韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2011. 12. 제 14권, 제3호, 261-275

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Dec. 2011, Vol. 14, No. 3, 261-275

산술과 대수적 사고의 연결을 위한 분수 scheme에 관한 사례 연구

이 혜 민 (한국교원대학교 대학원)
신 인 선 (한국교원대학교)[1]

본 연구는 방정식을 배우지 않은 초등학교 5학년 학생들이 일차방정식을 조작적으로 해결하는 과정에서 자신의 분수scheme과 조작을 어떻게 사용하고 있으며 계수와 상수가 복잡해짐에 따라 어떠한 분수scheme과 조작을 사용하는지 알아봄으로써 산술과 대수 사이의 간격을 줄이고 대수적 사고와 산술과의 연결성을 강화하고자 하였다. 초등학교 5학년 학생 두 명을 사례연구하여 일차방정식을 조작적으로 해결하는 과정을 면밀하게 분석하였다. 분석결과 학생들은 계수와 상수에 따라 다양한 조작과 분수 scheme를 사용하였으며 특히, 일차방정식의 해결에서 핵심전략인 동시에 대수적 사고와 연결되는 미지수와 주어진 량 사이의 동치관계를 세우는 데 반복 분수 scheme이 필요했다. 그리고 동치관계를 세우고 나서 미지수를 찾는 데 동치분수가 중요한 역할을 하였다.

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

학교수학에서 산술과 대수는 오랫동안 초등수학과 중등수학을 대표하는 영역으로 자리매김해 왔으며, 이 가운데 대수는 일반화된 산술 즉, 문자 기호를 도입하여 산술을 일반화하는 것으로 받아들여져 왔다(김성준, 2007). 김성준(2003)에서는 중학교 1학년 '문자와 식' 단원에서, 그리고 학생들이 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 문제는 대수언어(구조)에서 비롯되며, 학생들은 왜 그런지 무엇 때문에 그렇게 되는지 그 이유를 생각하지 않고 교사들로부터 배운 규칙과 조작 기술을 그대로 따라 하기를 반복하는 것을 지적하였다. 또한 학생들은 수업 시간을 통해 대수의 일반화 측면과 변수의 동적인 측면에는 거의 관심을 갖지 못하고 (대수의) 형식적 수준으로의 도약이 빨리 진행되며, 학생들은 대수와 관련된 자신의 스키마를 개발할 여유를 갖지 못한 상태에서 대수를 학습하게 된다고 지적하였다. 대수 학습의 초기에 방정식을 조작하고 해결하는 구문론적 규칙에 초점을 두고 형식적인 방법으로 지도하게 되면, 학생들은 문자 기호와 식에서의 의미론적 요소를 점검할 기회를 갖지 못하고 기계적인 조작만을 반복하게 된다. 이러한 지도 과정이 대수를 하나의 언어로 이해할 수 있는 기회를 잃게 만들며, 여러 가지 장애의 원인이 된다. 대수의 초기 학습을 산술에서 배운 지식과의 연결을 만들어 내지 못하고 산술과 대수를 엄밀히 구분하여 산술 학습 다음의 순서로 산술과는 전혀 관계없는 대수를 학습하게 하는 것은 학생들이 대수 학습에서 어려움을 갖게 하는 원인이 된다. 이것은 Filloy와 Rojano(1989)가 언급한 교수학적 단절(didactical cut)에서 오는 문제점이라고 할 수 있다. 산술은 구체적인 수와 연산에 대해 수치적인 계산 과정에 초점을 두는 반면에, 대수는 수와 연산이 아닌 그 구조와 관계에 초점을 두고 그것들을 대상으로 일반화하는 것에 초점을 둔다. 이러한 산술과 대수의 학문적 특징의 차이로 인해 생기는 문제점은 인지적인 격차(cognitive gap)에서 오는 것이라고 말한다(Herscovics & Linchevski, 1994).

현재의 대수 교육과 관련된 많은 연구들은 이러한 대수 교육의 문제점을 해결하고자 '초기 대수(early algebra)'를 제안한다(예, 김성준, 2003; Amerom, 2002; Kaput, 2008; Smith Ⅲ & Thompson, 2008). 이는 중등학교 대수 교육과 관련해서 발생하는 여러 가지 문제를 초등수학의 재음미를 통해 해결하려는 시도로, '대수적 사고'를 학교대수에서 강조하려는 움직임과 함께 시작한 것이다.

---

* 접수일(2011년 11월 16일), 수정일(2011년 11월 25일), 게재확정일(2011년 11월 30일)
* ZDM 분류 : D13
* MSC2000 분류 : 97D50
* 주제어 : 분수 scheme, 일차방정식, 대수적 사고
1) 교신저자

한편, 그러한 문제의식을 가지고 일차방정식의 조작적 해결에 대한 연구가 최근 이루어지고 있다(Hackenberg, 2005: Tunc-PeKKan, 2008: Shin, & Lee, 2009). 본 연구에서는 학생들의 일차방정식의 조작적 해결과정을 살피고, 그 과정에서 필요한 분수 scheme, 조작에 대해서 더 알아보고자 하였다.

이를 통하여 산술과 대수 사이의 간격을 줄이고자 하며 대수적 사고와 산술과의 연결성을 강조하고자 하였다.

2. 연구문제

본 연구에서는 조작적 원리에 따른 일차방정식 해결 과정을 사례연구를 통하여 면밀히 분석하고자 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

첫째, 일차방정식의 조작적 해결 과정에서 어떤 분수 scheme과 조작이 쓰이는가? 둘째, 일차방정식의 계수와 상수가 복잡할 때 조작적 해결과정의 전략과 scheme은 어떠한가?

일차방정식의 유형이 다양하지만 본 연구에서는 $ax=b(a,b$ 는 양수$)$형태의 방정식만 다룬다. 여기에서 a를 일차방정식의 계수, b를 일차방정식의 상수라고 정의한다. 본 연구는 일차방정식의 본질이 되는 조작을 분석하고자 하는 것으로 대수적 식을 세워서 해를 찾는 과정으로서가 아닌 미지수와 주어진 양과의 관계를 파악하여 관계를 수립하고 미지의 양을 구해나가는 것을 일차방정식의 구성으로 본다. 그러므로 학생들에게 주어지는 문제는 문자식으로서가 아닌 이러한 상황을 담고 있는 문장제 문제로 주어진다.

일차방정식의 조작적 해결 과정은 위에서 정의한 일차방정식의 문제가 주어졌을 때 분수 scheme을 사용하여 미지수와 주어진 양과의 관계를 파악하여 관계를 수립하고 미지의 양을 구하는 전과정을 말한다.

Piaget는 행동과 조작을 반복 가능하게 하고 일반화할 수 있는 인지구조를 scheme이라 하였다(우정호, 2010). 이 scheme이 환경에의 계속적인 적응을 통해 일반화되거나 분화되고 다른 scheme과 조정되면서 더 가동적이고 일반적인 구조로 재구성된다. 특히, 일련의 행동 scheme이 상호 조정되어 반영적 추상화에 의해 조작적 scheme으로 재구성된다. 본 연구의 분수 scheme은 분수와 관련된 scheme을 말한다.

본 연구의 제한점은 다음과 같다.

첫째, 본 연구의 대상은 충북 청원군 강내면에 소재한 초등학교 재학생으로 선정하였기 때문에 연구 결과의 일반화에 제한적이다. 둘째, 연구에 참여한 대상자로부터 얻을 수 있는 사고과정을 기술하고 설명, 해석하는 사례연구이므로 그 결과를 일반화하는데 있어서 유의할 필요가 있다.

본 연구를 통하여 다음과 같은 효과를 기대할 수 있다. 첫째, 그동안의 대수적 접근을 통한 일차방정식의 연구에 비해 산술과 대수의 간격을 줄여 나갈 수 있다. 둘째, 일차방정식의 해결과정에서 필요한 조작을 분석함으로써, 전-대수(pre-algebra) 단계에 맞는 학습 방향을 제시할 수 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 분수 조작과 scheme

일차방정식을 조작적으로 해결하기 위해선 분수곱셈에 대한 scheme이 필수적이다. 이 절에서는 분수 곱셈에 앞서 분수 scheme과 조작에 대해서 먼저 알아야 할 것이다.

