무엇인지 입증하는데 도움을 준다. 따라서 본 연구에서는 Peled & Zaslavsky(1997)와 Zaslavsky & Ron(1998)의 조사에 기초하여 분류법을 적용하였고 이 분류법을 통하여 예비교사들의 반례 수행능력을 조사했다.

Peled & Zaslavsky(1997)는 잘못된 추측을 반박하는데 실패하여 반례로서 충분하지 않은 경우와 잘못된 추측을 반박하는데 성공한 경우로 분류했으며 이를 충분하지 않은 반례와 충분한 반례로 나눴다. Zaslavsky & Ron(1998)도 이와 유사한 용어 - 잘못된 추측을 반박하는데 충분하지 않은 경우(잘못된 반례), 잘못된 추측을 반박한 경우(정확한 반례), 학생들이 참이 아닌 명제에 대한 반례를 생성한 것이 아니라 정당화를 한 경우 - 를 사용한 바 있다. 또한, Peled & Zaslavsky(1997)와 Zaslavsky & Ron(1998)에 따르면 일부 참가대상자들 중에는 명제를 반박하기 위한 조건을 만족시키지 못하는 반례를 생성하거나 존재하지 않는 반례를 제시하는 경우도 있다는 것을 언급하고 있으며 이러한 분류방법과 항목도 본 연구에서 충분히 고려하여 적절하게 적용하였다.

본 연구에서는 예비교사들의 수행결과 분석을 통해 거짓인 명제를 입증하기 위한 충분한 반례 생성능력을 알아보고자 하며 이를 위해 위와 같은 반례 분류법들을 참고하여 결과를 도출했다.

III. 연구방법 및 절차

1. 연구대상

전북지역의 사립대학에서 2011년 봄 학기에 고등미적분학을 수강한 사범대 수학교육과 24명이 본 연구에 참가하였다. 참가자 선발은 직전 학기 성적을 바탕으로 상위권 학생들을 대상으로 했으며 그 중 적극적인 참여의지를 가진 학생들로 연구대상을 정하였다. 또한, 이하에서는 예비교사와 연구대상인 사범대 수학교육과 학생은 같은 집단을 뜻한다.

2. 연구대상들의 배경

일부 참가자들은 이 연구가 행해지는 대학에서 수학을 28년간 가르친 한명의 교수에게 배

웠으며 나머지 참가자들은 17년차 교수에게 교육받았다. 2011년 봄 학기 고등미적분학 수업에서 교재는 Pazynsky와 Zipse(1983)의 해석학 입문이었으며 실수체계, 수열과 실수에서의 연속성, 미분가능성의 내용을 포함하고 있다. 두 명의 교육자는 수학 해석학 전공 박사이며 전통적인 교육 방침을 사용하고 있으며, 수업과정은 16주 동안 1주일에 한 번씩 100분 강의와 50분의 토의로 진행되었다. 고등미적분 I 수업은 이전 학기에 미적분학 Ⅰ, Ⅱ(Stewart, 2003) 과정을 이수했어야 하며 수열의 극한이 적분과정 이전에 있으므로 이 연구의 모든 참가자들은 주요 지식을 이미 가지고 있다고 볼 수 있다. 고등미적분 I을 수강하는 학생들은 대부분 20~22세의 학생이며 참가자의 나이, 성 이나 다른 특징에 초점이 있는 것이 아니며 이 연구의 분석에 이와 같은 특징들은 고려되지 않는다.

3. 분석 도구

결과를 도출하기 위한 분석 도구는 다섯 가지 수학명제로 구성되어 있으며 수업교재로부터 도출되었고 수열의 극한에 대한 증명활동과 반례를 생성하는 학생의 능력을 평가하기 위해 고안되었다. 수학적 명제는 수열의 극한의 이해를 얻기 위하여 만들어 졌고 수열의 극한에 대한 증명과 반례의 기본적인 형태를 나타내는 것이다. 또한, 대략 30분정도의 시간 동안 각각의 참가자가 지필로 작성한 활동지를 통해서 결과를 도출해냈다.

4. 자료 수집

<표 III-1>의 수행 결과 분석 도구에 대한 학생들의 지필답변이 주요한 자료가 되며 활동지는 수열의 극한에 대한 모든 교육과정을 마친 후에 고등미적분학 과정에 있는 학생들에게 부여되었다. 본 연구의 참가자들은 스스로가 참이라고 믿고 있는 명제에 대하여 증명을 하고 거짓이라고 생각하고 있는 명제에 대해서는 반례를 생성하도록 발문을 제시했으며 익명성을 유지하기 위해 학생들의 이름은 적지 않도록 했다.

5. 자료 분석

자료는 활동지를 통하여 참가자이 작성한 증명과 반례들을 수집한 것이다. 여기에 증명을 만들어내는 학부생들의 특징화를 좀 더 명확하

<표 III-1> 결과 분석 도구로 사용된 5가지 명제

문제	수열의 극한 명제	참 또는 거짓
1	수열 $\{a_n\}$이 유계이면 수열은 수렴한다.	거짓
2	모든 유계인 단조증가 수열은 수렴한다.	참
3	모든 단조수열은 수렴한다.	거짓
4	수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 모두 유계인 수열일 때, $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n$이 성립한다.	거짓
5	수열 $\{a_n\}$이 $a_1>1, a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$으로 정의되었을 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.	참

<표 III-2> 증명 생성에 대한 7가지 유형

유 형	유형 분류의 기준
응답 없음	무응답, 전혀 관련 없는 지식으로 답변, 단순하게 추측만을 기입한 경우
재 진술	증명 생성에 대한 기본 내용 없이 단지 주어진 명제를 재인용하거나 재 진술한 경우
반례 제시	참인 명제에 대하여 반례생성을 시도한 경우
경험적 지식	입증 방식으로 예시를 사용한 경우
참조 없는 기호표시	실제적인 의미와는 일관성이 전혀 없거나 거의 없는 상태에서 개인적인 기호화와 조작으로 입증하여 논리적 오류가 있는 경우
논리적 오류	수학적인 정의, 관련된 공리나 정리를 나타내어 유효한 증명으로 볼 수 있으나 논리적인 오류가 있는 경우
완벽한 증명	완벽한 증명을 생성한 경우