분수는 크게 부분-전체의 관계, 몫, 비율, 양의 측정 또는 연산자 등의 다양한 의미를 지니고 있다. 이러한 다양한 의미의 밑바탕이 되는 두 가지의 활동적 이미지인 분할하기(partitioning)과 반복하기(iteration)가 있다. 분수는 단위 분수의 반복으로 볼 수 있는 바 부분과 같은 크기가 되도록 단위를 반복하는 활동이 중요하다. 이 장에서는 분수와 관련된 중요한 조작 활동과 scheme에 대해서 살펴보고자 한다.

1. 분수조작

분수와 관련된 중요한 조작활동은 크게 4가지로 요약할 수 있다(Norton & McCloskey, 2008).

첫째, 단위화하기(unitizing): 사물이나 사물들의 모임을 단위 또는 전체로 다루는 것을 의미한다.

둘째, 분할하기(partitioning): 단위나 전체를 합동인 부분으로 조각내는 활동을 의미한다.

셋째, 재편하기(disembedding): 전체를 본래대로 유

지하면서 머릿속 상상으로 분활된 전체에서 몇 개의 부분을 복제하여 꺼내는 조작을 의미한다. 예를 들어, 학생들은 전체를 4-부분으로 등분할하고 4-부분 중에서 3개를 재편함으로써 $\frac{3}{4}$을 만들 수 있다. Steffe & Olive(1996)는 "재편하기(disembedding)는 부분-전체의 비교에 바탕이 되는 근본적인 정신조작이다."고 주장하고 있다.

마지막으로, 반복하기(iterating): 부분과 동일한 크기의 복제본을 만들기 위하여 되풀이하기(repeating)의 조작을 의미한다.

2. 분수 scheme

Steffe(1988)의 몇 가지 분수 scheme에 대하여 알아본다.

(1) 분할 scheme

분할 scheme(partitioning scheme)은 분수와 관련된 모든 조작 활동의 가장 근본적인 scheme으로 다음 두 가지의 scheme으로 설명할 수 있다.

①동시분할 scheme(simultaneous partitioning scheme): 동일한 크기의 부분들을 만들 목적으로, 합성단위(composite unit)를 분할 템플릿으로 사용하여 정신적으로 합성단위를 연속된 전체에 투사하는 것을 의미한다. 예를 들어, 학생들은 전체에서 3개의 동일한 크기의 자리를 차지하는 단위를 상상함으로써 전체에서 3개의 크기가 같은 부분을 만들 수 있다.

②등분할 scheme(equi-partitioning scheme): Steffe & Olive(1996)는 전체를 분할하고, 그 중 일부분을 꺼내고, 꺼내어진 부분을 여러 개 복제 반복하여 분할 전의 전체를 재조직할 수 있으면, 등분할 scheme이 구성되었다고 보았다.

(2) 부분-전체 scheme

주어진 전체를 등분할하고, 그 중에서 일부를 꺼낸다. 예를 들어, $\frac{2}{3}$를 만들기 위하여 주어진 바를 3부분으로 등분할 한 후 그들 중 2개를 꺼낸다. 이 scheme은 세 가지의 조작으로 설명된다. 먼저 전체를 인식하기(단위화하기, unitizing), 둘째, 전체를 등분할하기, 끝으로 분할된 전체에서 일부를 재편하기이다.

(3) 분할 단위 분수 scheme

주어진 단위분수 부분과 분할되지 않은 전체에 대하여, 부분(단위분수 부분)을 반복하여 전체를 재생성함으로써 전체에 대한 부분(단위분수 부분)의 상대적인 크기를 생성할 수 있을 때, 분할 단위분수 scheme (partitive unit fractional scheme)이 형성된 것으로 간주한다.

분할 단위분수 scheme은 등분할 scheme의 재조직화에 기초하고 있음을 알 수 있고, 이 scheme의 근본적인 목적은 반복(iterating)을 통해서 전체에 대한 부분의 상대적인 크기를 결정하는 것이다. 또한 분할 단위분수 scheme은 양의 측정 관점에서 분수를 인식할 수 있는 활동적인 조작과 관계된다.

(4) 분할 분수 scheme

분할 분수 scheme(partitive fractional scheme)은 분할 단위 분수 scheme의 일반화이다.

이 scheme은 단위분수와 전체 사이의 관계를 유지하는 동안, 반복을 통한 단위 분수들로부터 합성분수를 만드는 것을 포함한다. 또한 분할 분수 scheme은 두 가지 수준에서 단위 조정(units coordination)을 포함한다. 예로 설명하면, 단위분수의 2회 반복으로서의 2개의 $\frac{1}{3}$, 단위분수의 3회 반복으로서의 전체를 조정해야만 한다.

(5) 역 분할 분수 scheme

역 분할 분수 scheme(reversible partitive fractional scheme)은 분수 부분으로부터 전체를 재생서하기 위해서, 역으로 분할 분수 scheme을 사용하는 것이다. 이 경우 세 가지의 단위 조정이 필요하다.

3. 단위의 재개념화 유형

Steffe(1988)은 학생이 다음과 같은 4개의 서로 다른 유형의 단위를 재개념화하고 분할 할 수 있어야 한다고 했다.

(1) 세기 단위(counting units): 세기단위는 "단일성"

을 충족하는 서로 독립적인 별개의 양이다. 예를 들어, 분수에 대한 세기 단위는 전체 중에서 일부분이다. 즉, '$\frac{2}{3}$'는 '3조각들 중의 2개'를 의미한다.

(2) 합성단위(composite units): 합성단위는 공통적인 속성을 가진 단위들의 집합이다. 예를 들어, 피자 한 판의 $\frac{2}{3}$는 $\frac{1}{3}$씩 두 단위로 구성된 한 단위로써 생각할 수 있다.

(3) 측정단위(measurement units): 측정단위는 전체를 동일한 부분으로 나누었을 때의 한 부분의 단위이다. 예를 들어, 피자 한 판에서 똑같은 3 부분들 중 2개는 피자 한 판의 $\frac{2}{3}$이다.

(4) 단위의 단위(units-of-units): 단위의 단위는 새로운 포괄적인 단위로 재개념화하는 합성단위라고 할 수 있다. 예를 들어, 피자의 한 판의 $\frac{4}{6}$는 $\frac{2}{6}$의 2단위 또는 $\frac{2}{3}$의 1단위로써 재개념화할 수 있다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

본 연구의 목적은 일차방정식의 조작적 해결 과정을 분석하고자 하는 것으로 한 사람 한 사람에 대한 심층적인 분석이 요구되어 그 대상이 여러 명일 경우 관찰이 불가능해진다. 따라서 본 연구의 대상으로 연구자가 관찰이 용이한 면소재지의 초등학교 5학년 학생 두 명을 선정하였다. 본 연구를 실시하는 기간은 초등학생들의 여름 방학 기간으로 6학년 학생들의 대부분이 학원에서 선행학습으로 방정식을 배우기 때문에 본 연구에서 의도하는 사고과정을 관찰하기가 어렵다고 판단되는바 초등학교 5학년을 선정하였다. 학생들의 특징은 <그림Ⅲ-1>과 같다.

가명	성별	특 징
수영	여	자신의 생각을 언어로 잘 표현하였다. 또한 문제를 푸는데 자신이 어떻게 해서 문제를 풀었는지 잘 설명하였다. 학교에서 수학 성적은 중간이었다. 또한 사전 면담을 통하여 ENS가 구성된 것으로 판단되었다.
가영	여	가영이는 생각하는 과정보다 답을 맞추는 것을 중요하게 생각했다. 또한 어떻게 해서 풀었는지 물었을 때 자신의 생각을 잘 말하였다. 학교에서 수학 성적은 중간이었으며, 수영이와 같이 사전 면담을 통하여 ENS가 구성된 것으로 판단되었다.

<그림 Ⅲ-1> 학생들의 특징

본 연구는 일차방정식의 조작적 해결 과정에서 어떠한 조작이 필요한지를 분석하고자 하는 것으로 학생의 사고 과정과 활동을 면밀히 관찰할 필요가 있으므로 정성적 연구 방법 중 사례를 집중적으로 연구하는 것에 초점을 맞춘 사례 연구 방법으로 연구하였다.

사례 연구는 특정한 예를 통한 현상에 대한 연구이고 사례에 대한 심층 연구이다. 본 연구에서는 학생이 미지수와 주어진 양(특히, 주어진 양이 분수일 때)사이의 관계가 곱셈 관계에 있는 문장제 문제를 해결하는 과정에서 주어진 양의 형태(자연수, 분수)와 그 양과 미지수와의 관계(자연수 배수, 분수 배수)에 따라 어떤 분수 scheme과 조작을 사용하는가를 파악하고자 하였다.

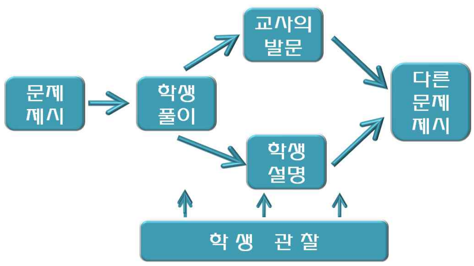
본 연구에 적합한 대상을 선정하기 위해서 학생들과 인터뷰를 하였다. 본 연구를 하기 위해서는 학생이 자연수에서의 곱셈과 나눗셈을 할 줄 알아야 하고 본 검사가 시작되기 전에 학생의 분수에 대한 사전 지식을 알아야 하므로 이 검사에서는 학생의 자연수와 분수와 관련된 문제(분수의 나눗셈을 제외한 사칙연산)를 검사지와 인터뷰를 통해 실시하였다. 학생들은 종이와 연필을 사용하여 계산과정 또는 그림을 이용한 풀이과정을 쓰도록 했다.

Shin & Lee(2009) 은 일차방정식에서 계수와 상수의 종류에 따라 필요한 조작이 다르다고 주장한다. 이러한 일차방정식의 조작적 해결과정을 분석한 선행 연구(Hackenberg, 2005: Tunç-Pekkan, 2008: Shin, & Lee, 2009)를 바탕으로 하여 연구자가 작성한 문제를 전문가 1명과 수학교육 현장 전문가 5명에게 다음의 항목에 대하여 검증 과정을 거쳤다.

① 이러한 문제는 일차방정식의 조작적 해결과정을 보기 위한 적절한 문제인가?

② 이러한 문제는 현 교육과정을 잘 반영하고 있는가?

본 연구는 7월 중순부터 8월 중순 까지 5주 동안 10일에 걸쳐서 본 검사를 실시했다. 1~4차시에는 일차방정식, 5~6차시에는 분수곱셈, 7~8차시에는 일차방정식과 분수곱셈, 9~10차시에는 일차방정식과 비례문제를 제시하였다. 수업진행 과정은 <그림 Ⅲ-2>와 같다.



<그림 Ⅲ-2> 수업진행 과정

먼저 학생에게 문제를 제시하고 충분한 시간을 주어 스스로 풀어보게 하였다. 학생이 풀었다면 어떻게 해결하였는지 설명을 듣고 학생의 수준에서 보다 복잡할 것으로 예상되는 다른 계수의 문제를 제시하였다. 만약 학생이 풀지 못할 경우에는 “주어진 상황을 그림으로 나타낼 수 있을까?”, “너가 그린 그림에서 구하고자 하는 것을 표시해볼까?” 등 학생이 해결할 수 있도록 적절한 발문을 하였다. 학생이 연구자의 도움으로도 해결하지 못한 경우에는 제시했던 문제보다 쉬울 것이라 예상되거나 학생이 원래 제시했던 문제를 해결하는데 도움이 될 것이라 여겨지는 문제를 제시하였다.

사례 연구를 위한 자료 수집은 주로 현장지향(Stake, 1995)으로 이루어지고, 학생 2명의 활동을 비디오로 녹화하였다. 연구자는 관찰자이며 조언자로서 학생들의 활동에 참여하고 필드노트를 기록하였다. 학생들이 문제를 해결한 후 각각의 문제와 전체 문제에 대해 인터뷰하여 녹화하였다.

학생들의 학습지는 필요한 부분을 스캔하여 자료로 활용하였다. 두 학생은 나란히 앉고 학생의 앞에서 비디오 카메라를 설치하고 주로 학생의 조작 활동을 관찰하기 위하여 학습지를 중심으로 촬영하도록 배치하였다.

학습 활동 중 연구자는 학생들의 자발적인 사고를 방해하지 않기 위해 개입을 최소화하도록 노력했다. 학생들이 문제를 해결하고 질문에 대답을 할 때는 해결방법을 찾을 수 있는 충분한 시간을 주도록 했다. 문제에 대한 학생의 반응에 따라서 적절한 대처를 하도록 했다. 실제 실험에서 학생들의 반응에 대처할 수 있도록 <그림 Ⅲ-3>와 같이 학생의 반응을 유형별로 나누고 유형별 대처 방안을 활용한다. 또한 학생들이 문제풀었던 과정들의 보관과 분석을 용이하게 하기 위해서 학생들에게 개인노트를 주었고, 모든 문제는 그 노트에 풀도록 했다.

문제에 대한 학생의 반응	연구자의 대처 방안
옳은 답을 하는 경우	학생이 어떻게 해결하였는지 설명해보도록 한다.
	다른 유형의 문제를 제시한다.
틀린 답을 하는 경우	왜 그렇게 생각 했는지 물어본다.
	학생이 구한 답을 문제 상황에서 해석해 보거나 설명해 보게 함으로써 답이 적절하지 않음을 스스로 깨닫도록 한다.
	학생이 해결할 수 있다고 생각되는 다른 문제를 제시한다.
풀이를 전혀 못하고 모르겠다고 말하는 경우	학생이 문제 상황을 어떻게 이해하고 있는지 확인하고 문제에 접근할 수 있도록 한다.
	그 문제에 필요한 조작이 학생에게 있는지 확인할 수 있는 다른 상황의 문제를 제시한다.
	그 조작이 있음을 확인하고 다시 문제를 주어도 해결하지 못한다면 선행 연구에서 제시되지는 않았지만 학생에게 필요한 조작이 무엇일지 고민하고 그에 맞는 문제를 제시하도록 한다.

<그림 Ⅲ-3> 학생의 반응에 대한 연구자의 대처방안

현장에서 연구자는 학생들의 조작적 해결과정을 기록으로 남기기 위해, 현장 노트를 기록하여 학생들의 특이한 사항을 기록으로 남겼다.

관찰과 인터뷰, 학생들의 질문과 연구자의 발문 및 질문에서 얻은 자료를 분석하는 방법으로는 먼저 비디오에 기록된 바를 사실 그대로 진술하는 내러티브 기술(narrative description)을 하였다. 녹취물 자체를 시간과 내용에 사실적으로 근거하여 기술한 후 연구자의 현장노트와 학생들의 학습지의 기록한 결과를 함께 비교하여 재조직하였다. 자료를 분석하여 이를 통하여 새로운 사실을 발견이 가능한 연결고리를 찾고자 하였다(김영천, 2008). 이는 Yin(2005), 이지훈(2000)의 패턴 매칭 논리(pattern-matching logic) 분석 기법으로 경험적으로 관찰된 패턴과 미리 예측했던 패턴(이론)을 비교하는 논리를 사용하는 것이다. 관찰된 패턴이 예측했던 패턴과 서로 일치하면 내적 타당성이 더 확보되는 결과로 해석할 수 있었다. 그 후 단일 사례에서 공통적으로 발견되는 결과를 범주화(이지훈, 2000)하였다.

	$ax=b$	문제의 예
유형 1	a는 분수, b는 자연수, a에서의 분자가 b를 나누는 형태	샌드위치가 있었는데 그것의 $\frac{2}{3}$만큼의 길이를 재었더니 20cm이다. 원래의 샌드위치의 길이는 몇 cm인가?
유형 2	a, b는 자연수, a가 b를 나누지 못하는 형태	고무줄이 있었는데 그것을 2배로 늘렸더니 7cm가 되었다. 고무줄의 원래의 길이는 얼마인가?
유형 3	a는 자연수, b는 분수	고무줄을 두 배 했더니 $\frac{4}{5}$m가 되었다. 원래의 길이는 몇 m인가?
유형 4	a, b는 분수, a의 분자가 b의 분자를 나누지 못하는 형태	물병에 물이 담겨 있었다. 물을 더 부었더니 처음 있었던 물의 $\frac{5}{2}$배가 되었다. 총 물이 $\frac{2}{3}$L일 때, 처음 물병에 있었던 물은 몇 L인가?