<표 III-3> 반례 생성의 6가지 유형

유 형	유형 분류의 기준
응답 없음	무응답, 전혀 관련 없는 지식으로 답변, 단순하게 추측만을 기입한 경우
증명	거짓인 명제에 대하여 증명을 시도한 경우
불충분	반례를 생성했으나 거짓인 명제를 반박하는데 실패하거나 반박이 없는 경우
정당화	명제를 반박하는 반례를 제시하지 못하고 단지 명제를 거짓이라고 한 경우
불완전	거짓인 명제를 반박하고 반례를 생성했으나 논리적인 오류가 있는 경우
충분	완벽한 반례를 생성한 경우

게 하기 위해서 앞서 언급되었던 증명 스키마와 분류법 뿐 만 아니라 <표 III-2>에 있듯이 참인 명제에 대해서 답한 참가자들의 답변 중 응답이 없는 경우, 반례를 제시한 경우와 완벽성이 흠결된 사례도 평가 및 분류에 반영했다. 또한, 반례를 생성하는 학부생들의 특징을 잘 알기 위해서 전술한 반례분류법 외에도 거짓인 명제에 답한 참가자들의 답변 중 무응답 혹은 증명을 시도한 경우도 참고했으며 이는 <표 III-3>을 통해 확인할 수 있다. 또한, 증명을 하거나 반례를 생성하는 학생들의 과정에서 발생하는 실수와 오류를 살펴보기 위해서 활동지를 면밀하게 조사했으며 연구의 객관성과 신뢰성을 확보하기 위하여 <표 III-2>와 <표 III-3>의 두 가지 결과 분석은 독립적으로 산출되었고 분류표에 맞추기 위한 어떠한 변경도 가하지 않았다.

IV. 결과분석

연구를 통해 얻은 결과는 크게 두 가지로 분류할 수 있으며 다음과 같다.

(1) 예비교사들의 증명 및 반례생성 활동에 대한 양적 자료 분석
(2) 예비교사들의 증명 및 반례생성 활동에 대한 실수 및 오류 분석

본 연구에서는 우선 대상 학생들의 분석 도구 활동지 응답에 대한 양적분석에 초점을 맞추었으며 그 다음으로 학생들의 답에 나타나는 이해의 양태 및 실수와 오류의 형태를 조사하고 분석했다.

1. 예비교사들의 증명 및 반례생성 활동에 대한 양적 자료 분석

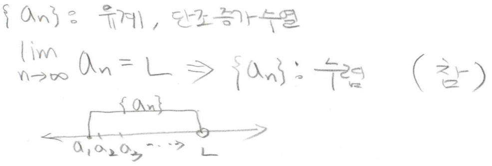
가. 참인 명제에 대한 증명활동

참가 대상학생들이 수열의 극한부분의 명제(문제 번호 2,5)에 대하여 증명을 완성해내거나 참인 명제임에도 불구하고 반례를 찾는 활동과 과정을 분석하고자 한다. 특히, 2번과 5번 문제 모두 단 한명의 학생도 참인 수학명제에 대하여 완벽한 증명을 완성하지 못했다는 점이 중요하다고 할 것이다.

이하에서는 문제번호 2번에 대하여 증명을 시도하거나 반례를 생성한 경우를 소개하고자 하며 (1) 재진술(증명에는 필요하지 않으며 문제에 있는 부분을 단순히 되풀이한 경우), (2) 반례생성(참인 명제를 거짓인 명제라고 생각하여 반례를 생성한 경우)과 (3) 경험적 지식(입증 방식으로 예시를 사용한 경우), (4) 참조가 없는 기호주의(실제적인 의미와는 일관성이 전혀 없거나 거의 없는 상태에서 개인적인 기호화와 조작을 통하여 입증하여 논리적 오류가 있는 경우) 그리고 (5) 논리적 오류(수학적인 정의, 관련된 공리나 정리를 나타내어 유효한 증명으로 볼 수 있으나 논리적인 오류가 있는 경우)에 해당하는 참가학생들의 실제 답안을 통하여 본 연구의 분류에 대하여 설명하고자 한다.

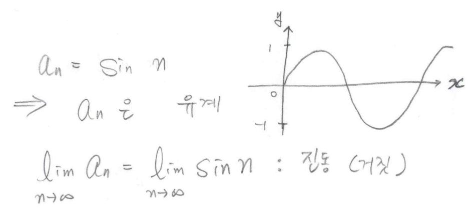
<문제번호 2> 모든 유계인 단조수열은 수렴한다.

가) 재진술



이 예는 2번 문제를 재진술한 2명의 답안에서 추출한 것이다. 이 학생의 경우 2번 문제의 명제가 참이라고는 생각했지만, 증명과정 없이 문제를 다시 적었을 뿐이며 증명을 완성하기 위하여 수열의 극한과 관련된 내용은 전혀 나타내지 못했다. 다시 말하면, 이 학생의 경우 주어진 명제를 다시 재인용하는 것이 증명이라고 생각했던 것으로 보일뿐이며 이 학생의 답변은 '재진술'로 분류했다.