<그림 Ⅲ-4> 일차방정식 문제 유형 분류

따라서 일차방정식의 유형을 <그림 Ⅲ-4>와 같이 분류하였다. 본 연구에서는 사례분석을 통해 일차방정식의 조작적 해결과정에 대한 보다 일반적인 해석을 하고자 하였다.

질적 연구의 자료의 타당도를 증진시키기 위해 일반적으로 사용되고 있는(김영천, 2008) 관찰과 측정의 다원화 기법을 사용하기 위해 면담과 수학적 정당화의 활동 중에 녹화된 비디오테이프, 학생들의 개인노트와 연구자의 현장노트 등의 다양한 자료를 분석하였다. 또한, 연구의 참여자가 분석된 자료를 검토함으로써 타당성을 더욱 높일 수 있다. Meriam(1997)는 연구의 결과를 활용하기 위해 학생들의 활동지를 연구자의 주관에 의해 분석하지 않고, 학생들의 의도를 직접 물어서 이를 녹화하였다. 이를 바탕으로 연구자는 학생들의 활동지를 분석하며 연구자의 전사와 분석의 의도가 학생 본인과 맞는지 학생들이 검토하도록 하였다.

Ⅳ. 연구 결과 분석 및 논의

가영이와 수영이에게 5주 동안 10차시에 걸쳐 문제를 제시하고 미지수와 알려진 양 사이의 관계를 파악하고 관계를 수립하여 미지수를 찾는 과정을 관찰한 결과 알려진 양이 분수인지, 자연수인지 그리고 미지수와 관련된 수가 자연수인지 분수인지에 따라 수단으로 사용하는 분수 scheme과 조작이 다르게 나타났다. 4가지 유형의 일차방정식 문제풀이 과정에서 학생들이 사용한 주요 scheme과 조작을 정리한 결과는 다음과 같다.

일차방정식 유형 1. $ax=b$(a는 분수, b는 자연수, a에서의 분자가 b를 나누는 형태)

이 문제의 유형은 알려진 양이 자연수이고, 미지수와 관계된 분수의 분자가 알려진 양을 나눌 수 있는 형태이다.

수영이와 가영이의 자연수에 대한 역 분할 분수 scheme

◆ 문제 1-2: 샌드위치가 있는데 그것의 $\frac{3}{4}$만큼의 길이를 재었더니 15cm이다. 원래 샌드위치의 길이는 몇 cm인가?

수영이는 문제를 내자마자 어떤 필기도 없이 바로 20임을 알았다. 그리고 이 문제 상황에서 미지수와 알려진 양 사이의 관계에 대해 정확히 이해했다. 가영이는 연구자가 20이 어떻게 나왔냐고 묻자 노트에 4칸의 직사각형을 그렸다. 그리고 수영이는 그 그림을 보면서 전체 샌드위치를 $\frac{4}{4}$라고 말하는 것으로 보아 $\frac{1}{4}$이 4개 있는 것으로 보고 있다. 또한 15cm의 $\frac{1}{3}$이 전체 샌드위치를 4부분으로 나누 것 중에 하나임을 알고 있다. 가영이는 전체 샌드위치를 4개로 나눈 것 중에서 3개에 해당하는 것이 15cm임을 알았고 그 샌드위치의 $\frac{1}{4}$이 5와 같다는 관계를 알았다. Steffe (2002)는 만약 학생이 어떤 것의 부분량이 주어졌을 때, 전체 양을 만들 수 있다면 이 조작 방법과 수단을 역 분할 분수 scheme이라고 불렀다. 수영이과 가영이는 15cm의 $\frac{1}{3}$을 가져와서 5cm를 만들었고, 이것을 전체 샌드위치의 $\frac{1}{4}$이라고 말했다. 그들은 5를 재편하고 전체 샌드위치를 만들어 내기 위해 4번 반복했다. 따라서 가영이와 수영이가 이와 같이 했을 때, 그들이 합성단위에서 조작하기 위해 역 분할 분수 scheme을 사용했다고 판단된다.

이러한 방식으로 조작하는 것은 샌드위치의 $\frac{1}{4}$과 5cm사이의 동일성(identity)이 설립되어야 한다. 특히, 수영이는 그림을 그리지 않고도 마치 수를 조작해서 계산하는 것처럼 아주 빠르게 일어났다. 하지만 전체 샌드위치가 4칸임을 알고 그 중에 한 칸이 5임을 안 것은 문제 상황을 잘 이해하고 있음을 나타낸다. 이 문제에서 15cm는 가영이와 수영이에게 모두 합성 단위이다. 왜냐하면 그들은 세 개의 동일한 부분으로 자를 때 한 단위로써 사용했다. 이 동일한 부분의 하나는 5cm이고 그것은 동시에 전체 샌드위치의 $\frac{1}{4}$이다. 상징적으로 조작하는 것은 비록 그것이 수에 의해 이루어질지라도 사실상 대수적이다. 또한 대수적 본질의 또 하나는 길이의 측정을 전체 샌드위치의 부분의 동치로써 길이의 측정의 사용이다. 즉, 두 학생은 15cm를 측정되지 않은 샌드위치의 $\frac{3}{4}$과 동일한 것으로 가져왔다.

유형 2. $ax=b$ (a, b는 자연수, a가 b를 나누지 못하는 형태)

이 문제의 유형은 알려진 양과 미지수와 관계된 양이 모두 자연수이고 미지수와 관계된 양이 알려진 양을 나누지 못하는 형태이다. Shin & Lee(2009)은 이러한 유형의 일차방정식 문제를 해결하기 위해서는 세 단계의 단위 구조에 기초한 역 분수 scheme과 분배 분할 scheme이 필요하다고 말한다. 만약 분배추론(distributive reasoning)으로 분배 분할 scheme의 목표를 형성한다면, 즉 4개의 동일한 캔디를 다섯 사람이 똑같이 나누어 가지는 상황에서 그 학생은 한 사람이 가진 것은 전체 4개의 캔디바를 만들어내기 위해 5번 반복할 수 있다는 것을 이해하고 각 캔디를 다섯 개로 나누고 네 개의 캔디바 각 각에서 한 부분을 그 다섯 사람의 각 각에게 분배할 것이다. 그 학생은 또한 캔디 하나의 $\frac{4}{5}$는 그 캔디바 전체의 $\frac{1}{5}$과 같다는 것을 안다.

수영이의 분배 분할 scheme

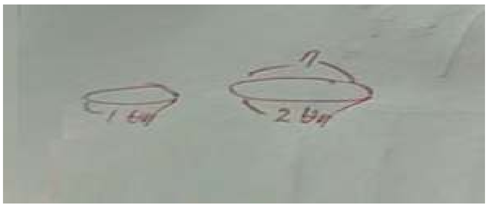
◆ 문제 1-8: 고무줄이 있는데 그것을 두 배로 늘렸더니 7cm가 되었다. 고무줄의 원래의 길이는 얼마인가?

이 문제는 첫 날 수영이와 가영이에게 제시한 문제이다. 수영이는 유형 1의 문제들을 필기 없이 암산으로 바로 계산을 할 수가 있었던 것에 반해 이 문제에서는 해결하기위해 그림을 그리기도 했고 시간이 약 30초 정도 소요되었다. 다음은 문제 1-8과 관련된 에피소드이다.

[에피소드 1-8]

나 : 고무줄을 2배를 했더니 7cm가 되었어. 원래 고무줄은 얼마야?
가영: 두 배를 했는데 7cm가 나와요?
(25초 정도 지남)
수영: 저 나왔는데 약분해야 되요? 기약분수로요?
나 : 얼마 나왔어?
수영: 3과 10분에 5요.

나 : 어떻게?
수영: 우선 한 개를 빼놓고 반을 자르면 3이잖아요. 거기다가 분수로 하면, 10에 5도 되고,
나 : 머가 10에 5랑 같지?
수영: 1이 10분에 5도 되고..
나 : 1이 10분에 5랑 같아?
수영: 네, 아, 10분에 10이랑 같잖아요. 거기다가 반을 자르면 10분에 5, 그래서 그걸 더하면 3과 10분에 5.
수영: 3과 10분에 5.
나 : 기약분수로 고치면?
수영: 3과 2분에 1.
나 : 그럼 그것을 기약분수로 고치면?
수영: 2분에 7.
가영: 7 나누기 2하면 3이니까 1이 남잖아요..
나 : 2로 나누니까 2분에 1.