나) 반례제시



<표 IV-1> 참인 명제에 대한 답의 유형별 백분율

문제번호	응답없음		재진술		반례제시		경험적 지식		참조없는 기호표시		논리적 오류		완벽한 증명	
	수	%	수	%	수	%	수	%	수	%	수	%	수	%
2	12	50	2	8	3	13	1	4	5	21	1	4	0	0
5	8	33	7	30	2	8	2	8	5	21	0	0	0	0

참가자중 세 명의 학생이 2번 문제에 대하여 반례를 생성했으며 이는 참인 명제를 거짓이라 생각하여 반례를 생성한 것이다. 사실, $a_n = \sin n$는 $|a_n| = |\sin n| \le 1$으로 유계이지만 단조수열은 아니다. 그러나 이 학생은 단조수열의 개념 이해가 충분하지 않음을 보여주고 있으며 잘못된 반례를 생성하여 참인 명제를 반박하려고 한 경우이다. 따라서 이 학생의 답변은 '반례제시'로 분류했다.

다) 경험적 지식

$\{a_n\}$은 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ 을 만족하는 수열

$\{a_n\}$은 유계인 단조 증가 수열

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = K > 0$

$K = \sqrt{K+1}$, $K^2 - K - 1 = 0$

$K = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$

$K = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $K = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$\therefore$ $\{a_n\}$은 수렴

참가 대상 학생 중 단 한명의 학생에 해당하며 주어진 명제가 참이라는 답을 제시했으나 이를 입증하는 방식으로 단지 예시를 사용한 경우이다. 따라서 이 학생의 답변은 '경험적 지식'으로 분류했다.

라) 참조 없는 기호 표시

$\{a_n\}$는 유계이고 단조증가수열이다.

$\{a_n\}$는 유계 $\Rightarrow$ $L = \sup a_n$ 이 존재한다

$\{a_n\}$는 단조 증가 수열이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = \lim\limits_{n\to\infty} L = L$

위의 예는 참가자 24명중 5명의 학생이 작성했던 활동지 중 하나이며 5명의 학생은 모두 수학적인 증명을 만들어낼 때 수열의 극한에 대한 값을 구하려 시도했다. 그러나 실제로 유계, 단조수열과 수열의 극한의 정의에서 $\{a_n\}$이 유계이므로 $\sup a_n$과 $\inf a_n$은 존재하지만 $\{a_n\}$이 단조수열이라 해서 $\sup a_n = \inf a_n$이 성립하지는 않는다. 그럼에도 불구하고 이것이 성립한다고 생각하고 활동지를 작성했으므로 존재하지 않는 수식으로 참가자 자신의 생각을 입증한 것에 해당한다. 즉, 위 답안의 학생은 단조수열과 수열의 극한에 대한 이해가 명확하지 않다는 것을 보여주고 있으며 실제로는 성립할 수 없는 수식을 통하여 수학적 증명을 완성하고자 했다. 따라서 이 학생의 활동지 답변은 잘못된 증명이며 이를 '참조 없는 기호표시'로 분류했다.

마) 논리적 오류

아래의 예는 '논리적 오류'로 분류한 답안이며 참가한 예비 교사들 중 단 한명만이 이 기준에 해당한다.

Q2. 모든 유계인 단조수열은 수렴한다.

$\Rightarrow$ T (참)

$\{a_n\}$: 유계이고 단조 증가 수열이다

$\{a_n\}$: 유계 $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$ s.t $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le M$

$\{a_n\}$: 단조증가 $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \le a_{n+1}$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$

위의 경우는 수열의 유계와 단조 증가수열의 정의를 이용하여 수열의 수렴을 설명하고자 하였으나 항상 절댓값 $|a_n|$의 상한 M이 수열의 극한이 된다고는 할 수 없다. 따라서 명제를 참이라고 입증하는데 유효한 증명으로 볼 수 있으나 논리적인 오류가 있는 경우이며 완벽하지 않은 증명이다. 이와 같은 경우 분류항목 중 '논리적 오류'라고 분류했다.

<표 IV-2> 거짓인 명제에 대한 답의 유형별 백분율

문제번호	응답없음		증명		불충분		정당화		불완전		충분	
	수	%	수	%	수	%	수	%	수	%	수	%
1	6	25	9	38	0	0	0	0	2	8	7	29
3	10	42	4	17	1	4	1	4	2	8	6	25
4	8	33	5	21	6	25	1	4	0	0	4	17

나. 거짓인 명제에 대한 반례생성 활동

아래의 분류와 백분율은 수열의 극한에 관하여 제시된 명제 중 거짓인 명제들에 대하여 증명을 하려고 시도하거나 반례를 생성하는 경우의 모습이며, <표 IV-2>에 나타난 것처럼 오직 7명(문제 1번)과 6명(문제 3번), 4명(문제 4번)의 학생만이 완벽한 반례를 생성해냈다.

이제 아래의 예들은 (1) 증명(거짓인 명제를 참이라 생각하여 증명을 시도한 경우), (2) 불충분(반례를 생성했으나 거짓인 명제를 반박하는데 실패하거나 반박이 없는 경우), (3) 정당화(명제를 반박하는 반례를 제시하지 못하고 단지 명제를 거짓이라고 한 경우)와 (4) 불완전(거짓인 명제에 대한 반박을 시도하였으며 반례를 생성했으나 논리적인 오류가 있는 경우) 그리고 (5) 충분(문제 3에 대하여 완벽하게 정확한 반례를 생성해 낸 경우)에 해당하는 것이다.

<문제번호 3> 모든 유계인 수열은 코시수열이다.

가) 증명

$\{a_n\}$: 유계

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = A$

$\Rightarrow {}^{\forall}\varepsilon > 0.\quad \exists N. (\in \mathbb{N})$ s.t.

$n > N \Rightarrow |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow m, n > N$ 이면

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - A + A - a_n| \\ &= |a_m - A| + |A - a_n| \\ &= |a_m - A| + |a_n - A| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore \{a_n\}$: 코시수열 [참]

이 예는 수열의 극한에 대한 충분하지 않은 이해를 가지고 있는 경우로 거짓인 명제에 대하여 증명하고자 한 경우이며 항목 중 '증명'으로 분류된 4명 중 한명의 답안이다. 위와 같이 해당 명제가 참이라고 생각하여 증명을 시도했으므로 이 학생의 답변은 '증명'으로 분류했다.