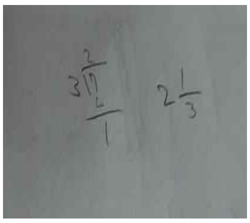
<그림 Ⅳ-1> 문제 1-8 수영 풀이

수영이는 문제 상황을 그림(<그림 Ⅵ-1> 참고)을 그려서 이해하고 있다. 전 문제에서는 그림을 그리는 과정없이 바로 답을 구했던 것과는 달리 이 문제에서는 문제를 이해하는데 그림을 필요로 했다. 수영이는 모르는 양을 임의로 어느 한 모양으로 나타내고 그 옆에 그것보다 조금 더 긴 직사각형을 그리고 밑에 “2배” 그리고 그 위에 “7”이라고 나타냈다. 수영이는 어떤 양의 값을 알 수는 없지만 그것을 두 배한 양이 7cm와 같다는 관계를 설립했다. 이것은 문자나 기호를 이용해서 식을 세운 것은 아니지만 두 대상이 같다는 것을 나타냄으로써 대수적인 사고의 표현이라고 할 수 있다. 이러한 관계를 설립하는 것은 미지수의 양을 찾는 방정식 문제를 해결하는데 아주 중요하다. 수영이는 어떠한 양을 두 배로 한 것이 “7”과 같다면 구하고자 하는 양은 “1배”에 해당하는 양으로 생각했고 수영이게는 “1배”한 양으로써 7을 2로 나누는 것이 목표가 되었다. 수영이는 7을 2로 나누는데 형식적인 나눗셈 계산을 이용해서 구한 것은 아니었다. 7을 6과 1의 합으로 바라보고 각각을 2로 나누어서 그 중에 한 부분씩을 가져와서 그 합으로 구하고 있다. 즉 수영이는 분배 분할 scheme을 사용하여 구하고자 하는 양을 구하였다. 또한 1을 반으로 나누기 위해서 1을 2로 바로 나누어서 $\frac{1}{2}$을 추상화하지 않고 1과 동치분수인 $\frac{10}{10}$을 이용한다. 수영이는 $\frac{10}{10}$을 $\frac{1}{10}$이 10개 있는 것으로 보았고, 또 10을 5로 재편된 양으로 보아서 그 중의 반절로 5개를 가져왔다.

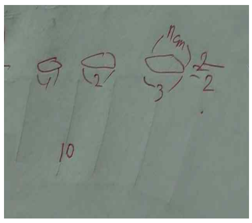
가영이는 수영이의 설명을 듣고 있다가 7을 2로 나누는 형식적인 계산을 통해서 해결하였다. 가영이는 그림이나 기호를 사용하지는 않았다.

◆ 문제 1-9: 고무줄을 3배로 늘렸더니 7cm가 되었다. 고무줄의 원래의 길이는 몇 cm인가?

이 문제는 1-8과 매우 유사한 문제로 미지수와 관계된 양이 2에서 3으로만 바뀌었다. 가영이는 문제 1-8에서 했던 형식적인 방법으로 7을 3으로 나누어 20초도 되지 않아 해결하였던 반면에 수영이는 이 문제를 해결하는데 2분 정도가 소요되었다. 또한 중간에 “이거 어떻게 해?”라고 말할 정도로 이전 문제와는 다른 당혹스러움을 나타냈다. 수영이는 문제를 듣고 <그림 Ⅳ-3>과 같이 그림을 그려서 문제 상황을 나타냈다. 그리고 수영이의 풀이 과정(<그림 Ⅳ-3> 참고)을 보면 수영이가 3과 “7cm”가 같다는 동치 관계를 설립하였다는 것을 알 수가 있다. 수영이는 문제 1-8에서와 같이 7을 1과 6의 합으로 보았고 각각 3부분으로 나누기를 시도했다. 그리고나서 “$2\frac{\ }{2}$”(<그림 Ⅳ-3> 참고)라 쓰고 한참을 고민했다.



<그림 Ⅳ-2> 문제 1-9 가영 풀이



<그림 Ⅳ-3> 문제 1-9 수영 풀이

6을 3으로 나누어서 한 부분의 값으로 2를 가져왔지만 1을 3부분으로 나누는 것에서 당황해했다. 밑에 10으로 쓴 것으로 보아 1을 $\frac{10}{10}$으로 보았지만 10이 3으로 나누어떨어지지 않자 당황한 것 같다. 조금 시간이 흐른 후 수영이는 1과 동치분수인 $\frac{9}{9}$를 가져와서 3으로 나누었다.

유형 3. $ax = b$ (a는 자연수, b는 분수)

이 문제의 유형은 문제 8-1에서와 같이 알려진 양이 분수, 미지수와 관계된 양이 자연수이다.

Shin & Lee(2009)은 이러한 유형의 문제를 풀기 위해서 반드시 반복 분할에 기초를 두고 있는 단위 분수의 합성 scheme을 구성해야 한다고 말한다. 그리고 이 분수 합성 scheme을 행하기 위해서는 세 단계의 단위 구조가 반드시 있어야 한다. 즉, 학생이 JavaBars를 사용해서 $\frac{1}{3}$의 $\frac{1}{5}$를 구하기 위해서 가정된 전체 바로부터 바의 $\frac{1}{3}$을 재편할 수 있어야 하고 가정된 전체 바의 $\frac{1}{15}$로써 그 재편된 $\frac{1}{3}$의 $\frac{1}{5}$을 가져온 결과를 고려해야 한다.

가영이의 반복 분수 scheme의 결여

◆ 문제 6-9: 피노키오의 코가 거짓말을 했더니 코의 길이가 3배가 되어 $\frac{3}{7}$m가 되었다. 원래 피노키오의 코의 길이는 몇 m 인가?

이것은 6차시에서 가영이에게 제시한 문제이다. 다음은 이 문제와 관련된 에피소드이다.

[에피소드 문제 6-9]

나 : 피노키오가 있었어. 피노키오가 거짓말을 해가지고 코의 길이가 3배로 늘어났어. 3배로 늘어나서 코의 길이가 $\frac{3}{7}m$가 되었다면 원래 피노키오 코의 길이는 얼마일까?

(문제를 내자마자 수영이가 바로 "저, 알아요!"라고 말했다.)

가영: 세배? 나누는 거잖아요..

가영: 7분에 9?

수영: 왜 더 커질까?

(잠시 고민한다.)

가영: 2와 3분에 1.

나 : 2와 3분에 1? 어떻게 나왔어?

가영: 7을 3으로 나눴어요,

나 : 7분에 3 미터인데 왜 7을 3으로 나누었을까?

(다시 가영이는 혼자 풀기를 시도한다. 잠시 시간이 흐른 후.)

가영: 3과 3분에 2요. 맞아요? 틀려요? 다시 풀게요.

나 : 상상을 해봐봐, 피노키오 코가 있어, 먼지 모르잖아 지금. 근데 몇 m가 됐어?

가영: 세배를 했더니 7분에 3.

나 : 7분에 3을 그려봐봐, 그래 먼지는 모르지만 그거(<그림 Ⅳ-4>)를 세배를 했더니 몇 m래?

가영:(그림 Ⅳ-5와 같이 그리며) 7분에 3.

가영: 그니까 나누는거 아니에요?

나 : 머를 멀로 나눠?

가영: 3과 ...

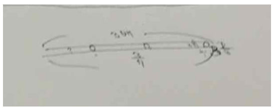
나 : 그냥 얘($\frac{3}{7}$)는 나눠야지..얘는 그냥 값이야. 7분에 3 미터야, 똑같은걸 한 번 더하고, 두 번 더하고, 세 번 더했더니, 7분에 3 미터가 됐어.

가영: 7분에 1.

나 : 어떻게 나왔어?

가영: 만약에요. 이게 7분에 1이면요, 더했다니까 7분에 1 더하기 7분에 1 더하기 7분에 1하면 7분에 3 이잖아요.