나) 불충분

$a_n = 2^n$

$a_1 = 2,\quad a_2 = 2^2,\ a_3 = 2^3, \cdots$

증가수열 $\neq$ 단조수열

이 예는 주어진 명제를 거짓이라고 응답하고 반례를 생성했으나 거짓인 명제를 반박하는데 실패한 경우에 해당하는 답안이다. 위와 같이 거짓인 명제를 반박하는데 충분하지 않은 반례를 제시하거나 반박이 없는 경우에는 '불충분'으로 분류했다.

다) 정당화

명제를 반박하는 반례를 제시하지 못하고 단지 명제를 거짓이라고 답한 경우에 해당한 경우는 '정당화'로 분류했다. 대상 학생 중 한명의 학생이 주어진 명제가 거짓이라고 응답했으나 아무런 반례도 생성하지 못했다. 또한, 이 경우 활동지에 아무런 내용도 없었으므로 전사 자료는 첨부하지 않았다.

라) 불완전

아래의 예는 참가자 중 2명의 학생의 답 중 하나이며, 거짓인 명제를 반박하여 거의 완벽하게 보일만한 반례를 생성하였지만, 완벽하지는 않은 경우이다.

거짓

∵ $a_n = \sqrt{(-1)^n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = 1$ 이므로 a_n는 유계

그러나 $\lim_{n\to\infty} a_n$는 진동발산하므로 수열 $\{a_n\}$은

코시수열이 아니다

사실, 수열 $\{a_n\}$는 자연수 $\mathbb{N}$을 정의역으로 해서 공역이 $\mathbb{R}$위로 정의된 함수이므로 n이 홀수인 경우 $a_n = i = \sqrt{-1}$가 되어 정의되지 않는다. 즉, 위의 답안을 작성한 학생은 거짓인 명제를 반박하는 옳은 반례를 생성한 것으로 보이지만 수열의 극한에 대한 중요부분에 대한 설명이 충분하게 제시되지 않았기에 이 학생의 답변은 '불완전'으로 분류했다.

마) 충 분

$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ $n=1$, $a_1 = (-1)+1 = 0$

$n=2$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le \frac{3}{2}$ $n=3$, $a_3 = (-1) + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

⇒ $\{a_n\}$: 유계 $n \to \infty$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm 1$ 진동

그러나 $\lim_{n\to\infty} a_n$는 -1과 1로

진동 발산한다

따라서, 「수열이 코시수열 ⟺ 수열은 수렴」 정리에 의해

∴ $\{a_n\}$: 코시수열이 아니다. (거짓)

위의 예시는 정확한 반례를 생성해낸 6명 중 한명의 답안이다. 사실, $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$은 $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le \frac{3}{2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 유계이다. 그러나 이 수열의 극한은 -1과 1을 진동하므로 발산하게 되고 코시수열의 중요한 정리 "수열이 코시수열이기 위한 필요충분 조건은 수렴하는 수열이다."를 만족하지 못하므로 명제가 거짓이라는 완전한 반례를 제시하였다. 즉, 이 반례를 통하여 왜 3번 명제를 반박할 수 있는지를 명확하게 설명했으므로 이 학생의 답안은 '충분'으로 분류했다.

2. 예비교사들의 증명 및 반례생성 활동에 대한 실수 및 오류 분석

위의 양적분석을 통하여 학생들이 증명과 반례에 대하여 작성한 활동지에 나타난 오류들을 세부적으로 분석했다. 그러나 본 연구에서는 여기에 그치지 않고 학생들이 명제의 증명 혹은 반례를 생성하는데 있어서 관련 수학개념들을 이해하고 있는 형태(혹은 부족했던)를 살펴보고 흥미로웠던 부분을 더욱 깊게 살펴보고자 한다. 즉, 이하에서는 학생들이 증명이나 반례를 생성하는 과정에서 가장 일반적으로 범하게 되는 실수와 오류들을 분석하기 위하여 틀린 답안의 분류 항목 중 백분율이 가장 높은 항목을 선택 하여 심층 분석하였다.

가. 문제번호 1. 수열 $\{a_n\}$이 유계이면 수열은 수렴한다.

문제번호 1에서 제시된 명제는 거짓인 명제이다. 그러나 9명(38%)의 학생들은 이 문제가 참이라고 생각하여 증명을 시도했으며 이는 오답 비율 중 가장 높은 항목이다. 학생들 모두 수열 극한의 정의(즉, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$는 모든 양수 ε에 대하여 $n > N$이면 $|a_n - A| < \varepsilon$을 만족하는 자연수 $N \in \mathbb{N}$이 존재하는 것이다.)를 바탕으로 1번 명제를 증명하고자 했다. 해당 학생들이 활동지에 작성한 답을 살펴보면, "$\lim_{n\to\infty} a_n = A$라 하고 $\{a_n\}$이 유계이므로 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n| \le M$인 양수 M이 존재한다. 모든 양수ε에 대하여 $n > N$이면, $|a_n - A| = |M - A| < \varepsilon$을 만

족하는 자연수 N이 존재하므로 수열 $\{a_n\}$은 극한이 존재 한다." 라고 설명하고 있다.