<그림 Ⅳ-4> 문제 6-9 가영 풀이①



<그림 Ⅳ-5> 문제 6-9 가영 풀이②

가영이가 처음에 $\frac{9}{7}$라고 했던 것은 3과 $\frac{3}{7}$을 곱한 결과이다. 이것으로 보아 가영이는 어떤 양의 3배를 한 것이 $\frac{3}{7}$이라는 동치관계를 설립하지 못한 것으로 보인다. 만약 3배를 한 것이 $\frac{3}{7}$과 같다는 동치관계를 설립했다면 3배를 해서 $\frac{3}{7}$이 되는 수를 찾았을 것이다.

가영이에게 문제 상황을 한 번 그림으로 그려보라고 했다. 가영이는 $\frac{3}{7}$을 그림으로 나타내지 않고 모르는 양 피노키오의 코를 그리고 “?”로 모르는 양임을 표시했다. 그리고 그것을 3배했으므로 <그림 Ⅳ-4>에서 그린 것을 세 번 반복하고 <그림 Ⅳ-5>과 같이 “$\frac{3}{7}$”이라고 표시했다. 가영이는 3배를 한 것이 $\frac{3}{7}$m와 같다는 것을 그림을 그림으로써 동치관계를 설립했다. 세배를 했기 때문에 원래의 값을 구하기 위해서는 나누어야 한다는 것은 알았지만 $\frac{3}{7}$을 대상으로 나눗셈을 하려고 하지 않았다. 이것은 가영이가 $\frac{3}{7}$을 3m를 7등분했을 때 그 중 한 부분의 길이로서 생각하는 것이 아니라 어떤 조작의 과정으로서 생각하기 때문이다. 나누어야 된다는 것을 알았을 때 3을 7로 나누는 것도 그 이유라고 할 수 있다. 또한 가영이는 $\frac{3}{7}$을 $\frac{1}{7}$로 재편하지 못하고 있음을 볼 수 있다. $\frac{3}{7}$을 $\frac{1}{7}\times 3$이 아니라 $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$로 바라보고 있다. 그래서 내가 “똑같은 것을 한 번 더하고, 두 번 더하고 세 번 더 했더니 $\frac{3}{7}$이 됐어.”라고 말했을 때 가영이는 바로 너무 당연하다는 듯이 “$\frac{1}{7}$!”이라고 말했다. $\frac{3}{7}$을 $\frac{1}{7}\times 3$으로 바라보지 못하는 것은 가영이에게 $\frac{1}{7}$이 반복 단위가 아니기 때문이다. 가영이에게는 반복 분수 scheme이 없다.

유형 4. $ax=b$ (a, b는 분수, a의 분자가 b의 분자를 나누지 못하는 형태)

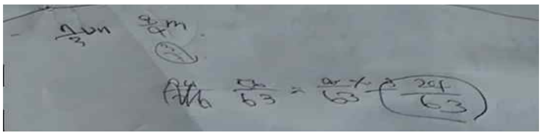
이 문제의 유형은 문제 8-4에서와 같이 알려진 양과 미지수와 관계된 수 모두 분수이다. 또한 미지수와 관계된 분수의 분자가 알려진 분수량의 분자를 나눌 수가 없는 형태로 4가지 유형 중에서 학생들이 가장 어려워했던 유형의 문제이다.

◆ 문제 8-4: 고무줄이 있었는데 $\frac{7}{3}$배로 늘렸더니 $\frac{8}{9}$m가 되었습니다. 원래 고무줄의 길이는 얼마입니까?

이 문제는 8차시에 수영이에게 제시한 문제이다. 다음은 이와 관련된 에피소드이다.

[에피소드 문제 8-4]

나 : 고무줄이 있었는데 3분에 7배를 했어. 어떤 고무줄이 있는데 그것의 3분에 7배를 했더니 9분에 8m가 됐어.
수영: 원래는 몇이냐구요?
나 : 응.
(계산을 한다.)
수영: 63분에 24.
나 : 어떻게?
수영: 맞아요?
나 : 응, 맞아 어떻게 나왔어?
수영: 이거를 나눌 수 있게 곱한 다음에 나누고 곱해서 나왔어요.
나 : 왜 나누고 곱해?
수영: 그래야지 한 개를..7개 중에서 한 개를 알고 그 네모를 아니까.
나 : 그 네모는 멀까?
수영: 3분에 3, 1
나 : 그 네모가 무슨 네모야? 어떤 거를 말하는거야?
수영: 어떤 거의 3분에 7배라며요. 그러니까 그 어떤 거요.
나 : 네모를 어떻게 구했다고?
수영: 7로 이거($\frac{8}{9}$)를 나누어서요. 9분에 8 나누기 이걸(7)하면요 한 개의 칸이 나오잖아요. 3분에 1의 칸이 나오잖아요. 그거 곱하기 3을 하면 3분에 3이잖아요. 그게 이 네모니까 그냥 구했어요.



<그림 Ⅳ-7> 문제 8-2 수영 풀이

수영이는 구하고자 하는 어떤 것을 네모라고 표현했다. 그리고 그것의 $\frac{7}{3}$배한 것이 $\frac{8}{9}$m와 같다는 동치관계를 설립했다. <그림 Ⅳ-7>에서 보면 "$\frac{8}{9}$m"밑에 "$\frac{3}{3}$" 라고 쓴 것을 볼 수 있다. 계산을 하기 전에 이 것을 먼저 썼는데 이것은 수영이가 구하고자 하는 목표임을 보여준다. 그리고 그 구하고자하는 $\frac{3}{3}$은 $\frac{1}{3}$이 3개로 이루어진 것이므로 $\frac{1}{3}$에 해당하는 값을 찾는데 이것은 $\frac{8}{9}$의 7부분 중의 하나라는 것을 알았다. $\frac{8}{9}$을 7로 나눈 값이 구하고자 하는 양의 $\frac{1}{3}$임을 안 것은 이 문제의 해결에서 아주 중요한 동치관계이다. 그리고 수영이는 $\frac{8}{9}$을 7로 나누기 위해서 $\frac{8}{9}$과 같은 $\frac{56}{63}$를 이용한다. 이 것은 $\frac{8}{9}$을 $\frac{1}{9}$이 8개 모여있을 뿐만 아니라 $\frac{1}{63}$이 56개 모인 것과 같다는 것을 안 것이다.

결과 분석을 토대로 연구문제에 대한 논의를 하고자 한다.

연구문제 1: 일차방정식의 조작적 해결과정에서 어떤 분수 scheme과 조작이 쓰이는가?

수영이와 가영이가 주어진 양이 자연수인지 분수량인지, 그리고 미지수와 관계된 수가 자연수인지 분수인지에 따라 학생들이 문제해결과정에서 사용되는 수단과 방법에 차이가 있었다. 그 유형을 4가지로 나누고 유형마다 필요한 scheme과 조작은 무엇인지 논하고자 한다.

첫째, 문제 1-2와 같은 유형은 알려진 양이 자연수이고 미지수와 관계된 분수의 분자가 알려진 양을 나눌 수 있는 형태이다. 가영이와 수영이는 이러한 유형의 문제를 해결하기 위해 먼저 미지의 부분량과 알려진 양이 같다는 동치관계를 설립했다. 그리고 구하고자 하는 미지의 양을 구하기 위해서 부분량에서 전체양을 만들 수 있는 역 분할 분수 scheme을 사용하고 있다. 특별히 미지수와 관계된 분수량이 가분수일 때, 즉 구하고자 하는 양보다 더 큰 부분의 양이 주어지고 미지의 양을 구할 수 있는 역 반복 분수 scheme을 사용했다.

둘째, 문제 1-8과 같이 알려진 양이 자연수이고 미지수와 관계된 수가 자연수이지만 관계된 수가 알려진 양을 나누지 못하는 유형에서는 수영이와 가영이 모두 미지수와 알려진 양 사이의 동치관계를 설립할 수 있었다. 그리고 주어진 양을 미지수와 관계된 수로 나누려고 하였다. 가영이는 문제 1-8과 1-9에서 수를 나누는 형식적인 계산으로 문제를 해결하고 있다. 한편 수영이는 7을 3으로 나누기 위해서 분배 분할 scheme과 함께 동치분수 scheme을 이용하고 있다. 실제 이 동치분수 scheme은 분할을 용이하게 한다.