그러나 수열 $\{a_n\}=\{(-1)^n\}$라 하면 수열 $\{a_n\}$은 유계이지만 이는 주어진 명제의 반례가 되어 1번 명제는 거짓이 된다. 다시 말해서, '$\lim_{n\to\infty} a_n = A$라 가정하고 $\varepsilon = 1 > 0$에 대하여 $n > N$이면, $|a_n - A| < 1$인 자연수 N이 존재하게 된다. 그런데 n이 짝수이면 $|a_n - A| = |1 - A| < 1$이므로 $0 < A < 2$가 되지만, n이 홀수이면 $|a_n - A| = |-1 - A| < 1$이므로 $-2 < A < 0$가 되고 이를 동시에 만족하는 실수 A는 존재하지 않으므로, 수열 $\{a_n\}$의 극한은 존재하지 않는다.' 수열의 극한값은 수열이 유계이며 단조 증가일 때는 $sup\{a_n\}$, 단조 감소일 때는 $inf\{a_n\}$이다. 따라서 학생들은 $|a_n|$의 상한이 M이라고 판단했고 수열 $\{a_n\}$은 M이하에 있으며 M에 가까이 간다고 생각하였다. 그러나 이러한 생각은 수열의 극한 정의를 명확하게 이해하지 못하여 오류가 나타난 경우이다. 즉, 이 문제에 답한 많은 학생들이 수열의 극한부분에 대한 개념형성이 충분하지 않았기 때문에 실제로는 거짓인 명제를 참이라고 생각하였고 위와 같은 잘못된 지식을 바탕으로 문제를 해결하려고 했다.

나. 문제번호 2. 모든 유계인 단조증가 수열은 수렴한다.

문제번호 2에서 제시된 명제는 참인 명제이기 때문에 증명을 해내야 하는 명제다. 그러나 참가자의 답안 중에서 응답 없음을 제외하고 오답 비율이 가장 높은 항목은 '참조 없는 기호표시'항목이었다. 응답자중 5명(21%)의 학생들이 주어진 명제를 참이라고 생각하여 증명을 시도했지만, 개인적인 기호해석이나 적용을 통하여 완성하였으므로 수학적 증명으로 인정 될 수 없었다.

특히 그 중 두 명의 학생들이 활동지를 통하여 설명했던 공통적인 부분은 다음과 같다. "수열 $\{a_n\}$은 유계이므로 $L = \sup a_n$이 존재하며, $\{a_n\}$는 단조증가수열이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} L^- = L$이 된다. 따라서 수열 $\{a_n\}$는 수렴한다."라고 설명하여 2번 명제가 참이라고 설명했다. 위 두 명의 학생은 증명을 하면서 수열 $\{a_n\}$이 유계이고 단조수열이므로 $n\to\infty$할 때 $L = \sup a_n$의 값의 좌측에서 가까이 접근한다는 의미에서 $\lim_{n\to\infty} L^-$의 기호를 사용하였으나 $\lim_{n\to\infty} L^-$ 같은 기호는 존재하지 않는다. 물론, 명제가 참이라는 것을 증명하기 위하여 유계의 상한과 단조증가수열 정의를 사용하여 극한에 접근하는 것은 좋은 접근방식이다. 단조증가수열이고 유계이면 수열들은 $\sup a_n$으로 가까이 접근하게 된다. 그러나 해당 학생들은 $\sup a_n$보다 작은 값에서는 수열들이 L로 가까이 간다고 생각하였으며 좌극한의 의미를 부여하여 임의적인 기호 L^-를 사용하였다. 따라서 해당 학생들은 수열의 극한의 정의들에 대한 잘못된 이해를 바탕으로 증명을 시도했으며 실제로는 존재하지 않는 수식을 사용하였지만, 이것을 타당한 수학적 증명으로 믿고 있었다. 다시 말해서, 주어진 명제가 유계라는 것과 단조증가수열과 관련된 상한 및 극한값에 대하여 일부는 이해했으나 완벽한 수학적 증명을 만들지는 못했다. 또한 증명을 해나가는 과정에서 존재하지 않는 개인적인 기호를 사용하여 완성하였으므로 이를 '참조 없는 기호 표시'라고 분류했다.

다. 문제번호 3. 모든 단조수열은 수렴한다.

문제번호 3에서 주어진 명제는 거짓명제이지만 응답자중 4명(17%)의 학생들이 해당 명제를 참이라고 생각하여 수학적 증명을 시도했으며 이는 오답 분류항목 중 가장 큰 비율에 해당한다. "$\lim_{n\to\infty} a_n = A$라 하고 모든 $\varepsilon > 0$에 대하여 $n > N$

이면 $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$을 만족하는 자연수 N이 존재하고 $m,n > N$이면 $|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \le |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$"이 되어 수열 $\{a_n\}$는 코시수열이 된다고 답했다. 해당 학생들의 답안에서 나타난 일반적인 오류는 코시수열의 정의를 정확하게 이해하지 못했다는 것이다. 즉, 해당 학생들은 단조수열이면 코시수열이 될 것이라 잘못 생각하였고 이를 바탕으로 코시수열이면 그 수열은 유계가 될 것이라고 답했다. 이 경우는, 수열 $\{a_n\}$이 유계이면 $\{a_n\}$은 수렴하는 것을 내포하는 것으로 생각한 것이며 이 때문에 거짓인 명제를 참이라 생각하고 증명을 시도한 것이다.

라. 문제번호 4. 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 모두 유계인 수열일 때, $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$이 성립한다.

4번 문제에서 제시된 명제는 거짓인 명제이다. 따라서 참가자는 거짓임을 밝히고 반례를 생성해야 하지만, 답안 분류항목 중 비율이 가장 높은 6명(25%)의 참가자들이 반례를 생성하기는 했으나 완벽하지 않은 반례를 생성하여 '불충분'으로 분류되었다. 예를 들어, "수열$\{a_n\} = \{n^2[-1+(-1)^n]\}$이고 수열 $\{b_n\} = \{n^2[-1-(-1)^n]\}$으로 정한다면, $\limsup_{n\to\infty} a_n = 0$이 고 $\limsup_{n\to\infty} b_n = 0$가 되 어 $\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = 0$이 된다. 그러나 수열 $\{a_n + b_n\} = \{-2n^2\}$이 되어 $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$가 되므로 명제는 거짓이다."라고 반례를 제시하였다. 해당 명제는 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 모두 유계인 수열이라고 가정 되어있다. 그럼에도 불구하고, 위 학생은 위로 유계인 것을 유계로 생각하였으며 이는 유계의 정의를 명확하게 이해하지 못하고 반례를 생성한 경우에 해당한다. 그러나 두 수열 모두 위로 유계만이 성립하므로 이는 반례로서 완벽하지 않기 때문에 분류 항목에서는 '불충분'인 반례로 분류되었다.

마. 문제번호 5. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 > 1, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$으로 정의되었을 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

5번 문제에 주어진 명제는 참인 명제이며 증명을 완성해야하지만 가장 많은 숫자인 7명(29%)의 학생들이 증명을 위한 관련 지식을 제시하지 못하고 단지 주어진 명제를 재진술 했다. "$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{a_{n-1}}) = 2 - \frac{1}{\infty} = 2$, $\{a_n\}$는 수렴한다."는 명제를 다시 인용하고 진술함으로서 증명을 완성한 경우이며 개별면담을 통하여 알아본 결과, 학생들은 $\{a_n\}$이 증가수열이 되므로 극한은 무한이 될 것이라고 생각하였다고 답했다. 이는 증가수열 $\{a_n\}$의 유계를 전혀 고려하지 않고 수열의 극한을 찾은 경우이며 이는 수열의 극한에 관련된 내용을 제시하는 대신에 단지 명제를 다시 진술한 경우에 해당한다. 따라서 분류항목 중 '재진술'로 분류되었으며 해당 문제의 오답 분류항목 중 비율이 가장 높은 유형이다.

V. 결론

이 연구의 분석 도구에 제시된 문제들은 수열의 극한에서만 선택되었고 참가자들은 모두 전 학기에 수강했던 고등미적분학 강의를 통하여 수열의 극한에 대한 모든 과정을 학습하였다. 그럼에도 불구하고, 대다수의 참가자들은 증명을 진행하고 반례를 생성해내는 것에 대하여 상당한 어려움을 겪고 있었다. 본 연구를 통하여, 예비교사들이 수열의 극한부분에서 선택된 명제의 유효성을 결정하기 위한 이해가 부족하다는 것을 알 수 있었으며 수열의 극한과 관련된 문제들의 증명활동 및 반례생성 능력이 충

분하지 않다는 것을 보여주고 있다. 따라서 이 연구의 결과물을 분석하는 것은 수학 교육자들이 학생들의 수학적 추론을 기르고 명제의 참과 거짓을 판별하는 능력을 배양하는 데 도움이 될 수 있으며 증명과 반례를 생성하는 과정과 연관된 현행 교육환경에 대해서도 이해할 수 있을 것이다.

이 연구를 통하여 수학적 증명을 온전하게 해내고 완료하는 것은 대다수 참가자들에게 어려운 일이라는 것을 알 수 있다. 이와 같은 결과의 도출은 현재의 수학환경에서 강조되고 있고 주요 교육방법으로 사용되고 있는 전통적, 정형적 증명의 방법이 극히 일부의 학생들에게만 적절하다고 말한 Tall(1998)의 연구와 일치한다. Tall(1998)은 현재의 교육환경에서 쓰이는 전통적, 정형적 증명을 통한 교육방법이 부족하다는 것을 지적하고 이 부분에 대한 학생들의 내용적 지식 향상과 이해를 돕기 위해서는 수학교육자가 증명과 반례의 다양한 형태를 사용하는 것을 고려해야 한다고 했다. 또, Fishbein(1982)은 증명에 대한 학생들의 직관적 이해를 무시하는 것은 학생들의 수학적 이해를 증진시키지 못하는 결과를 가져온다고 밝힌 바 있다.

위와 같은 문제제기와 개선방안 재고에도 불구하고 여러 연구들을 통하여 아직도 많은 수학교육자들이 학생들의 창의적인 수학적 사고(Weber & Alcock, 2009)보다 증명과 반례의 정형성에 초점을 맞추는 경향이 있다는 점을 지적하고 있으며, 이와 같은 문제점 때문에 학생들이 증명을 하고 반례를 생성하는 것을 어렵게 느끼게 된다고 밝히고 있다. 따라서 학생들의 수학적 추론능력을 키우고 증명과 반례를 유효하게 생성하는 능력을 증진시키기 위해서는 수학교육자가 정형적 증명과 반례를 학생들에게 직접 주는 대신에 학생 개인의 논리적 흠결과 실수를 통해 해당 과정을 진행시키고 스스로 관심을 가질 수 있게 해야 한다(Weber & Alcock, 2009). 다시 말해서, 현행 수학환경의 문제점을 충분히 인식하고 교육법도 변화해야만 예비교사들이 증명과 반례에 대한 충분한 이해를 갖도록 할 수 있을 것이며 이러한 관점은 NCTM(2000)에서 제안했던 증명활동과 반례생성에 대한 권고와 일치하는 것이기도 하다.