셋째, 문제 6-9와 같이 알려진 양이 분수, 미지수와 관계된 양이 자연수인 형태이다. 가영이는 이러한 유형의 문제를 처음 대했을 때, 문제 자체가 이해가 안 간다고 했다. 이것은 실제 가영이가 $\frac{4}{5}$를 "전체를 5개로 나눈 것 중에서 4개"라는 의미로 바라볼 뿐 어떤 측정값을 나타내는 하나의 대상으로서 바라보지 못하기 때문이다. 전체-부분과의 관계로써 보는 것은 분수를 어떤 과정으로서 인식하게 된다. 이 것은 동치관계를 설립하는데 제한적이다.

따라서 이러한 유형의 문제를 해결하기 위해서는 분배추론으로서의 분배 분할 scheme이 필요한 것으로 생각된다. 한편, 문제 6-9에서 가영이는 어떤 양의 3배를 한 것과 $\frac{3}{7}$이 같다는 동치관계를 설립하고 나서도 문제를 스스로 해결하지 못했다. 하지만 내가 "똑같은 것을 한 번 더하고, 두 번 더하고 세 번 더했더니 $\frac{3}{7}$이 됐어."라고 말했을 때 가영이는 바로 너무 당연하다는 듯이 "$\frac{1}{7}$"이라고 답을 말했다. 가영이는 $\frac{3}{7}$을 $\frac{1}{7}\times 3$로는 인식하지 못하고 $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$로 인식했을 때 문제를 해결할 수 없다는 것을 보여준다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위해서는 반복 분수 scheme이 필요하다. 또한 미지수와 관계된 자연수가 알려진 분수량을 나누지 못하는 경우에는 반복분할을 기반으로 하는 분수합성 scheme이 필요하다.

넷째, 문제 8-4에서와 같이 알려진 양과 미지수와 관계된 수 모두가 분수이다. 특히, 미지수와 관계된 분수의 분자가 알려진 분수량의 분자를 나누지 못하는 유형의 문제이다. 가영이는 이 문제를 해결할 수가 없었다. Zelha(2008)가 교수실험에서 이와 같은 유형의 문제를 8학년인 Brenda에게 제시했을 때, 두 개의 독립된 바를 만듦으로써 문제를 해결하기 시작했다. 문제 8-4라면 $\frac{7}{3}$을 나타내는 막대와 $\frac{8}{9}$을 나타내는 막대를 가져와서 둘 사이의 동치관계를 이용하여 해결하고 있음을 보이고 있다. 수영이는 이 문제를 그림을 그리지 않고 해결했다. 이와 같은 문제를 해결할 때 처음에 주어진 양과 미지수와의 동치관계는 설립했지만 구하고자 하는 양을 찾지 못했다. 문제에서 $\frac{7}{3}$과 $\frac{8}{9}$는 모두 분수이지만 다른 의미를 나타내고 있다. $\frac{8}{9}$은 측정값으로서 과정으로서가 아닌 하나의 대상이다. 하지만 $\frac{7}{3}$배가 의미하는 것은 "어떤 양을 3으로 나눈 것 중의 7개"를 의미한다. 구하고자 하는 것이 $\frac{3}{3}$인 것을 알기 위해서는 두 분수의 의미의 차이를 알고 있어야 한다. 수영이는 구하고자 하는 양을 $\frac{3}{3}$으로 생각하였다. $\frac{3}{3}$을 $\frac{1}{3}$이 세 개 있는 것으로 보았고 또 구하고자 하는 양의 $\frac{1}{3}$은 주어진 양의 반절과 같다는 동치관계를 세울 수 있었다. 수영이는 $\frac{8}{9}$을 7로 나누기 위해 동치분수 scheme을 사용한다.

연구 문제 2: 일차방정식의 계수와 상수가 자연수가 아닐 때 조작적 해결과정의 전략과 scheme은 어떠한가?

미지수와 주어진 양 사이의 관계를 파악하고 관계를 수립하여 미지의 양을 구할 때 가장 핵심적인 것은 동치관계를 설립하는 것이다. 학생은 문제를 이해하고 해결하기 위해 가장 먼저 동치관계를 설립하였다. 그리고 이렇게 동치관계를 설립하고 나서 문제를 해결하기 위한 다음 전략을 수립하였다. 또한 학생이 동치관계를 설립할 수 있는 것은 계수의 형태에 따라 달라지는 것으로 보였다.

가영이는 유형 1과 유형 2에서와 같이 주어진 양이 자연수일 때는 동치관계를 잘 설립하였다. 하지만 유형 3과 유형 4에서와 같이 주어진 양이 분수 일 때는 처음에 동치관계를 설립하는 것을 어려워하였다. 반면에 수영이는 모든 문제에서 동치관계를 잘 설립하였다. 가영이는 분수를 "전체를 몇 개로 나눈 것 중에 몇 개"라는 전체-부분과의 관계로서밖에 알지 못했다. "전체를 n등분한 것 중에 몇 개"로써의 분수는 분수가 가지는 다양한 의미 중에서 한 측면이지만 일차방정식을 해결하기 위해서는 분수를 하나의 값으로써 이해할 수 있어야 한다. 분수를 어느 한 값으로써 이해하는 것은 "전체-부분과의 관계, 분배결과의 몫, 비율, 연산자" 중에서 분배결과의 몫으로 이해하는 것과 유사하다고 할 수 있다. 하지만 엄밀한 의미로 분수를 어떤 연산을 한 결과로써가 아니라 분수량을 한 값으로써 인식할 수가 있어야 하는데 이것은 분수를 어떤 단위의 반복으로 바라볼 수가 있어야 한다. "$\frac{4}{5}$"를 $\frac{1}{5}$을 단위로 하여 측정한 결과가 $\frac{4}{5}$로써 이해하는 것이다. 그러므로 $\frac{4}{5}$는 $\frac{1}{5}$을 단위로 할 때는 $\frac{1}{5}$이 4개 있는 것이지만 $\frac{1}{10}$을 단위로 했을 때는 $\frac{1}{10}$이 8개 있는 것과 같다는 것을 이해할 수가 있다. 분수를 어떤 측정단위의 반복 결과로써 이해해야하며 이것은 분수량으로 나타난 분수를 이해할 수 있게 한다. 즉, 반복 분수 scheme은 일차방정식의 조작적 해결과정에서 중요한 전략으로써 동치관계를 설립할 수 있게 하는데 중요한 scheme이다.

유형 4는 여러 유형 중에서 가장 복잡한 형태이다. 가영이는 유형 3과 유형 4를 해결하지 못하였고 수영이가 다른 유형은 쉽게 해결하였던 반면에 유형 4에서는 어려워했던 것을 통해 알 수 있다. 수영이는 가영이가 해결하는데 어려워했던 유형 3과 유형 4를 해결할 때 동치분수를 아주 잘 이용하였다. 문제 8-4에서 보면 수영이는 주어진 양의 $\frac{1}{3}$에 해당하는 양을 구하려면 $\frac{8}{9}$을 7로 나눠야 한다는 것을 알았다. 그것을 구

하기 위해서 $\frac{8}{9}$를 동치분수인 $\frac{56}{63}$으로 고쳐서 7로 나누었다. $\frac{8}{9}$은 $\frac{1}{9}$이 8개로 이루어져있는 것으로 볼 때 7로 나누기 위해서는 힘들다는 것을 알고 7로 나누어 떨어질 수 있는 개수의 더 조그만 조각으로 만들기 위해서 $\frac{1}{63}$이 56이 있다는 것으로 바꾸어서 계산하였다. 이것은 56이 7로 나누어 떨어지기 때문에 7로 나누는 것을 허락한다. 동치분수로 바꾸었을 때 분할은 더 쉬워진다. 그리고 수영이는 문제해결에서 그것을 적절히 사용하였다. 수영이의 문제해결과정을 바탕으로 볼 때 동치분수는 복잡한 계수와 상수가 있는 일차방정식의 해결에서 중요한 scheme임을 알 수 있다.