수학적 문제는 수학적 내용에 대한 추론과 밀접한 부분이기 때문에 학생들이 명제가 참인지 거짓인지 결정하기 위해서는 관련되어 있는 구체적 영역의 개념들을 심도 있게 이해해야만 한다. 예비교사들의 수학적 개념에 대한 이해를 고취시키기 위해서는 수학교육자들이 학생의 오류와 오해를 깨달아야만 하고(Bezuidenhout, 2001), 구체적인 수학적 개념들을 해석하는 데 더 많은 시간을 할애해야 한다(Vinner, 1992). 즉, 학생들에게 명제의 참과 거짓을 밝혀낼 수 있는 충분한 기회를 주어 학생들이 수학적 지식에 대한 추론과 이해를 증진시킬 수 있도록 해야 한다(Buchbinder & Zaslavsky, 2007). 그러나 연구자는 본 연구의 결과를 분석하면서 학생들이 명제를 분석하고 입증하는 과정이 주어져서 수학적인 내용지식을 증진시키고 고취시킬 수 있는 충분한 기회가 있었는지에 대한 의문을 갖게 되었다. 또한, 완벽한 증명과 반례를 읽어 보고 쓰고 이해하는 것이 고등수학의 기본적 활동임에도 참가자 대다수가 수학적 증명과 반례를 생성하는 것에 대한 충분한 지식을 갖고 있지 않다는 것을 보여주었다.

이 연구를 통하여 참가자들 중 대다수가 문제들을 해결하면서 단순히 기호와 부호를 조작하는 방법으로 접근했고 많은 논리적 실수가 나타나는 등 수열의 극한 부분에 대하여 명확하게 이해하지 못하다는 것이 드러났다. 증명 과정의 전체를 살펴보지 않고 단지 기호나 부호를 적용한 계산 방식은 정리를 증명하고 증

명을 작성하는데 중요한 기술이 될 수 있지만, 수학적인 추론과 이해를 증진시키는 효과적인 방법이 아니다. 즉, 증명과 반박을 통하여 수학적 개념들을 깊게 이해하도록 돕기 위해서는 수학교육자가 학생들에게 단지(부호들과 관련된) 수학적 생각들과 개념들을 더욱 강조하고 자세하게 설명해야 된다.

또한, 수학적 증명이 “엄격하고 완벽하지 않더라도”(Hanna, 1991), 논증의 묘사와 논증의 방법 그리고 명제의 증명에 활용된 사고나 생각들을 배제해서는 안 되며(Stylianides, 2007)모든 상식적인 수학적 지식들이 증명과 반례를 생성하고 명제와 참과 거짓을 밝혀내는 전제조건이 된다(Selden & Selden, 2009)는 것을 인식해야만 한다. 이 연구를 통하여 학생들은 이미 인정되어 있는 정의, 공리 혹은 사실들을 선택하는 충분하고 적절한 지식과 무엇이 증명과 반례를 유효하게 만들 수 있는지를 이해할 수 있어야 하며 이 두 가지 능력이 모두 필요하다는 것을 알게 되었다. 이것은 학생들이 증명을 구성하는 전략적 지식이 필요하다는 Weber(2001)의 연구로 뒷받침 된다. 즉, 예비교사들이 공식적인 증명과 반례를 완벽하게 해내고 그것들을 이해하도록 돕기 위해서는 학생들이 증명과 반례 생성을 확실하게 할 수 있도록 수학교육자들이 수학적 지식 구축과 개념형성에 더 많은 관심을 기울여야 할 것이다.

교수법의 과정을 변경하는 것은 분명 어려운 일이지만 학생들이 수학적 개념을 보다 잘 이해하고 증명과 반례생성을 효과적으로 하기 위해서는 반드시 필요한 부분이기에 앞으로 점진적으로 변화하여야 할 것이다. 덧붙여 교육방식의 변화는 학생들에게 수학을 가르치고 있는 교사들에게도 영향을 줄 수 있다는 것을 고려해야 하며 교사들이 증명과 반례에 대한 충분한 지식을 갖추는 것은 매우 가치 있는 일이라는 것을 인식하고 교사들의 지식과 교수법이 학생들의 학습에 얼마나 영향을 미치는지도 생각해야 할 것이다.

현재의 몇몇 연구들은 특별히 수열의 극한 영역에서 수학교사와 예비교사들이 참이라고 믿고 있는 명제를 증명하고 거짓이라고 생각하는 명제에 대하여 반례를 생성하는 능력에 초점을 맞추고 있으며 이를 통하여 예비교사들과 수학교사들이 이를 결정하는데 어려움을 겪고 있다는 것을 이미 보여주고 있지만(Barkai et al., 2002; Riley, 2003), 학생들이 참과 거짓명제를 판별하는 전략적인 방법에 대해서는 거의 알려진 바가 없다 (Buchbinder & Zaslavsky, 2007). 따라서 앞으로 더 많은 연구를 통해 수열의 극한에 대한 이해, 증명과 반례 사이의 관계성 그리고 명제의 유효성을 결정하는데 있어서 예비교사들이 사용하는 전략과 방법에 대한 통찰력을 얻는 것이 필요하다.

본 연구의 내용을 토대로 앞으로 더 많은 수학 명제를 문제로서 제시하거나 학생들과의 집중적인 인터뷰를 행하고 강의를 살펴보거나 학생들의 예측을 이해할 수 있는 토의 부분 등을 포함할 수도 있을 것이다. 이와 같은 방법을 통하여 예비교사들이 어떻게 증명과 반례를 좀 더 의미있게 학습할 수 있는지에 대해서 이해할 수 있게 될 것이다. 끝으로, 이 연구를 통하여 학생들이 수학환경에서 주어진 명제의 참과 거짓을 명확하게 구별하여 반례와 증명을 완벽하게 해내기 위해서는 수학적 개념에 대한 깊은 이해가 필요하고 수학교육자들은 이 부분을 특히 강조하여 지도해야 하며 그에 맞게 교육방법도 변화해야 한다는 교육적 시사점을 얻게 되었다.

참고문헌

류희찬・조완영(1999). 학생들의 정당화 유형과

탐구형소프트웨어의 활용에 관한 연구. **수학교육학연구, 9**(1), 245-261.

박선화(1993). 개념학습에서 발생하는 인지적 갈등 요인에 대한 고찰 - 개념 정의와 개념 이미지 관계를 중심으로-. **대한수학교육학회 논문집, 3**(1), 185-194.

최승현(1999). 수학적 오개념 발생에 관한 일 고찰 - 극한 개념을 중심으로 -. **교육과정평가연구, 2**(1), 59-73.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216 - 230). London: Hodder & Stoughton.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., & Dreyfus, T. (2002). *Proving or refuting arithmetic claims : The case of elementary school teachers*. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 57 - 64). Norwich, UK.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32, 487 - 500.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P.,Watson, A. & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotna (Ed.), *Proceedings of the Thirtieth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 125 - 154). Prague, Czech Republic.

Buchbinder, O. & Zaslavsky, O. (2007). *How to decide? Students' ways of determining the validity of mathematical statements.* In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 561 - 570). Larnaca, Cyprus.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167 - 192.

Cusi, A. & Malara N. (2007). *Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions.* In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 591 - 600). Larnaca, Cyprus.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994)1. Research in calculus learning: Understanding limits, derivatives, and integrals. In J. Kaput & E. Dubinsky(Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics: Preliminary analyses and results* (pp. 31 - 45). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Finlow-Bates, K., Lerman, S., & Morgan, C. (1993). A survey of current concepts of proof help by first year mathematics students. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu and F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. pp. 252 - 259). Tsukuba, Japan.

Fishbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9 - 24.

Fitzpatrick, P. M. (1996). *Advanced calculus: A course in mathematical analysis*. Boston, MA: PWS Publishing Company

Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof*. Unpublished doctoral dissertation, University of Maryland, MD.

Griffiths, P. A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *American Mathematical Monthly*, 107, 1 - 14.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234 - 283). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Harel, G. & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805 - 842). Charlotte, NC: Information Age.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54 - 61). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 396 - 428.

Knuth, E. J., & Elliot, R. L.(1998). Characterizing students' understanding of mathematical proof. *Mathematics Teacher*, 91(8), 714-717.

Knapp, J. L. (2006). *Students' appropriation of proving practices in advanced calculus*. Unpublished doctoral dissertation, Arizona State University, Tempe.

Knuth, E. (1999). *The nature of secondary school mathematics teachers' conceptions of proof*. Unpublished doctoral dissertation, University of Colorado, Boulder.

Knuth, E. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education,* 33(5), 379 - 405.

Knuth, E. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61 - 88.

Lauten, A. D., Graham, K. G., & Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *Journal of Mathematical Behavior*, 13(2), 225 - 237.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Martin, G. & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41 - 51.

Moore, R. C. (1990). *College students' difficulties in learning to do mathematical proofs*. Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Athens.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249 - 266.

Morris, A. K. (2002). Mathematical reasoning: Adults' ability to make the inductive-deductive distinction. *Cognition and Instruction*, 20(1), 79 - 118.

Parzynski, William R. & Zipse, Philip W. (1983). *Introduction to Mathematical Analysis*.

New York McGraw-Hill.
Peled, J. & Zaslavsky, O. (1997). Counter-examples that (only) prove and counter-examples that (also) explain. *Focus on Learning Problem in Mathematics*, 19(3), 49 - 61.
Riley, K. J. (2003). *An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and refutations*. Unpublished doctoral dissertation, Montana State University, Bozeman.
Roh, K. (2008). Students' images and their understanding of the concept of limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 217-233.
Selden, J., & Selden, A. (2009). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning across the grades: A K-16 perspective* (pp. 339 - 354). New York, NY: Routledge
Shipley, W. J. (1999). *An investigation of college students' understanding of proof construction when doing mathematical analysis proofs*. Unpublished doctoral dissertation, The American University, Washington.
Stewart, J. (2003). *Calculus: Early transcendental single variable* (5th ed.). Belmont: Books/Cole-Thomas.
Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289 - 321.
Stylianides, A. J., Stylianides, G. J. & Philippou, G. N. (2004). Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 133-162.
Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3), 145 - 166.
Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, 127, 28 - 32.
Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495 - 511). New York: Macmillan.
Tall, D. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for all or for some? In Z. Usiskin (Ed.), *Mathematics education around the world* (pp. 117 - 136). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Tall, D. O. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.
Thurston, W. P.(1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30(2), 161 - 177.
Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195 - 213). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101 - 119.

Weber, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the Twenty-eighth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 425 - 432). Bergen, Norway.

Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 209 - 234.

Weber, K., & Alcock, L. (2009). Proof in advanced mathematics classes. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning across the grades: A K-16 perspective* (pp. 323 - 338). New York, NY: Routledge.

Williams, S. R(1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 219 - 236.

Wilson, M. R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: The impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(4), 346 - 370.

Zaslavsky, O. & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (1), 67 - 78.

Zaslavsky, O. & Ron, G. (1998). Students' understanding of the role of counter-examples. In Olivier A. & Newstead K. (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 225 - 232). Stellenbosch, South Africa.

Preservice Teachers' Writing Performance Producing Proofs and Counterexamples about Limit of Sequence

Lee, Jeong Gon (Wonkwang Unversity)
Lew, Hee Chan (Korea National Unversity of Education)

In learning environment at mathematics education, prove and refute are essential abilities to demonstrate whether and why a statement is true or false. Learning proofs and counter examples within the domain of limit of sequence is important because preservice teacher encounter limit of sequence in many mathematics courses. Recently, a number of studies have showed evidence that pre service and students have problem with mathematical proofs but many research studies have focused on abilities to produce proofs and counter examples in domain of limit of sequence. The aim of this study is to contribute to research on preservice teachers' productions of proofs and counter examples, as participants showed difficulty in writing these proposition. More importantly, the analysis provides insight and understanding into the design of curriculum and instruction that may improve preservice teachers' learning in mathematics courses.

* Key Words : counterexample(반례), proof(증명), limit of sequence(수열의 극한)

논문접수 : 2011. 10. 10
논문수정 : 2011. 11. 4
심사완료 : 2011. 11. 18