일차방정식의 해결과정에서 핵심적인 전략은 동치관계를 설립하는 것이고 이것은 계수와 상수에 따라 영향을 받았다. 미지수와 관계된 수가 자연수인지 분수에 따라서는 큰 영향을 받지 않았다. 하지만 주어진 양이 분수일 때 분수량을 어떤 조작의 과정으로서가 아니라 하나의 값으로써 인식할 수가 있어야하는데 이 때 반복 분수 scheme이 필요하다. 일차방정식의 조작적 해결과정에서 동치관계를 설립하는 것은 중요한 해결전략이고, 어떤 계수와 상수와 상관없이 동치관계를 세울 수 있으려면 반복 분수 scheme이 필요하다. 또한 동치관계를 설립하고 나서 구하고자 하는 값을 구할 때 동치분수를 이용해서 구하는 것이 아주 유용하다. 동치분수는 분할을 용이하게 하기 때문이다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 알려진 양과 미지수와의 관계를 파악하고 알려진 양과 미지수와의 관계를 수립하여 미지수를 찾는 것을 일차방정식의 해결로 보고 이러한 일차방정식을 조작적으로 해결하는 과정에서 학생이 분수 scheme과 조작을 어떻게 사용하여 해결하는지 과정을 분석하였다.

본 연구를 위해 학생에게 일차방정식의 문제와 분수 곱셈 문제, 비례문제 등을 일주일에 두 번씩 5주에 걸쳐 10차시 수업을 하였다. 학생이 자신의 scheme을 어떻게 사용하는지 보고자 하였으므로 문제를 제시하고 교사는 최대한 개입을 자제하였다. 학생이 문제를 해결할 수 있도록 적절한 발문만을 하였다. 학생은 계수의 유형에 따라 문제를 해결력에 차이가 있었고 각 유형마다 어떠한 분수 scheme을 사용하여 해결하고 있는지 4가지 유형으로 나누고 이를 분석하였다. 또한 학생에게 어떤 scheme이 있는지 좀 더 자세히 보기 위해 조작적 활동을 통한 분수 곱셈을 어떻게 하고 있는지 분석하였다.

본 연구의 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 일차방정식을 조작적으로 해결하는 과정에서 동치분수scheme이 아주 유용하였다. 분수를 자연수로 나눌 때 동치분수를 이용하는 것은 학생들에게 직관적이고 대수식으로 계산을 하는 과정에서도 나눗셈에 대한 의미를 부여할 수 있다.

둘째, 학생은 다양한 분수의 의미 중에서 “분배결과의 몫”으로서의 의미를 확실히 이해해야 한다. 알려진 양이 분수일 때, “전체-부분과의 관계”로서만 분수의 의미를 이해하고 있는 학생은 동치관계를 설립하는 것을 어려워했기 때문이다. 일차방정식 문제를 해결하기 위해서는 이 두 가지 분수의 의미를 모두 이해해야하며 적절히 활용할 수 있어야 한다.

셋째, 분수scheme 형성을 위한 구체적인 조작활동의 기회가 학생에게 충분히 제공되어야 한다. 학생이 분수의 곱셈을 식으로 계산할 수 있다고 해서 분수 scheme과 조작이 구성된 것으로 볼 수 없었으며 이것이 대수적 사고의 형성에 중요한 기여를 하는바 분수의 개념 및 연산 지도에서 분수 scheme구성을 위한 조작 활동이 강조되어야 한다.

넷째, 동치관계를 세우는 것은 일차방정식의 해결과정에서도 중요한 전략이지만 이것은 주어진 문제 상황의 구조와 관계에 집중하는 것으로 수와 연산 과정에 초점을 두는 산술적인 사고 유형과 대비되는 대수적 사고라고 할 수 있다. 본 연구의 결과 학생들은 같은 유형($ax=b$)의 일차방정식일지라도 관계를 파악하는데 차이를 보였다. 또한 문제를 해결하는데 계수와 상수가 자연수인지 분수인지에 따라서도 필요한 분수 scheme이 다르다는 것을 확인하였다. 그러므로 교사는 일차방정식을 지도할 때 계수와 상수의

형태에 따라 학생에게 필요한 분수scheme이 다름을 알아야하고 그에 따라 적절히 지도할 수 있어야 한다.

본 연구의 과정에서 나타난 결과를 바탕으로 부족함과 제한점을 보완하여 보다 좋은 후속 연구를 위하여 다음의 제언을 하고자 한다.

첫째, 실제 문자를 사용하여 일차방정식을 해결하는 것을 배운 학생들에게 대수식을 사용한 방정식 해결 능력과 분수 scheme을 이용하여 조작적으로 해결하는 능력사이의 양적인 상관관계를 밝히는 연구가 필요하다.

둘째, 본 연구는 분수의 나눗셈을 배우지 않은 초등학생 5학년 학생 두 명을 대상으로 조작적 해결 과정을 조사하였는데 분수의 나눗셈을 학습한 상위 학년에 대해서도 연구가 필요하다.

셋째, 본 연구는 학생 두 명을 대상으로 하였으므로 다양한 사례의 관찰을 위해 좀 더 많은 학생들에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

김성준 (2003). '초기 대수'를 중심으로 한 초등 대수 고찰. 수학교육학연구, 13(3), 309-327.

김성준 (2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 수학교육학연구, 17(4), 453-475.

김영천・김진희 (2008). 질적 연구에서의 자료분석. 교육인류학연구, 11(1), 1-35.

우정호 (2010). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울: 서울대학교출판문화원.

우정호・정영옥・박경미・이경화・김남희・나귀수 (2006). 수학교육학 연구방법론. 서울: 경문사.

이지훈 (2000). 사례연구방법. 서울: 대경

Amerom, B. (2002). *Reinvention of early algebra. Development research on the transition from arithmetic to algebra.* Freudenthal Institute. Wilco, Amersfoort.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equation: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9(2), 19-25.

Hackenberg, A. J. (2005). *Construction of algebraic reasoning and mathematical caring relations.* Athens, GA: University of Georgia.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebra reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-18). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Merriam, S. B. (Ed.) (1988). *Case study research in education : A Qualitative Approach.* San Francisco : Jossey-Bass. 허미화 역 (1988). 질적 사례연구법. 서울: 양서원.

Norton. A. H. & McCloskey. A. V. (2008). Modeling students mathematics using Steffe's fraction schemes. *Teaching Children Mathematics*, 15(1), 48-54.

Shin, J. H. & Lee, J. K. (2009). An operational analysis for solving linear equation problems. *수학교육학연구*, 19(3), 461-477.

Smith Ⅲ, J. P. & Thompson, P. W. (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Balnton (Eds), *Algebra in the early grade* (pp. 95-132). New York: Lawerence Erlbaum Associates.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* Thousand Oaks: Sage Publications.

Steffe. L. P. & Olive. J. (1996). Symbolizing as a constructive activity in a computer microworld. *Journal of Educational Computing Research*, 14 (2), 113-138.

Tunç-Pekkan, Z. (2008). *Modeling grade eight student' construction of fraction of multiplying scheme and algebraic operations.* Unpublished Doctoral Dissertation, The University of Georgia, Athens.

Wu. H. H. (2001). How to prepare students for algebra. *American Educator*, 25(2), 10-17.

Yin, R. K. (1994). *Case study research : design* *and methods*. Thousand Oaks, Calif. : Sage Publications. 신경식, 서아영 공역 (2005). 사례연구 방법. 서울: 한경사.

Case Study on the Fractional Scheme for enhancing the connection between the arithmetic and the algebraic thinking

Lee, Hye Min
Graduate School Korea National University of Education
E-mail : cham612@hanmail.net

Shin, In Sun
Korea National University of Education
E-mail : shinis@knue.ac.kr

We observed the process for solving linear equations of two 5th grade elementary students, who do not have any pre-knowledge about solving linear equation. The way of students' usage of fractional schemes and manipulations are closely observed. The change of their scheme adaptation are carefully analyzed while the coefficients and constants become complicated.

The results showed that they used various fractional scheme and manipulations according to the coefficients and constants. Noticeably, they used repeating fractional schemes to establish the equivalence relation between unknowns and the given quantities. After establishing the relationship, equivalent fractions played important role.

We expect the results of this study would help shorten the gap between the arithmetic and the algebraic thinking.

* ZDM Classification : D13
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key Words : fractional scheme, algebraic thinking, linear equation